

PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE

I. NOȚIUNI DE CALCULUL ERORILOR

Orice măsurare experimentală este afectată de erori. După cauza care le produce, acestea se pot împărți în trei categorii: erori sistematice, erori întâmplătoare și erori grosolane.

1. **Erorile sistematice** au trei surse posibile:

a) *Erori de observator*. Dacă, de exemplu, observatorul citește indicațiile instrumentului de măsură privind oblic scala acestuia, toate citirile sale sunt mai mari sau mai mici decât valorile reale. Aceste erori pot fi complet eliminate, prin corectarea modului de lucru al observatorului.

b) *Erori de instrument*. Orice instrument de măsură are o scală indicatoare (la instrumentele cu afișaj digital, putem considera această scală implicită). Nici o citire efectuată cu ajutorul acestei scale nu poate fi mai precisă decât jumătate din cea mai mică diviziune a scalei. Aceste erori pot fi micșorate (prin înlocuirea instrumentului folosit cu altul mai precis), dar nu complet eliminate.

c) *Erori de metodă*. În cursul procesului de măsură, sistemul măsurat interacționează cu instrumentul de măsură, ceea ce modifică rezultatul măsurătorii. De exemplu, pentru a măsura o rezistență, putem folosi metoda amonte sau metoda aval. În primul caz valoarea obținută este mai mare decât cea reală ($R_{m\grave{a}s} = R(1 + R_A/R)$), iar în al doilea este mai mică ($R_{m\grave{a}s} = R/(1 + R/R_V)$). Putem elimina aceste erori dacă cunoaștem rezistențele interne ale instrumentelor de măsură (ceea ce înseamnă măsurarea altor rezistențe) sau dacă înlocuim metoda cu o metodă prin punte, care compară rezistența necunoscută cu altele, presupuse cunoscute (deci, din nou, măsurarea altor rezistențe). Așadar și aceste erori pot fi micșorate, dar nu complet eliminate.

Oricare ar fi cauzele erorilor sistematice, ele au o caracteristică comună: se admite că valoarea unei măsurători individuale este aceeași ori de câte ori repetăm măsurarea, deci și eroarea este aceeași. De aceea, calculul erorilor pentru măsurători indirecte se face la fel pentru toate erorile sistematice.

Eroarea absolută δ_x a unei mărimi x măsurate reprezintă modulul diferenței maxime posibile între valoarea măsurată și cea adevărată, iar eroarea relativă ε_x este raportul dintre eroarea absolută și modulul valorii adevărate, fiind dată de raportul dintre eroarea absolută și modulul valorii măsurate (cu condiția, evident, ca numitorul să fie nenul).

Atunci, dacă o mărime determinată indirect este de forma

$$z = x \pm y, \quad (1)$$

eroarea sa absolută este

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y, \quad (2)$$

iar dacă mărimea este de forma

$$z = xy^{\pm 1}, \quad (3)$$

eroarea sa relativă este

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (4)$$

2. **Erorile întâmplătoare** sunt determinate de considerente statistice. Experiența arată că mărimile măsurate direct sunt de două tipuri posibile: discrete (de exemplu numărul de impulsuri înregistrate de un detector) și continue.

Analiza teoretică a statisticii mărimilor discrete demonstrează că valorile lor sunt distribuite conform distribuției de probabilitate Poisson. Conform acesteia, probabilitatea de a obține un număr n de impulsuri la o măsurare este

$$p(n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}, \quad (5)$$

unde

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} np(n) \quad (6)$$

este valoarea "adevărată" a numărului de impulsuri (și, în general, este un număr real), iar eroarea cu care a fost determinat numărul a (eroarea standard sau abaterea pătratică medie) este

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (n-a)^2 p(n)} = \sqrt{a}. \quad (7)$$

Dacă efectuăm un număr N de măsurători în condiții identice, obținând valorile $n(1)$, $n(2)$, ..., $n(N)$, atunci estimatul valorii adevărate este dat de valoarea medie:

$$\text{Est}a \equiv \tilde{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n(i). \quad (8)$$

Eroarea care afectează o măsurare individuală $n(i)$ va fi atunci

$$\sigma_{n(i)} = \sqrt{n(i)}, \quad (9)$$

iar cea a valorii medii va fi

$$\sigma_{\tilde{n}} = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{N}}. \quad (10)$$

Să trecem la cazul mărimilor continue. Fizica statistică demonstrează că valorile acestor mărimi sunt distribuite conform distribuției normale (Gauss). Să

considerăm întâi cazul unei singure mărimi x . Densitatea sa de probabilitate va fi atunci

$$\mathcal{P}(x) \equiv \frac{dp(x, x+dx)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad (11)$$

unde

$$a_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathcal{P}(x)dx \quad (12)$$

este valoarea sa "adevărată", iar

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-a_x)^2 \mathcal{P}(x)dx} \quad (13)$$

este eroarea sa standard. În cazul în care efectuăm un număr N de măsurători în condiții identice, obținând valorile $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(N)$, atunci estimatul valorii adevărate este dat de valoarea medie

$$\text{Est}a_x \equiv \tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i), \quad (14)$$

eroarea care afectează o măsurare individuală $x(i)$ va fi

$$\sigma_{x(i)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x(i)-\tilde{x})^2}, \quad (15)$$

iar cea a valorii medii va fi

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_{x(i)}}{\sqrt{N}}. \quad (16)$$

Să considerăm acum cazul a n mărimi x_1, x_2, \dots, x_n , formând un vector într-un spațiu n -dimensional. În acest caz, distribuția normală va fi

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Gamma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \Gamma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right], \quad (17)$$

unde matricea covarianțelor Γ este definită prin

$$\Gamma_{i,j} \equiv \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \mathcal{P}(\mathbf{x}) d^n x, \quad (18)$$

$\rho_{i,j}$ fiind coeficienții de corelație liniară (care satisfac condiția $|\rho_{i,j}| \leq 1$). În particular, dacă mărimile x_1, x_2, \dots, x_n sunt independente, matricea covarianțelor este diagonală, elementele sale nenule fiind pătratele erorilor standard (dispersiile) mărimilor considerate.

Dacă efectuăm un set N de măsurători în condiții identice, obținând valorile $\mathbf{x}(1)$, $\mathbf{x}(2)$, ..., $\mathbf{x}(N)$, estimatele valorilor adevărate și ale erorilor

standard pentru valori individuale sau medii sunt date de relațiile (14 – 16). Dacă, pe baza măsurătorilor efectuate, evaluăm un parametru exprimat printr-o funcție $F(\mathbf{x})$, atunci, pentru a estima valoarea sa adevărată și eroarea standard,

trebuie întâi să evaluăm covarianțele relative $\left| \frac{\Gamma_{i,j}}{a_i a_j} \right|$. Dacă toate aceste

covarianțe relative sunt mult mai mici decât unitatea, atunci valoarea adevărată a mărimii F este estimată prin

$$\text{Est}_{a_F} \equiv \tilde{F} = F(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (19)$$

iar eroarea standard este evaluată prin formula Gauss a propagării erorilor

$$\sigma_F^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} \sigma_i \right) \left(\left. \frac{\partial F}{\partial x_j} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} \sigma_j \right) \rho_{i,j}, \quad (20)$$

unde coeficienții de corelație liniară sunt determinați prin relația

$$\rho_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_i(k) - \tilde{x}_i)(x_j(k) - \tilde{x}_j)}{\sqrt{\left[\sum_{k_i=1}^N (x_i(k_i) - \tilde{x}_i)^2 \right] \left[\sum_{k_j=1}^N (x_j(k_j) - \tilde{x}_j)^2 \right]}}, \quad (21)$$

iar erorile standard prin relația (15), respectiv (16). Dacă cel puțin o covarianță relativă nu este suficient de mică, atunci definim

$$F(i) \equiv F(\mathbf{x}(i)) \quad (22)$$

și utilizăm relațiile (14 – 16).

În general, o mărime este afectată atât de erori sistematice, cât și de erori întâmplătoare. Atunci eroarea totală va fi evaluată cu ajutorul formulei propagării erorilor, fiind

$$s_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \delta_x^2}. \quad (23)$$

Evident, această relație ne permite să stabilim în ce caz putem utiliza doar un singur tip de eroare: când celălalt tip este mult mai mic. Aladar, dacă efectuăm mai multe determinări și diferențele dintre ele sunt mult mai mari (mici) decât erorile de citire (sistematice), înseamnă că putem folosi doar erorile întâmplătoare (sistematice). De reținut că relațiile (20) și (23) se vor utiliza și în cazul în care unele dintre mărimile x_i sunt discrete, caz în care erorile standard ale respectivelor mărimi sunt evaluate cu relația (9) sau (10). De exemplu, să considerăm cazul vitezei de numărare a unui detector de radiații având timpul mort τ . Dacă măsurăm N_S impulsuri în prezența sursei radioactive în timpul

t_S , respectiv N_F impulsuri pentru fondul de radiații al laboratorului în timpul t_F , viteza de numărare pentru sursă va fi

$$n = \frac{N_S}{t_S - N_S \tau} - \frac{N_F}{t_F - N_F \tau}, \quad (24)$$

iar eroarea sa standard va fi

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{N_S}{t_S(t_S - N_S \tau)} + \frac{N_F}{t_F(t_F - N_F \tau)}}, \quad (25)$$

deoarece erorile relative pentru măsurarea timpului, ca și covarianțele relative sunt neglijabile, astfel încât putem utiliza distribuția Poisson. În schimb, dacă vom repeta măsurarea în condiții identice, valoarea medie și eroarea standard a acesteia vor fi calculate cu relațiile (14 – 16), deoarece viteza de numărare este o mărime continuă.

În sfârșit, să analizăm cazul determinării unui parametru din relația între două mărimi fizice. Majoritatea relațiilor întâlnite (practic toate cele întâlnite în laboratoarele didactice) sunt liniare sau pot fi aduse la această formă. Astfel, o relație de forma $y = a + b \cdot f(x)$, unde a și b sunt parametrii care trebuie să fie determinați, iar $f(x)$ este o funcție cunoscută (complet determinată de valoarea măsurată a lui x) poate fi adusă la forma liniară prin substituția $X = f(x)$. O relație de forma $y = a \exp(bx)$ poate fi liniarizată prin logaritmare, cu ajutorul substituției $Y = \ln y$ (graficul $Y = Y(x)$ constituie o reprezentare în scară (simplu) logaritmică, vezi capitolul II). O relație de forma $y = a \cdot x^b$ poate fi liniarizată tot prin logaritmare, cu ajutorul substituțiilor $Y = \ln y$ și $X = \ln x$ (graficul $Y = Y(X)$ constituie o reprezentare în scară dublu logaritmică, vezi capitolul II). În consecință, vom analiza modul de determinare a parametrilor m și n din relația

$$y = mx + n, \quad (26)$$

unde $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ reprezintă panta și $n = y|_{x=0}$ ordonata la origine (abscisa la

origine fiind, evident, $x|_{y=0} = -\frac{n}{m}$).

Să considerăm setul de perechi de date experimentale $\{x(i), y(i) | i = \overline{1, N}\}$ și să definim expresia

$$F(m, n) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y(i) - mx(i) - n)^2. \quad (27)$$

Se observă că această expresie reprezintă pătratul erorii standard pentru o valoare experimentală a mărimii y în raport cu dreapta (26). În aceste condiții,

cea mai bună alegere pentru parametrii m și n este cea care minimizează funcția $F(m,n)$. Derivând funcția în raport cu m și n și anulând derivatele, obținem

$$m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{x,y}, \quad n = \tilde{y} - m\tilde{x}, \quad (28)$$

unde valorile medii, erorile standard și coeficientul de corelație liniară sunt calculate cu relațiile (14), (15) și (21). De reținut că valoarea coeficientului de corelație liniară este un indiciu asupra corectitudinii utilizării ecuației (26). Într-adevăr, dacă modulul coeficientului este mai mic decât 0,5, mărimile x și y sunt practic necorelate, iar dacă modulul coeficientului este cuprins între 0,5 și 0,9, mărimile x și y sunt corelate, dar nu liniar. O bună corelație liniară este caracterizată de un modul al coeficientului de corelație mai mare decât 0,95.

Dacă înlocuim valorile parametrilor m și n calculate cu expresiile (28) în relația (27), vom obține eroarea standard a oricărei valori a mărimii y dată de ecuația (26), în particular a ordonatei la origine n :

$$\sigma_n = \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{x,y}^2} = \sqrt{\sigma_y^2 - m^2 \sigma_x^2} \quad (29)$$

(evident, eroarea standard a abscisei la origine va fi $\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{x,y}^2}$). Pentru a determina eroarea standard a pantei m , să observăm că, dacă împărțim ecuația (26) prin x (cu eliminarea din setul valorilor experimentale a perechii corespunzând valorii nule pentru x , dacă această valoare a fost măsurată), obținem tot o relație liniară, între $\frac{1}{x}$ și $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = n \frac{1}{x} + m, \quad (30)$$

în care rolul parametrilor m și n este inversat, deci

$$\sigma_m = \sigma_y \frac{1}{x} \sqrt{1 - \rho_{\frac{1}{x}, \frac{y}{x}}^2} = \sqrt{\sigma_y^2 - n^2 \sigma_x^2} \frac{1}{x}. \quad (31)$$

În cazul în care relația analizată nu poate fi redusă la o formă liniară, parametrii necunoscuți se determină cu ajutorul calculatoarelor, utilizând unul dintre numeroasele programe de fitare existente (vezi de exemplu D. Iordache, *Noțiuni și metode generale ale fizicii*, Atelierul Poligrafic I. P. B., București, 1980; I. M. Popescu, D. Iordache, Ș. Tudorache, M. Stan, V. Fara, *Probleme rezolvate de fizică*, Vol. I, Editura Tehnică, București, 1984).

O situație mai specială o reprezintă determinarea poziției unui extrem. Dacă avem o relație $y = f(x)$ relativ lent variabilă și, într-un domeniu restrâns

de valori pentru x , un extrem net pentru y , acesta poate fi bine descris de distribuția de probabilitate Lorentz

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\pi\sigma_x} \cdot \frac{4\sigma_x^2 x^2}{(x^2 - a_x^2)^2 + 4\sigma_x^2 x^2}, \quad (32)$$

unde $x \geq 0$ și $a_x \gg \sigma_x > 0$. Se poate verifica imediat că, la fel ca în cazul distribuției gaussiene, a_x este valoarea cea mai probabilă pentru variabila x

($\mathcal{P}(a_x) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{\pi\sigma_x}$), limitele domeniului de valori pentru x sunt cele mai

improbabile (de fapt imposibile, $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(\infty) = \mathcal{P}_{\min} = 0$) și, în plus, că ecuația

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\mathcal{P}_{\max} + \mathcal{P}_{\min}}{2} = \frac{1}{2\pi\sigma} \quad \text{admite soluțiile} \quad x_{1,2} = \sqrt{a_x^2 + \sigma_x^2} \pm 2\sigma_x,$$

satisfăcând condiția $\frac{|x_1 - x_2|}{2} = \sigma_x$. Deci, în această situație, eroarea standard a extremului funcției $y = f(x)$ este dată de semidiferența dintre pozițiile punctelor pentru care este satisfăcută egalitatea

$$f(x) = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, \quad (33)$$

unde $y_{\max} - y_{\min}$ reprezintă variația funcției în zona extremului considerat.

3. Erorile grosolane sunt cauzate de neatenției sau defecțiuni accidentale și trebuie eliminate din calcule. În general, aceasta este ușor de efectuat, deoarece valorile respective diferă masiv de celelalte. Totuși, este bine să definim criteriile precise pentru eliminarea erorilor grosolane.

Să considerăm cazul unui parametru continuu x . Conform distribuției normale, probabilitatea de a obține în cadrul unei măsurători o valoare care să nu difere de valoarea adevărată a_x cu mai mult de $\zeta_x \sigma_x$ ($\zeta_x = \frac{x - a_x}{\sigma_x}$

reprezentând abaterea relativă a valorii x) este dată de integrala probabilităților

$$\Phi(\zeta_x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\zeta_x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (34)$$

și se numește nivel de încredere. Cu titlu informativ, $\Phi(1) = 0,6827$, $\Phi(2) = 0,9545$ și $\Phi(3) = 0,9973$.

Alegerea intervalului de încredere pentru o valoare individuală $x(i)$, definit ca $[\tilde{x} - \zeta_{x(i)} s_{x(i)}, \tilde{x} + \zeta_{x(i)} s_{x(i)}]$, unde $s_{x(i)}$ este eroarea totală afectând valoarea individuală $x(i)$, dată de relația (23), se face pe baza condiției

$$\Phi(\zeta_{x(i)}) + \frac{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}}{x(i)} = 1 \quad (35)$$

(dacă $x(i) = 0$, semilărgimea intervalului de încredere corespunzător, $\zeta_{x(i)} s_{x(i)}$, se înlocuiește cu media semilărgimilor valorilor individuale vecine). Atunci, dacă valoarea individuală $x(i)$ nu se încadrează în intervalul de încredere, ea este o eroare grosolană și trebuie eliminată din calcule.

Evident, ecuația (35) este o ecuație transcendentă, putând fi rezolvată numai pe calculator. Atunci când nu dispunem de un calculator, putem alege o valoare convențională pentru nivelul de încredere și deci pentru toate intervalele de încredere. De obicei, se alege pentru abaterea relativă valoarea $\zeta_{x(i)} = 3$, criteriul de eliminare a erorilor grosolane astfel obținut fiind cunoscut sub numele de criteriul 3σ .

O dată eliminate erorile grosolane, se recalculează valoarea medie și eroarea standard și se reaplică criteriul de eliminare al erorilor grosolane. Procesul se repetă până când toate valorile rămase satisfac criteriul.

În cazul corelațiilor liniare, condiția ca integrala densității de probabilitate (17) să dea nivelul de încredere ales este

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - x(i)}{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}} \right)^2 + \left(\frac{y - y(i)}{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}} \right)^2 - 2\rho_{x,y} \left(\frac{x - x(i)}{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}} \right) \left(\frac{y - y(i)}{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}} \right) = \\ = 1 - \rho_{x,y}^2, \end{aligned} \quad (36)$$

unde abaterile relative pentru x și y sunt evaluate cu relația (35) (sau definite de criteriul 3σ), iar erorile totale ale valorilor individuale țin seama de faptul că un punct experimental $(x(i), y(i))$ poate fi măsurat de mai multe ori, în condiții identice. Ecuația (36) definește o elipsă de încredere. Dacă punctul de coordonate $(x(i), y(i))$ se găsește pe dreapta (26), aceasta trebuie să intersecteze elipsa de încredere. Condiția de intersecție se reduce, evident, la o ecuație de gradul doi, care admite soluții reale dacă și numai dacă discriminantul său este pozitiv, deci dacă

$$\left(\frac{y(i) - mx(i) - n}{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}} \right)^2 \leq 1 - \rho_{x,y}^2 \frac{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}}{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \left(2 - \frac{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}}{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right), \quad (37)$$

unde σ_x , σ_y sunt erorile pentru întregul set de puncte experimentale, date de relația (15). În particular, dacă

$$\frac{\zeta_{x(i)} s_{x(i)}}{\sigma_x} \approx \frac{\zeta_{y(i)} s_{y(i)}}{\sigma_y} \equiv \zeta(i), \quad (38)$$

condiția (37) devine

$$|y(i) - mx(i) - n| \leq \zeta(i) \sigma_n, \quad (39)$$

iar dacă, în plus, definim abaterea relativă $\zeta_{y(i)}$ prin condiția

$$\zeta_{y(i)}^{-2} + \rho_{x,y}^2 = 1 \quad (40)$$

(de exemplu, condiția $\zeta_{y(i)} = 3$ este echivalentă cu un coeficient de corelație liniară $\rho_{x,y} = 0,9428$) condiția (37) devine

$$|y(i) - mx(i) - n| \leq s_{y(i)}, \quad (41)$$

condiție care se poate generaliza imediat pentru o dependență arbitrară $y = f(x)$, în forma

$$|y(i) - f(x(i))| \leq s_{y(i)}. \quad (42)$$

II. PREZENTAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Prezentarea rezultatelor experimentale într-un referat se face ținând seama de anumite reguli:

1. **Toate** datele măsurate **trebuie** să apară în referat.
2. **Toate** datele măsurate **trebuie** să fie exprimate în unități ale **Sistemului Internațional**, în multipli sau submultipli ai acestora, sau în unități tolerate, în forma $x = \{x\}\langle x \rangle$, unde x este mărimea fizică, $\{x\}$ este valoarea sa numerică, iar $\langle x \rangle$ este unitatea sa de măsură. Dacă este necesară utilizarea unui format exponențial pentru valoarea numerică, se va scrie o singură cifră nenulă înaintea virgulei zecimale. De exemplu, valoarea $U = 0,00006563 \text{ V}$ se va scrie în forma $U = 6,563 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ sau $U = 65,63 \mu\text{V}$.
3. **Toate** seturile de date experimentale, ca și cele calculate pentru fiecare punct experimental în parte, se prezintă sub formă de **tabele**. Capul de tabel trebuie să cuprindă pentru fiecare linie (coloană) notația mărimii fizice și, în paranteză, unitatea de măsură folosită, în forma: $x (\langle x \rangle)$. În cazul utilizării formatului exponențial, se va introduce și ordinul de mărime. Pentru exemplul anterior, se va scrie fie $U (10^{-7} \text{ V})$, respectiv $10^7 U (\text{V})$, valoarea numerică corespunzătoare din tabel fiind 6,563, fie $U (\mu\text{V})$, valoarea numerică corespunzătoare fiind 65,63.
4. În cazul în care scala instrumentului de măsură utilizat nu este gradată direct în unități SI sau în multipli sau submultipli ai acestora, în tabel vor apare două linii (coloane), prima cu valorile măsurate exprimate în **diviziuni**, iar a doua cu valorile exprimate în **unități SI**. Această linie (coloană) suplimentară poate lipsi doar atunci când dimensiunea mărimii respective nu intervine direct în calculul rezultatelor finale.

5. Pentru **toate** instrumentele utilizate, se va menționa în referat **factorul de scală**. Acești factori sunt necesari nu numai pentru transformarea diviziunilor în valori SI, ci și pentru evaluarea erorilor sistematice.
6. **Pentru toate rezultatele obținute se efectuează calculul erorilor.** Rezultatele finale se exprimă în forma $x = (\{\tilde{x}\} \pm \{s_{\tilde{x}}\}) \langle x \rangle$. Numărul de zecimale calculat este determinat de condiția ca ultimele două să fie afectate de eroare. De exemplu, dacă valoarea obținută, în unități SI, este 745,336286735, iar valoarea erorii, în aceleași unități, este 0,00891467668, rezultatul va fi prezentat în forma rotunjită $745,3363 \pm 0,0089$.
7. **Pentru toate corelațiile studiate se efectuează grafice pe hârtie milimetrică.** Aceste grafice trebuie să respecte următoarele reguli:
 - i. Dimensiunea unui grafic trebuie să fie **minimum** A5 (jumătate de coală A4), iar raportul lungime/lățime să se încadreze între 2/3 și 3/2.
 - ii. La capetele axelor de coordonate se trec mărimile fizice și unitățile de măsură, la fel ca în cazul capetelor de tabel.
 - iii. Axele nu trebuie neapărat să se intersecteze în origine. Dacă, de exemplu, valorile experimentale sunt cuprinse între 23,89 și 24,44, axa corespunzătoare trebuie să cuprindă valori între 23,85 și 24,45.
 - iv. Pe axe *nu se trec valorile experimentale*. Acestea apar în tabele. Pe axe se trec doar valori rotunde, permițând citirea ușoară a oricărui punct de pe grafic. În exemplul anterior, pe axe se vor trece valori în pași de 0,05 sau 0,1 (adică 23,85; 23,90; 23,95 etc. sau 23,85; 23,95; 24,05 etc.).
 - v. Dacă este necesar, fie pentru liniarizarea unei corelații, fie pentru că mărimea reprezentată variază cu mai multe ordine de mărime, se vor utiliza reprezentări în scară logaritmică simplă (o singură mărime logaritmată) sau dublă (ambele mărimi logaritmăte). Aceasta înseamnă că pe axă se trece mărimea x (cu unitatea sa și valorile sale rotunjite), dar distanțele dintre aceste valori se iau proporționale cu logaritmul raportului lor (deci pe axă se măsoară $\log x$).
 - vi. Pe grafic apar **toate** punctele experimentale (inclusiv erorile grosolane), cu bare de erori (bare verticale, mergând de la $y(i) - s_{y(i)}$ la $y(i) + s_{y(i)}$). Curba **nu trebuie** să treacă prin puncte, ci prin elipsele de încredere (sau, în primă aproximație, prin barele de erori), cu excepția punctelor (barelor de erori) corespunzând erorilor grosolane. Singurele grafice care trebuie să treacă prin **toate** punctele (barele de erori), **fără** teste pentru eliminarea erorilor grosolane, sunt curbele de etalonare.
 - vii. În cazul reprezentărilor liniare, **nu se va confunda panta dreptei, m , cu tangenta unghiului format de aceasta cu abscisa, $tg\alpha$** . Panta

drepte este o mărime fizică, cu unitate de măsură și depinzând doar de rezultatele experimentale, în timp ce tangenta unghiului format de dreaptă cu abscisa este un număr adimensional și depinde de scara de reprezentare aleasă pentru grafic.

- viii. Dacă relația liniară reprezintă doar o primă aproximație, valabilă în special pentru anumite valori ale parametrului de pe abscisă (de exemplu, pentru valori mici ale acestuia) se reprezintă curba experimentală, iar parametrii dreptei căutate sunt dați de cei ai tangentei la curbă în domeniul de maximă precizie (în exemplul sugerat, tangenta în origine). Pentru evaluarea erorilor, se vor efectua și se vor reprezenta grafic mai multe seturi de măsurători, calculându-se apoi media și eroarea standard a pantei și/sau ordonatei (abscisei) la origine.
- ix. Rezultatele evaluate pe baza graficelor (pante, ordonate, respectiv abscise ale anumitor puncte) **nu** se trec pe grafic, ci în textul referatului, împreună cu celelalte rezultate.
- x. Graficul unei mărimi discrete **nu** este o curbă continuă, ci o histogramă (un grafic în trepte).
- xi. Graficele se desenează cu creionul, pentru a putea fi ușor corectate.
- xii. Dacă pe un grafic apar mai multe curbe, ele se desenează cu culori diferite (inclusiv punctele experimentale), pentru a putea fi ușor deosebite, iar într-un colț al graficului se trece o *legendă* (câte un scurt segment de fiecare culoare, cu menționarea alături a curbei (valorilor parametrilor) reprezentată în acea culoare).