

# STUDIUL MISCARII OSCILATORII CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE

## 1. Scopul lucrării:

### I. Analiza oscilațiilor libere:

1. determinarea momentului de torsiune prin metoda statică și prin metoda dinamică;
2. determinarea frecvenței proprii a oscilatorului liber amortizat și a perioadei proprii de oscilație, pentru diferite valori ale amortizării și determinarea momentului de inerție al pendulului;
3. determinarea coeficientului de amortizare, a timpului de relaxare și a decrementului logaritmic.

### II. Analiza oscilațiilor forțate:

1. trasarea curbei de rezonanță a oscilatorului forțat pentru diferite amortizări;
2. determinarea frecvenței de rezonanță;
3. analiza diferenței de fază dintre oscilator și forța exterioară pentru diferite frecvențe de forțare (foarte mici sau foarte mari comparativ cu frecvența de rezonanță).
4. determinarea factorului de calitate al oscilatorului pentru diferite amortizări.

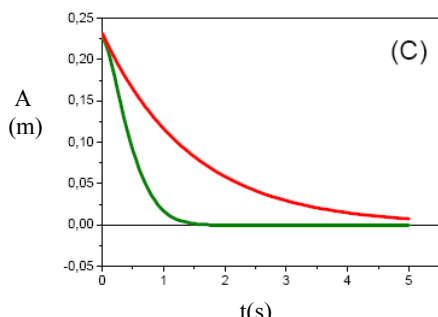
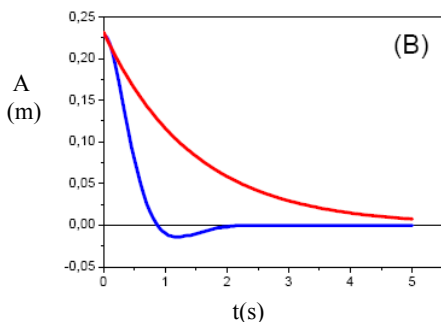
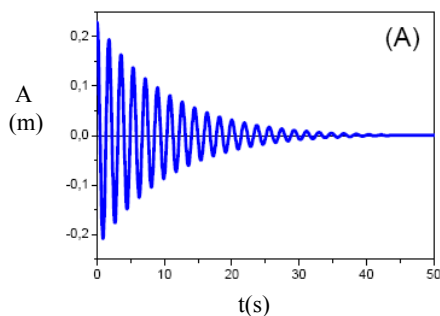


Fig. 1 Reprezentarea grafică a amplitudinii (A) pentru tipuri diferite de mișcări amortizate: (A) subamortizată; (B) supraamortizată; (C) amortizată critic.

## 2. Principiul fizic

Mișcarea unui pendul de torsiune este descrisă de ecuația diferențială:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_{fr} \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0 \quad (1)$$

unde  $I$  – momentul de inerție;  $\varphi$  - unghiul de rotație;  $k_{fr}$  – constanta de frecare;  $C$  – constanta de torsiune.

Folosind relațiile uzuale:  $\omega_0^2 = \frac{C}{I}$  - pulsația proprie și  $\delta = \frac{k_{fr}}{2I}$  - coeficient de amortizare, ecuația devine:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

În rezolvarea acestei ecuații diferențiale de ordinul doi, liniare, intervin trei situații distincte, în funcție de tipurile de soluții ale ecuației caracteristice:

- cazul A.  $\omega_0^2 > \delta^2$  (regim sub-amortizat)

Soluția :

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos \omega t \quad (3)$$

cu  $\varphi_0$  - amplitudinea unghiulară la momentul inițial și

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  - pulsația oscilațiilor amortizate indică o

descreștere exponențială a amplitudinii. Timpul după care amplitudinea scade de  $e$ -ori se numește **timp de relaxare**:

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t + \tau)} = \frac{1}{e} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\delta}. \quad (4)$$

De asemenea, în acest regim (reprezentat în Fig.1 (A)) se observă că raportul valorilor amplitudinilor după o perioadă rămâne constant pentru o amortizare dată. Logarithmul acestui

raport se numește **decrement logaritmic** și se definește conform relației:

$$D = \ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = \delta T. \quad (5)$$

- Cazul B:  $\omega_0^2 < \delta^2$  (regim supra-amortizat). Soluția este aperiodică, de forma:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \quad (6)$$

Sistemul revine asimptotic spre poziția de echilibru după o singură oscilație. Această comportare este ilustrată de cazul (B) din Fig.1, curba de sus. Revenirea este cu atât mai încetă cu cât constanta de amortizare este mai mare.

- Cazul C:  $\omega_0^2 = \delta^2$  (regim supra-amortizat critic). Soluția este:

$$\varphi = (\varphi_0 + Bt)e^{-\delta t}. \quad (7)$$

Sistemul revine în poziția inițială de unde nu mai pleacă (cazul (C) din Fig.1). Acest caz are importanță practică deoarece sistemul ajunge în timpul cel mai scurt în poziția de echilibru.

Pentru ca mișcarea să nu se amortizeze în timp, fenomenele de frecare responsabile de disiparea energiei trebuie compensate din exterior, prin furnizarea unei energii suplimentare. Acest lucru se poate realiza prin aplicarea unei forțe periodice ce produce un moment de torsiune periodic asupra pendulului:

$$M = M_0 \cos \Omega t. \quad (8)$$

Ecuția de mișcare devine:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = f \cos \Omega t \quad (9)$$

unde  $f_0 = \frac{M_0}{I}$ .

După regimul tranzitoriu (mai scurt sau mai lung în funcție de coeficientul de frecare), componenta amortizată (reprezentată de soluția exponențială) devine neglijabilă și se instalează regimul staționar, cu soluția de forma:

$$\varphi(t) = A \cos(\Omega t - \phi). \quad (10)$$

Amplitudinea  $A$  depinde de frecvența forței exterioare conform relației<sup>1</sup>:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}, \quad (11)$$

care poate fi scrisă și sub forma:

$$A = \frac{f_0 / \omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2 \frac{\delta}{\omega_0} \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (12)$$

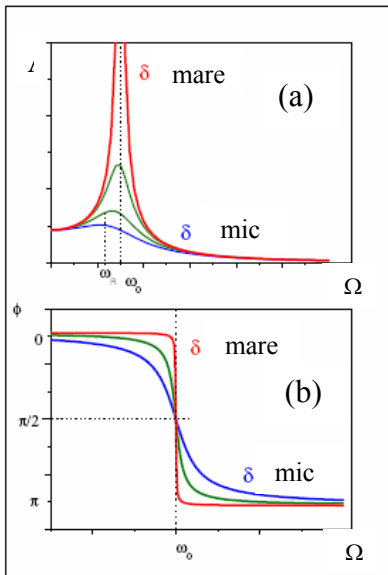


Fig. 2 Dependenta de frecvența forței exterioare a (a) amplitudinii; (b) a diferenței de fază

Se pot formula următoarele concluzii:

- $A$  crește direct proporțional cu valoarea forțării exterioare,  $f_0$ ;
- $A$  atinge o valoare maximă (fenomen numit rezonanța amplitudinii<sup>2</sup>) pentru o anumită valoare a frecvenței forțării, care se determină din relația:  $dA/d\Omega = 0$ . Se obține frecvența de rezonanță  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ . Pentru amortizări mici, relația se poate aproxima sub forma  $\Omega_r \cong \omega_0$ .
- $A$  scade odată cu creșterea valorii amortizării  $\delta$ ;
- În caz ideal, pentru amortizare nulă ( $\delta = 0$ ),  $A \rightarrow \infty$  dacă  $\Omega_r = \omega_0$ .

<sup>1</sup> Din verificarea matematică a faptului că (10) este soluție pentru ecuația (9).

<sup>2</sup> Acest fenomen este diferit de cel al rezonanței energiei, care implică un transfer maxim al energiei atunci când frecvența forței exterioare coincide cu frecvența de rezonanță. Așadar, rezonanța amplitudinii și rezonanța energiei se obțin la valori diferite ale frecvenței de forțare. Pentru frecări mici, cele două frecvențe de rezonanță coincid.

Pentru diferența de fază apărută între mișcarea oscilatorului și forța exterioară se obține relația:

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{2\delta\omega_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (13)$$

Rezultă:

$$\phi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (14)$$

ceea ce înseamnă că întârzierea în mișcarea oscilatorului depinde de coeficientul de amortizare și de frecvența forței exterioare, și anume:

- Pentru  $\omega_0 \gg \Omega \Rightarrow \phi_0 \rightarrow 0$ , adică pendulul oscilează aproape în fază cu sursa;
- Pentru  $\omega_0 \ll \Omega \Rightarrow \phi_0 \rightarrow \pi$ , adică pendulul oscilează aproape în opoziție de fază (antifază) cu sursa;
- Pentru  $\omega_0 = \Omega \Rightarrow \phi_0 \rightarrow \pi/2$ .

### 3. Dispozitivul experimental

Oscilatorul mecanic numit pendul de torsiune Pohl constă dintr-o roată metalică, cu moment de inerție  $I$ , cuplată de un resort elicoidal, având constanta de torsiune  $C$ . Atunci când resortul este deformat cu unghiul  $\varphi$ , apare un moment de torsiune care tinde să-l readucă la forma inițială, acționând, evident, în sens invers creșterii unghiului de deformare:

$$M_{el} = -C\varphi. \quad (15)$$

Datorită fenomenului de frecare, legat de cuplajele mecanice existente sau alte cauze, există o disipare a energiei totale a oscilatorului, astfel că amplitudinea oscilațiilor libere scade în timp. De cele mai multe ori (în special în cazul mișcării cu viteze mici), se consideră că momentul forțelor de frecare este proporțional cu viteza, conform relației :

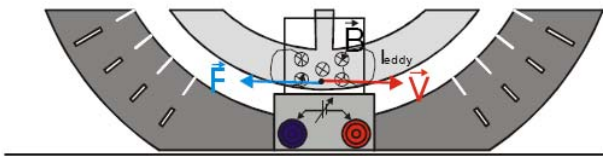


Fig. 3 Modul de generare al momentului de frânare

$$M_{fr} = -k_{fr} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (16)$$

În cazul oscilatorului de torsiune Pohl, momentul de frecare poate fi controlat prin deplasarea roții metalice în interiorul unui electromagnet. Electronii liberi din metal, acționați de forța Lorentz, se vor deplasa în interiorul și în afara câmpului electromagnetic, generând curenți circulari închiși, numiți curenți turbionari. Partea roții metalice în care apar acești curenți circulari este echivalentă cu un conductor în mișcare asupra căruia, câmpul magnetic acționează cu forța  $F$  orientată în sens contrar sensului de mișcare a roții ( $V$ ) (Fig.3). Această forță determină momentul de frânare, proporțional cu valoarea câmpului magnetic deci a intensității curenților electrici prin bobină ( $I$ ).

### 4. Modul de lucru

Se urmărește realizarea montajului experimental arătat în Fig. 3A. La începerea măsurătorilor se aduce reperul notat (3a) în poziția de zero a scării marcate pe roată, prin rotirea reperului de pe sistemul bielă-manivelă (3e).

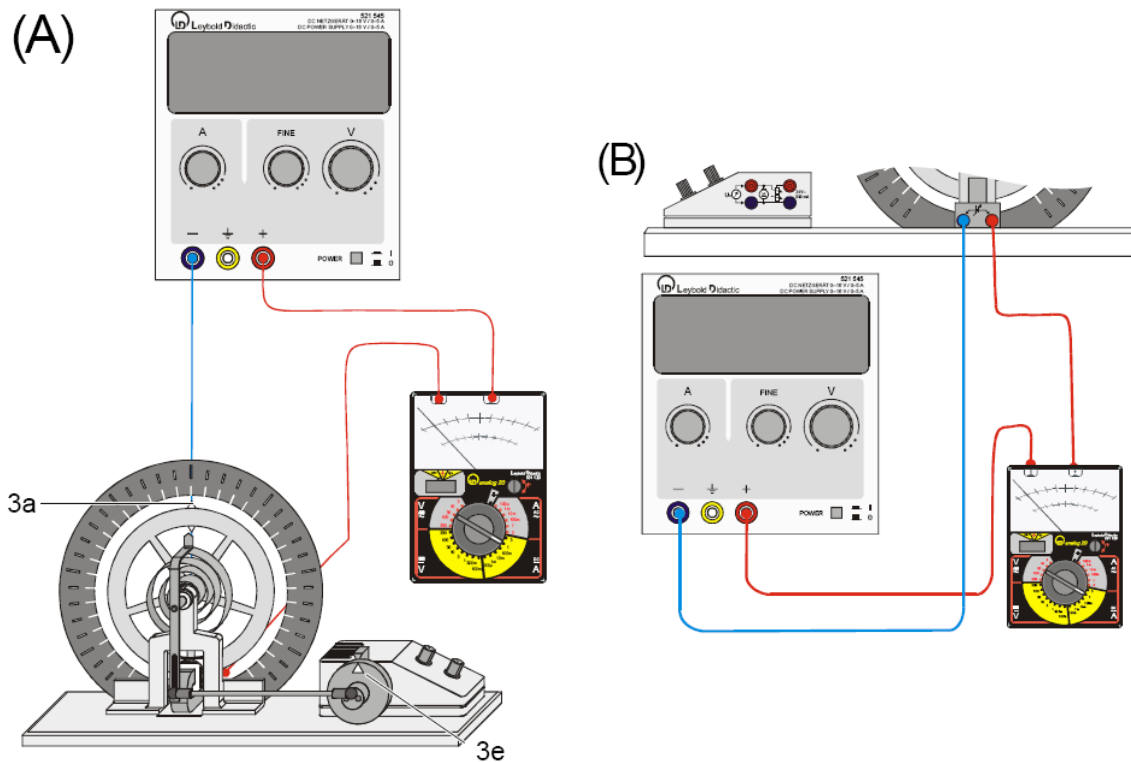


Fig.4 Montajul experimental (A) cu detalii asupra conexiunilor electrice (B)

- ATENTIE !
- Nu depășiți valoarea de 1.8 A pentru curenții din electromagnet!
- Evitați supraîncălzirea bobinelor prin măsurători prea lungi la valori ale curenților mai mari de 1A

#### A. Analiza oscilațiilor amortizate

1. determinarea constantei de torsiune prin metoda statică;
  - montajul experimental corespunde cazului oscilațiilor libere;
  - se fac achiziții ale valorilor unghiurilor de torsiune produse de diferite mase marcate și apoi se determină panta dependenței  $\varphi = \varphi(m)$ .
  - se încarcă fișierul numit *cst\_torsiune* din directorul *Studiul mișcării oscilatorii*;
  - se șterg valorile numerice cu F4;
  - se exercită un moment static asupra roții prin atârnarea unei mase etalonate și se așteaptă echilibrarea poziției;
  - se introduce manual valoarea masei în coloana corespunzătoare;
  - se apasă butonul de pornire a înregistrării (sau tasta F9) pentru înregistrarea automată a unghiului de deviere în poziția corespunzătoare a tabelului;
  - se repetă procedeul și pentru alte mase marcate.
  - se reprezintă grafic (prin apăsarea mouse dreapta) aproximând cu o funcție liniară (*Fit function* și *Best Fit Streight Line*) și se obține valoarea pantei.
2. determinarea momentului de inerție prin metoda dinamică ;
  - montajul experimental corespunde cazului A; în locul maselor marcate se folosește o masă ușoară (de exemplu un mic șurub sau agrafă de birou);
  - se încarcă fișierul *mom\_inertie* din directorul lucrării;
  - se șterg valorile numerice cu F4;

- se apasă butonul de pornire a înregistrării sau tasta F9 pentru înregistrarea oscilațiilor de torsiune;
- Momental de inerție se poate determina din expresia perioadei oscilațiilor libere. În fereastra *Evaluation* a softului Cassy Lab, se ilustrează două posibilități:
  - combinația **Alt-D** și apoi apăsând pe 2 maxime adiacente se afișează direct perioada; folosind formula  $\omega_0^2 = \frac{C}{I} \rightarrow I = \frac{CT^2}{4\pi^2}$  se determină  $I$ .
  - din reprezentarea spectrului FFT al oscilațiilor, se folosește opțiunea *Evaluation/Calculate Peak Center* și se afișează frecvența corespunzătoare maximului folosind combinația **Alt-T** apoi se calculează  $I = \frac{C}{4\pi^2 f^2}$ .

### 3. determinarea coeficientului de amortizare

- se încarcă fișierul *coef\_amortiz* din directorul lucrării;
- se șterg valorile numerice cu F4;
- se fixează valoarea curentului prin electromagnet la o valoare mică - de exemplu  $I=0.18A$ .
- se apasă butonul de pornire a înregistrării sau tasta F9 pentru înregistrarea oscilațiilor de torsiune;
- În fereastra *Evaluation* se aproximează anvelopa oscilației cu o funcție exponențial scăzătoare (*Fit function* și *Envelope  $e^{-x}$* ) și se obțin parametri de fitare (timpul de relaxare).
- se calculează decrementul logaritm cu relația (5);
- se repetă același lucru și pentru alte valori ale amortizării ( $I=0.25A, 0.4A, 0.55A$ );
- se caută regimul amortizat critic și cel supra-amortizat.

## B. Analiza oscilațiilor forțate

- Se introduce și sursa de forțare periodică prin deschiderea întrerupătorului sursei.
- Se fixează valoarea curentului prin electromagnet la o valoare medie; de exemplu  $I=0.4A$ .
- Se pornește de la o valoare mică a frecvenței sursei externe (de exemplu, circa 0.1Hz) și apoi se crește treptat prin ajustarea tensiunii aplicate<sup>3</sup>.
- Se șterg valorile numerice cu F4 ale fișierului *coef\_amortiz* din directorul lucrării;
- Se citește amplitudinea oscilațiilor forțate după un regim tranzitoriu (câteva minute)<sup>4</sup>, după care această valoare rămâne constantă în timp, pentru oricare oscilații succesive și se determină valoarea frecvenței oscilațiilor conform metodelor prezentate anterior;
- Se completează prima linie ( $T, A$ ) de valori experimentale în tabelul de date.
- Se schimbă frecvența sursei externe modificând în mod corespunzător tensiunea aplicată și se fac noi măsurători pentru  $T$  și  $A$ . În regiunea de creștere rapidă a amplitudinii, citirile se fac mult mai des (în pași mici de frecvență).

**ATENȚIE !** Este recomandat ca, după fiecare citire a amplitudinii în regim staționar, adică după terminarea măsurătorilor pentru o anumită valoare a frecvenței de forțare, oscilațiile să fie complet oprite. În acest fel, timpul de intrare în regim staționar este minimizat.

- Se compară mișcările zonelor marcate pe roata de forțare și pe oscilator și se fac observații de ordin calitativ asupra relațiilor de fază dintre ele.
- Se repetă experimentul pentru valori mici ( $I=0A$ ) și mari ( $I=0.7A$ ) ale amortizării.

<sup>3</sup> Măsurarea tensiunii aplicate cu ajutorul voltmetrului montat în circuit are doar caracter orientativ.

<sup>4</sup> Timpul de stabilire al regimului permanent (staționar) crește proporțional cu timpul de relaxare; cu cât amortizarea este mai mică (curenți prin bobină mai mici) acest timp crește.

Nr. Det.	I=0.4A			I=0A			I=0.7A		
	T(s)	$\nu$ (1/s)	A	T(s)	$\nu$ (1/s)	A	T(s)	$\nu$ (1/s)	A
1.									
2.									
...									
10									

- j. Se reprezintă grafic curbele de rezonanță ( $A=A(\nu)$ ) pentru cele trei situații experimentale.
- k. Se determină frecvențele corespunzătoare maximelor curbelor de rezonanță și frecvența oscilațiilor libere.
- l. Folosind expresia frecvenței de rezonanță ( $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ ), se află coeficienții de amortizare pentru cele trei situații experimentale analizate.
- m. Se calculează factorul de calitate cu ajutorul formulei  $Q = \omega_0 / \Delta\omega$  unde  $\Delta\omega$  este lărgimea curbei de rezonanță măsurată la valoarea amplitudinii  $A_{\max} / \sqrt{2}$ .