LE CALCUL DES ERREURS

Toutes les expériences sont affectées des erreurs (grossières, systématiques ou accidentelles).

Les erreurs grossières provient du manque d'attention, de défauts des appareils ou de l'utilisation d'une méthode erronée.

Les erreurs systématiques sont réparties dans le même sens; elles restent constantes quand les conditions d'experience sont invariables, ainsi qu'elles ne sont pas éliminées en répétant l'expérience.

Elles provient aussi de l'imperfection des appareils, de l'imperfection de perception, etc.

Les erreurs grossières et systématiques peuvent être évitées en utilisant des appareils performants, en corrigeant les méthodes de mesure, etc.

Les erreurs accidentelles (ou incidentelles) sont inévitables. Si nous répétons N fois une expérience dans les mêmes circonstances, les résultats serront $x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (n \le N)$ et ils peuvent être différents de la valeur véritable a.

L'erreur réelle (ou absolue):

$$\Delta x_i = x_i - a \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

sera positive ou négative.

Pour les N opérations:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i - Na \tag{2}$$

d'où

$$a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \tag{3}$$

Si $N \to \infty$ le dernier terme s'annule (conformément au principe probabiliste) et

$$a = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{4}$$

En pratique, on ne peut pas réaliser un nombre si grand des mesurages et on obtient seulement un *estimat* de la valeur véritable, le valeur moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{5}$$

Grandeurs physiques qui varient continuellement.

La loi normale (Gauss)

Soit une grandeur physique x dont la valeur peut être n'importe quel nombre réel et soit $\mathrm{d}\mathcal{P}$ la probabilité que la valeur être comprise dans l'interval $x \div x + \mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = P(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

où $P(x)$ est la loi de probabilité ou la densité de probabilité ou la fonction de répartition.

Des considerations théorique montrent que la plus part des grandeurs physique obeissent à la loi normale (ou la loi de Gauss) dont la fonction de répartition est:

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

où

$$A=\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} xP(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

est l'espérance mathématique de la variable x (la valeur véritable) et

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)^2 P(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

est la dispersion.

Dans les expériences habituelles on n'accède pas à un nombre infini des valeurs pour x et les seules valeurs accessibles sont les *estimations*

$$estA=\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{10}$$

et

$$est\sigma^2=s^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2}{N-1} \tag{11}$$

La valeur moyenne $\overline{x}$ est elle même fluctuante et soumis à la loi normale (Gauss), ainsi que

$$s_{\overline{x}}^2=\frac{s^2}{N} \tag{12}$$

En conclusion, le résultat d'une expérience de mesurage d'une variable x sera:

$$x=\overline{x}\pm s_{\overline{x}} \tag{13}$$

Pour les grandeurs physiques determinées indirectement par une formule

$$X = f(x, y, \ldots) \tag{14}$$

on a trois situations

a) Les grandeurs $x, y\ldots$, directement mesurées, sont indépendantes, gaussian distribuées et avec une petit dispersion:

Alors,

$$\overline{X} = f(\overline{x}, \overline{y}, \ldots) \tag{15}$$

et

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x=\overline{x}\\ y=\overline{y}\ldots}} s_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x=\overline{x}\\ y=\overline{y}\ldots}} s_{\overline{y}}^2 + \ldots\ldots} \tag{16}$$

(la loi de la propagation des erreurs).

b) Les grandeurs $x, y, \ldots$ directement mesurées sont soit dépendantes l'une de l'autre, soit indépendantes mais avec des grandes dispersions. Dans ce cas, chaque mesurage $i = 1, \ldots, N$ conduit à une valeur

$$X_i = f(x_i, y_i \ldots) \quad i = 1, \ldots, N \tag{17}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum X_i \tag{18}$$

$$s_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N(N-1)}} \tag{19}$$

c) Les grandeurs physiques sont obtenues d'un graphique.

On mesure des paires des valeurs (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, N)$ qui, représentées dans un système des axes (y, x), donnent une courbe; soit-elle cette courbe une droite

$$y = mx + n \tag{20}$$

où les paramètre m et n contient des grandeurs physique d'intérêt. Pour obtenir les estimations de m et n, nous pouvons utiliser la *méthode des moindre carrés*:

$$m^* = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{21}$$

$$n^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{22}$$