

**UNIVERSITATEA "POLITEHNICĂ" DIN BUCUREȘTI
DEPARTAMENTUL DE FIZICĂ**

**LABORATORUL DE FIZICĂ GENERALĂ
BN - 122 B**

**VERIFICAREA DISTRIBUȚIEI (REPARTIȚIEI) NORMALE
A ERORILOR DE MĂSURĂ.
DISTRIBUȚIA GAUSS**

2004 - 2005

VERIFICAREA DISTRIBUȚIEI (REPARTIȚIEI) NORMALE A ERORILOR DE MĂSURĂ. DISTRIBUȚIA GAUSS

1. Scopul lucrării: verificarea proprietăților distribuției Gauss a erorilor de măsură aleatorii ce afectează rezultatele măsurătorilor directe ale unor mărimi.

2. Teoria lucrării

Rezultatele unui mare număr de determinări experimentale directe și independente asupra unei mărimi x care variază continuu se supun legii de distribuție Gauss, pentru care funcția de distribuție este de forma:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1)$$

Pentru studiul proprietăților funcției de distribuție Gauss se consideră N evenimente reprezentate prin n măsurători efectuate distinct de m experimenatori, care efectuează aceeași măsurătoare (în cadrul lucrării se măsoară lungimi, diametrul exterior, diametrul interior, etc cu precizii diferite). Produsul

$$N = n m \quad (2)$$

care este numărul total de evenimente studiate, poartă numele de populație totală. Numărul de rezultate măsurate de fiecare experimenator în parte va fi numit *probă*. Numărul total de probe este m .

Experimenatorul i efectuează n măsurători independente pentru a realiza proba i și obține valorile $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$. Valoarea medie a rezultatelor sale este

$$\bar{x}_i = \frac{x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{ni}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ji} \quad (3)$$

Fiecare din cei m experimenatori vor obține câte o medie:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_m.$$

Valoarea medie a tuturor rezultatelor măsurătorilor va fi egală cu:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \bar{x}_l \quad (4)$$

Erorile standard asupra valorilor individuale din șirul de n măsurători (notat cu σ_{ai}) și respectiv pentru cele N măsurători (notat cu σ_b) sunt date de relațiile:

$$S_n(x_i) = \sqrt{\sigma_{ai}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_{ai})^2}{n-1}} \quad (5)$$

$$S_N(x_i) = \sqrt{\sigma_b^2} = \sqrt{\frac{(x_{11} - \bar{x}_b)^2 + \dots + (x_{nm} - \bar{x}_b)^2}{N-1}} \quad (6)$$

Regula lui Simpson permite modificarea numărului de apariții f'_j astfel încât din fiecare histogramă să se obțină, prin mediere, o curbă continuă, conform relației:

$$f'_j = \frac{1}{4}(f_{j-1} + 2f_j + f_{j+1}) \quad (7)$$

Curba pe care se așează aceste puncte are forma matematică indicată în (1); denumită distribuție Gauss sau distribuție normală, ea are următoarele caracteristici:

1. \bar{x} reprezintă valoarea lui x în care $f(x)$ este maxim, ceea ce coincide cu media tuturor valorilor pentru această distribuție.

2. $\sqrt{\sigma^2}$ este abaterea standard.

3. Pentru $(x - \bar{x}) = \pm\sigma$ există un punct de inflexiune al curbei.

4. Reprezentarea grafică a valorilor $\ln f(x)$ în funcție de $(x - \bar{x})^2$ este o dreaptă a cărei pantă este $[-1/2\sigma^2]$.

5. Aria de sub curbă între limitele $\bar{x} - 0,675\sigma$ și $\bar{x} + 0,675\sigma$ este 50% din aria totală; între $\bar{x} - \sigma$ și $\bar{x} + \sigma$ este 68% din aria totală; între $\bar{x} - 3\sigma$ și $\bar{x} + 3\sigma$ este 99,7% din aria totală.

Abaterile standard pentru probe (σ_a) și pentru repartiția probelor (σ_m) sunt legate prin relația:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

Rezultă:

$$\bar{x}_b = \bar{x}_a \pm \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

Deci, media populației totale se poate determina din măsurătorile făcute pe una singură dintre cele m probe. Se observă că abaterea standard se micșorează cu cât numărul n de experimente dintr-o probă este mai mare.

3. Montaj experimental

La masa de lucru se află o cutie cuprinzând un set de N piese și instrumente de măsurare a lungimilor cu precizia de 0,1 mm (șubler) și 0,01 mm (micrometru).

4. Modul de lucru

Fiecare student va măsura lungimea sau diametrul unui număr n de piese.

5. Prelucrarea datelor experimentale

5.1. Rezultatele celor N măsurători se trec în m tabele de forma:

Tabelul 1.

f_a	
x [mm] (n probe)	

unde f_a reprezintă frecvența de apariție a fiecărei valori a lui x .

5.2. Pentru fiecare tabel și pentru populația totală se construiește o histogramă a frecvenței f_a de apariție a unei anumite valori-cu un interval de toleranță de 0,5mm - funcție de valorile măsurate x .

5.3. Se construiește o histogramă asemănătoare și pentru populația totală (f_b funcție de valorile măsurate x).

5.4. Se calculează și se reprezintă grafic funcție de x , valorile mediate date de relația (7): $f'_j = f'_j(x)$.

5.5. Se calculează valorile \bar{x}_{a_i} și σ_{a_i} pentru cele m histograme, precum și valorile \bar{x}_b și σ_b pentru histograma tuturor rezultatelor.

5.6. Din curba obținută la punctul 5.4. se determină \bar{x} ca fiind valoarea lui x corespunzătoare maximului curbei; se determină de asemenea σ din relația:

$$x_{1,2} - \bar{x} = \pm \sigma \sqrt{2 \ln 2} \quad (10)$$

unde $x_{1,2}$ sunt abscisele punctelor la semiînălțimea curbei.

5.7. Se reprezintă grafic logaritmul natural al valorilor lui f'_j funcție de valorile lui $(x - \bar{x})^2$ și se determină panta dreptei obținute. Se compară valorile obținute la punctele 5.5; 5.6; 5.7.

5.8. Rezultatul final se exprimă sub forma:

$$\bar{x} = \bar{x}_a \pm \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

Întrebări

1. În ce condiții rezultatele mai multor măsurători experimentale efectuate asupra unei mărimi x se supun legii de distribuție Gauss?
2. Care este expresia densității de probabilitate $P(x)$ în cazul distribuției Gauss și care sunt semnificațiile mărimilor care intervin?

Referatul va conține: un rezumat al teoriei, tabelele de date, histogramele și graficul valorilor mediate date de relația (7), determinarea din grafic a valorilor lui \bar{x} și σ , graficul $\ln f_j = f(x)$ și calculul pantei, compararea rezultatelor obținute, răspunsurile la întrebări.

Observații:

- Reunirea datelor culese de m observatori diferiți pentru obținerea populației totale nu afectează rezultatele, deoarece precizia instrumentului de măsură este de 0,1mm, iar intervalul care a fost considerat în lucrare este de 0,5mm.
- La apariția unei defecțiuni a aparatelor, studentul are obligația să atenționeze cadrul didactic.