

**UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN BUCUREȘTI**

**CATEDRA DE FIZICĂ I**

**LABORATORUL DE MECANICĂ  
BN 122b**

**MOMENTELE DE INERȚIE ALE CORPURILOR ȘI  
TEOREMA LUI STEINER**

**2007 – 2008**

# MOMENTELE DE INERȚIE ALE CORPURILOR ȘI TEOREMA LUI STEINER

## 1. Scopul lucrării

- Determinarea experimentală a momentelor de inerție ale diverselor corpuri (disc, sferă, cilindru plin, cilindru gol) față de axa lor de simetrie și compararea rezultatelor cu cele teoretice.
- Verificarea experimentală a teoremei lui Steiner;
- Determinarea experimentală a constantei elastice unghiulare a arcului și compararea cu valoarea dată în referat.

## 2. Teoria lucrării

*Momentul de inerție* al unui corp în raport cu o axă este definit ca suma produselor dintre masele particulelor elementare ale corpului,  $m_i$ , și pătratele razelor lor de rotație,  $\rho_i$ , (distanțele lor la axa de rotație):

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 . \quad (1)$$

Se observă că momentul de inerție este o mărime fizică ce exprimă distribuția masei corpului în raport cu o axă fixă.

Dacă distribuția masei corpului este continuă, se trece de la sumă la integrală, iar momentul de inerție are expresia

$$I = \int \rho^2 dm = \iiint \rho_m \rho^2 dV , \quad (2)$$

unde  $\rho_m$  este densitatea (masică) a corpului solid, adică  $dm = \rho_m dV$ , iar  $\rho$  este distanța de la axa de rotație fixă la elementul de masă  $dm$ .

Calculul momentului de inerție al unui corp solid de o formă oarecare este, în general, dificil. Dar, situația se simplifică dacă se cunoaște momentul de inerție al corpului față de o axă care trece prin centrul său de masă,  $C$ , deoarece, conform *teoremei lui Steiner* (teorema axelor paralele), momentul de inerție  $I$  în raport cu o axă  $Oz$  arbitrară este egal cu suma dintre momentul de inerție  $I_C$  față de axa paralelă cu  $Oz$ , care trece prin  $C$ , și produsul  $ma^2$  (unde  $m$  este masa corpului, iar  $a$  este distanța dintre cele două axe paralele):

$$I = I_C + ma^2 . \quad (3)$$

Mișcarea unui solid rigid se poate descompune

- într-o mișcare de translație a centrului de masă, descrisă de ecuația de mișcare

$$m\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i , \quad (4)$$

unde  $\vec{a}_C$  este accelerația de translație a centrului de masă al corpului, iar  $\sum_i \vec{F}_i$  este rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra corpului;

- și o mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin centrul de masă, descrisă de o ecuație asemănătoare lui (4)

$$I\vec{\epsilon} = \sum_i \vec{M}_i , \quad (5)$$

unde  $I$  este momentul de inerție al corpului față de axa de rotație,  $\vec{\varepsilon}$  este accelerația unghiulară, iar  $\sum_i \vec{M}_i$  este rezultanta momentelor forțelor exterioare corpului față de axa de rotație.

Din compararea relațiilor (4) și (5), se poate face o analogie între mărimile caracteristice mișcărilor de translație și de rotație:

- mișcarea de translație este produsă de forțe, iar cea de rotație de momentele forțelor față de axa de rotație;

- rolul masei din mișcarea de translație (măsura inerției corpului) este luat în mișcarea de rotație de momentul de inerție al corpului față de axa de rotație.

În acest mod, mișcarea plană a solidului este descrisă de ecuațiile

$$m\vec{a}_C = \vec{F} \text{ și } I_C \vec{\varepsilon} = \vec{M}_C, \quad (6)$$

unde  $\vec{F}$  este rezultanta forțelor exterioare,  $I_C$  și  $\vec{M}_C$  sunt momentul de inerție și, respectiv, momentul resultant al forțelor exterioare, ambele în raport cu axa verticală  $Oz$ , care trece prin centrul de masă al corpului, iar  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  este accelerația unghiulară a corpului.

În această lucrare de laborator, forțele de frecare sunt extrem de mici și se consideră că singura forță ce acționează asupra corpului, care efectuează o mișcare de rotație pură, este o forță de tip elastic (în domeniul de aplicabilitate al legii lui Hooke), al cărei moment față de axa de rotație, ce trece prin centrul de masă al corpului, este proporțional cu unghiul cu care este rotit corpul, având expresia

$$M_C = -k\varphi, \quad (7)$$

unde  $k$  este constanta elastică unghiulară a arcului spiral (având unitatea de măsură Nm/rad), iar  $\varphi$  este unghiul cu care este rotit arcul față de poziția de echilibru. Relația (7) este scalară deoarece s-a proiectat ecuația vectorială pe axa  $Oz$ .

Astfel, ecuația mișcării de rotație a corpului față de axa ce trece prin centrul său de masă devine

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_C} \varphi = 0, \quad (8)$$

care este ecuația cunoscută a unui oscilator armonic neamortizat.

Perioada și frecvența acestei mișcări oscilatorii sunt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}} \text{ și } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I_C}}. \quad (9)$$

Perioada de oscilație a corpului este măsurată direct, folosind unitatea de bază *Cobra 3* și softul specializat „*measure*”, iar momentul de inerție al corpului față de axa verticală care trece prin centrul său de masă se calculează din relația

$$I_C = \frac{T^2}{4\pi^2} k. \quad (10)$$

Rezultatele calculate cu relația (10) sunt comparate cu valorile teoretice, pentru fiecare corp în parte (disc, cilindru plin, cilindru gol și sferă), iar pentru tija prevăzută cu cilindri mobili se verifică teorema lui Steiner.

### 3. Dispozitivul experimental și modul de lucru

Schema dispozitivului experimental este prezentată în figura 1.

- Identificați componentele dispozitivului cu cele din schemă.
- Realizați (sau verificați) conexiunile electrice între detectorul de mișcare cu barieră de lumină (care transformă mișcarea de rotație în mișcare de translație) și unitatea de bază Cobra 3, conform figurii 2.

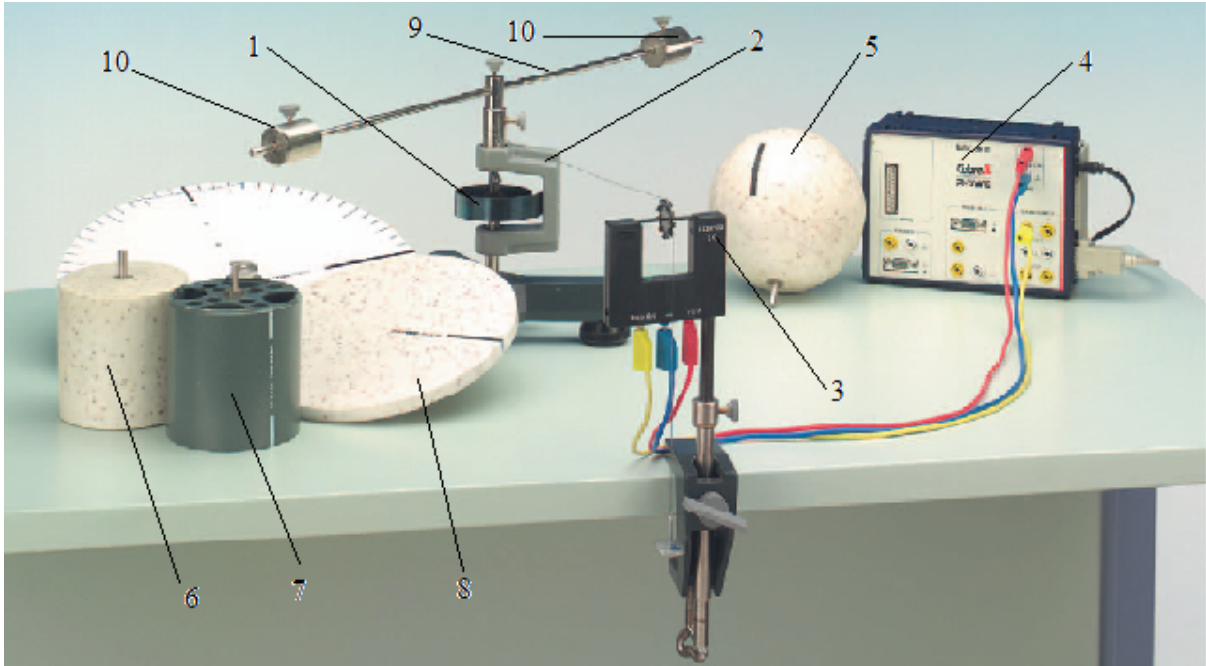


Fig. 1 Dispozitivul experimental pentru determinarea momentelor de inerție și verificarea teoremei lui Steiner: (1) arcul spiral, (2) dispozitivul de prindere al corpurilor, (3) detectorul de mișcare cu barieră de lumină, (4) unitatea de bază Cobra 3, (5) sferă, (6) cilindru plin, (7) cilindru gol, (8) disc, (9) tijă, (10) cilindri mobili pe tijă.

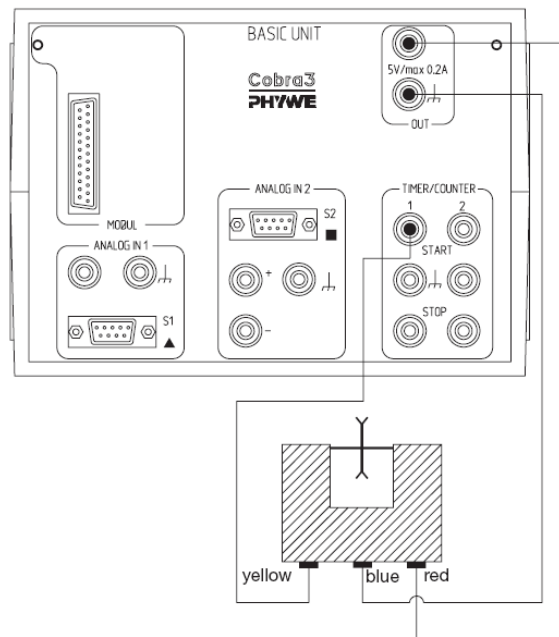


Fig. 2 Conexiunile electrice dintre detectorul de mișcare cu barieră de lumină și unitatea de bază Cobra 3.

- Asigurați-vă că firul care conectează axul de rotație a dispozitivului cu roțița detectorului de mișcare cu barieră de lumină este orizontal.

- Înfășurați firul de aproximativ 7 ori în jurul axului de rotație al dispozitivului înainte de a fixa șurubul. Se alege o lungime a firului astfel încât capătul la care este legat suportul pentru masele de 1 gram să atârne liber cam la 30-40 cm de suprafața mesei. Trebuie ca firul să aibă o asemenea lungime astfel încât să nu blocheze oscilația dispozitivului.

- În cazul în care firul nu este suficient de tensionat, poate să nu angreneze roțița detectorului de mișcare cu barieră de lumină, astfel încât trebuie să adăugați mase de 1 gram pe suportul care atâră spre podea.

- După ce ați reglat lungimea și orizontalitatea firului, fixați cu șurubul de prindere pe axul de rotație unul dintre corpurile pe care le studiați.

- Porniți calculatorul și programul „*measure*”, apoi din „*File*” deschideți „*New measurement*” (sau apăsați butonul roșu din bara de comenzi).

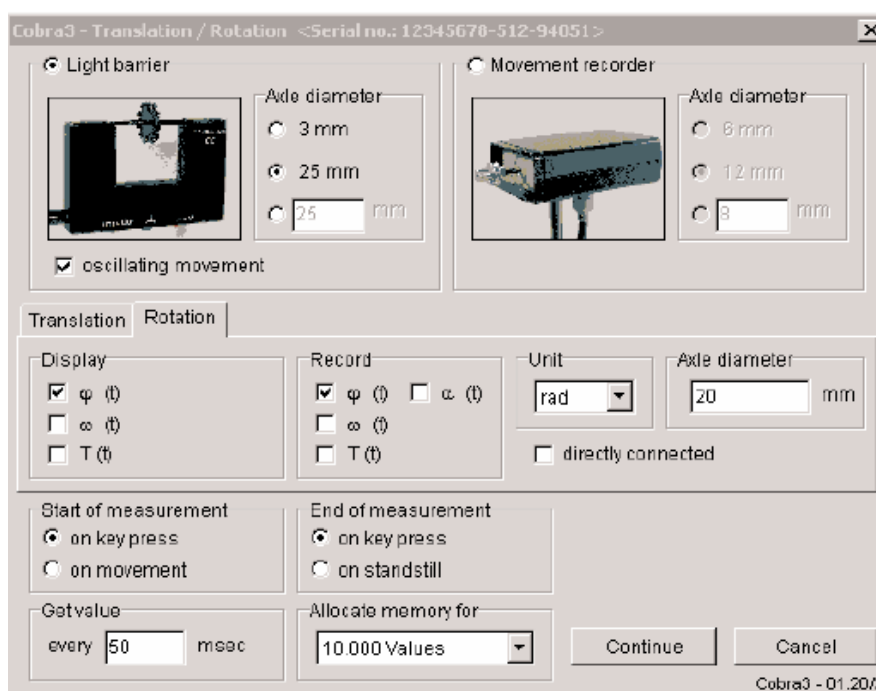


Fig. 3 Parametrii de măsură

- Setati parametrii de măsură ai programului conform figurii 3 selectând „**Light barrier**” și 20 mm la „**Axle diameter**” pentru a sincroniza mișcarea roțiței detectorului de mișcare cu barieră de lumină cu oscilația unghiulară a aparatului. Apoi apăsați „**Continue**”.

- Rotiți corpul fixat în dispozitiv cu aproximativ 180°, lăsați-l să oscileze liber și porniți înregistrarea valorilor măsurate apăsând „**Start measurement**”. După aproximativ 10-15 oscilații complete apăsați „**Stop measurement**”.

- Dacă valoarea de 50 ms (din fereastra de dialog pentru selectarea parametrilor de măsură) selectată în „**Get value every (50) msec**” este prea mare sau prea mică, pot să apară zgomote sau neuniformități ale măsurătorilor, iar rezultatele înregistrate să nu arate ca în figura 4. În asemenea cazuri, modificați corespunzător rata de eșantionare a măsurătorilor.

**Notă:** Pentru cazul perioadelor mici de oscilație trebuie să setați rate mici de eșantionare (pentru cilindru plin și cilindru gol 20 ms, pentru disc și sferă 50 ms) iar pentru perioade mari de oscilație rate mari de eșantionare (pentru tija cu corpuri mobile 100 ms, 150 ms și 200 ms).

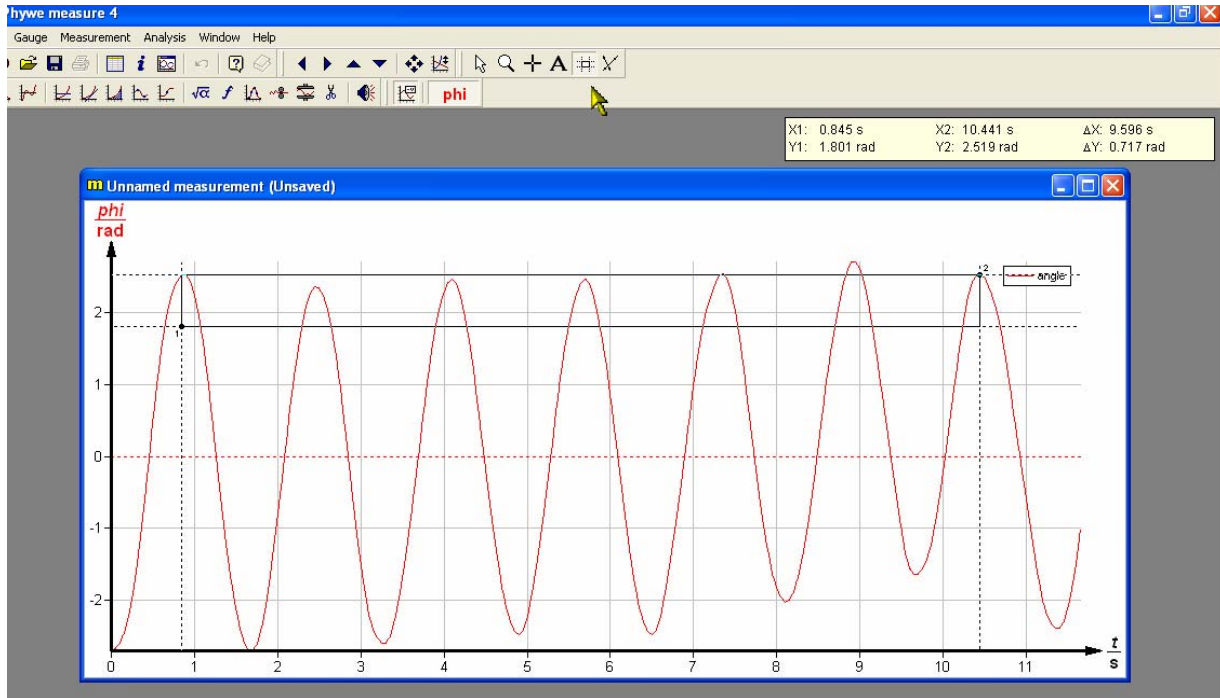


Fig. 4 Rezultate tipice măsurate și afișate

- Deplasați marcările orizontale (selectați cu mouse-ul ca în fig. 4) și fixați-i între un număr întreg și cât mai mare de oscilații complete înregistrate, citiți timpul corespunzător ( $\Delta X$ ) și calculați apoi perioada de oscilație împărțindu-l la numărul de oscilații complete.
- În același mod, determinați perioadele de oscilație ale sistemului cu fiecare din corpurile de studiat: sferă, cilindru plin, cilindru gol și disc.
- Folosind relația (10), calculați momentele de inerție ale corpurilor față de axa de rotație verticală care trece prin centrul lor de masă.
- Fixați apoi în dispozitivul de oscilații unghiulare tija cu corpurile (cilindri) mobile. Pentru început, se determină perioada de oscilație a tijei fixate în centrul său de masă (între cele două semne centrale) fără cei doi cilindri. Apoi se fac măsurători cu tija fixată în centrul său de masă și cu cei doi cilindri așezați simetric față de axa de rotație în fiecare din pozițiile însemnate pe tijă.

**Notă:** Pentru fiecare corp fixat în dispozitiv se efectuează minim câte 5 măsurători, se calculează valoarea medie a perioadei de oscilație și acea valoare se trece în tabele.

#### 4. Modul de prelucrare a datelor experimentale

Tabelele ce pot fi utilizate pentru notarea și prelucrarea datelor experimentale sunt date mai jos.

Constanta elastică unghiulară a arcului are valoarea  $k = 0,0223 \text{ Nm/rad}$ , iar expresiile teoretice ale momentelor de inerție ale corpurilor au valorile date în Anexă.

Tabelul 1. Determinarea momentelor de inerție ale diferitelor corpuri

| Corpul        | $m$ (kg) | $r$ (cm)     |              | $I_C^{\text{teoretic}}$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ) | $T$ (s) | $I_C^{\text{exp}}$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ) |
|---------------|----------|--------------|--------------|--|---------|---|
| Disc          | 0,260    | 10,80        |              |  |         |   |
| Sferă         | 0,719    | 6,82         |              |  |         |   |
| Cilindru plin | 0,358    | 4,96         |              |  |         |   |
| Cilindru gol  | 0,349    | $r_i = 4,58$ | $r_e = 4,99$ |  |         |   |

Masa tijei (fără corpurile adiționale) este  $M = 0,178 \text{ kg}$  și lungimea acesteia  $L = 60 \text{ cm}$ . Masa unui corp adițional (cilindru) este  $m = 0,212 \text{ kg}$ , iar lungimea lui  $l = 4,1 \text{ cm}$ .

Tabelul 2 Verificarea teoremei lui Steiner

| Nr. crt. | $r$ (cm) | $T$ (s) | $r^2$ ( $\text{cm}^2$ ) | $T^2$ ( $\text{s}^2$ ) |
|----------|----------|---------|-------------------------|------------------------|
| 1.       | 0        |         |                         |                        |
| 2.       | 7,62     |         |                         |                        |
| 3.       | 12,62    |         |                         |                        |
| 4.       | 17,62    |         |                         |                        |
| 5.       | 22,62    |         |                         |                        |
| 6.       | 27,62    |         |                         |                        |

**Notă:** Cazul  $r = 0$  din tabelul 2 înseamnă că cele două corpuri nu sunt prinse pe tijă.

Pentru verificarea teoremei lui Steiner, se pornește de la relația (10) și se ține seama de faptul că

$$I_C = I_{\text{tija}} + 2I_{\text{cilindru}} = I_0 + 2mr^2, \quad (11)$$

unde  $I_0$  este momentul de inerție numai al tijei fără corpuri adiționale și unde s-a neglijat momentul de inerție al fiecărui cilindru față de axa verticală ce trece prin centrul său de masă.

Astfel, se obține

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} I_0 + \frac{8\pi^2 m}{k} r^2. \quad (12)$$

Se reprezintă grafic dependența  $T^2 = f(r^2)$ . Din panta dreptei de determinare experimentală constanta elastică unghiulară a arcului, iar din ordonata la origine se calculează momentul de inerție al tijei față de axa verticală care trece prin centrul ei de masă,  $I_0$ , și se compară valoarea obținută cu cea teoretică.

## 5. Întrebări

1. Ce reprezintă momentul de inerție al unui corp față de o axă și ce semnificație fizică are?
2. Enunțați și demonstrați teorema lui Steiner.
3. Propuneți altă metodă de determinare a momentului de inerție.
4. Calculați momentul de inerție al cilindrilor mobili față de axa care trece prin centrul lor de masă și este perpendiculară pe axa lor de simetrie și comparați-l cu cel al tijei.
5. Prezentați principalele surse de erori.

## ANEXĂ

### Exemple de calcul al momentului de inerție

a. *Momentul de inerție al unei sfere omogene (de rază  $R$  și masă  $m$ ) în raport cu o axă ce trece prin centrul său. Alegem axa de rotație ca fiind axa  $Oz$  (fig. 5), astfel că momentul de inerție este dat de integrala*

$$I_z = \rho_m \iiint \rho^2 dV, \quad (13)$$

unde  $\rho_m$  este densitatea masică a materialului sferei, iar  $\rho = r \sin \theta$ . Elementul de volum în coordonate sferice este

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (14)$$

deci momentul de inerție devine

$$\begin{aligned} I_C &= \iiint_{\text{Volumul sferei}} \rho^2 dm = \rho_m \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho_m \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \\ &= \rho_m \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} mR^2. \end{aligned} \quad (15)$$

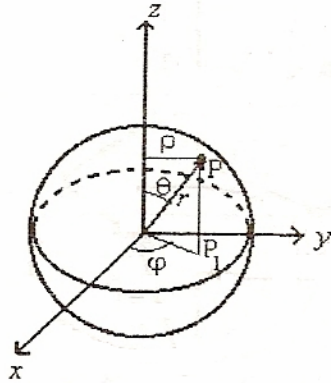


Fig. 5

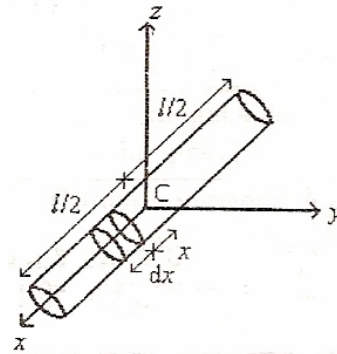


Fig. 6

b. *Momentul de inerție al unei bare omogene (de rază  $R$ , masă  $m$  și lungime  $l$ ) în raport cu o axă perpendiculară pe bară și care trece prin centrul său de masă. Conform fig. 6,  $\rho = x$ , iar momentul de inerție în raport cu axa  $Oz$  devine*

$$I_C = \iiint_{\text{Volumul barei}} \rho^2 dm = \rho_m \pi R^2 \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \rho_m \pi R^2 l \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (16)$$

c. *Momentul de inerție al unei bare omogene omogene (de rază  $R$ , masă  $m$  și lungime  $l$ ) în raport cu o axă perpendiculară pe bară și care trece printr-un capăt al său. În acest caz, se modifică numai limitele de integrare (fig. 7):*

$$I_O = \iiint_{\text{Volumul barei}} \rho^2 dm = \rho_m \pi R^2 \int_0^l x^2 dx = \rho_m \pi R^2 l \cdot \frac{l^2}{3} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (17)$$

Același rezultat se obține și aplicând teorema lui Steiner și folosind (16):



$$I_o = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

d. *Momentul de inerție al unui cilindru omogen (de masă  $m$ , rază  $R$  și înălțime  $h$ ) în raport cu axa lui de simetrie. Alegem axa  $Ox$  ca axă de simetrie a cilindrului. În acest caz, avem  $\rho = r$  (fig. 8) și, folosind coordonatele cilindrice, se obține:*

$$I_C = \underbrace{\iiint \rho^2 dm}_{\text{Volumul cilindrului}} = \rho_m h \iint r^2 dS = \rho_m h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{mR^2}{2}. \quad (18)$$

Se observă că, în acest caz, momentul de inerție nu depinde de înălțimea cilindrului, deci și momentul de inerție al unui disc față de o axă perpendiculară în centrul său are aceeași valoare.

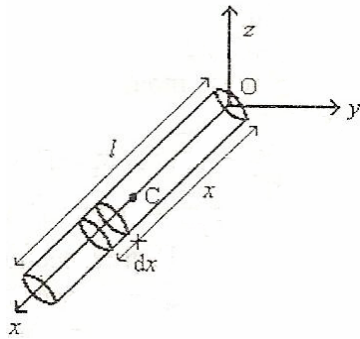


Fig. 7

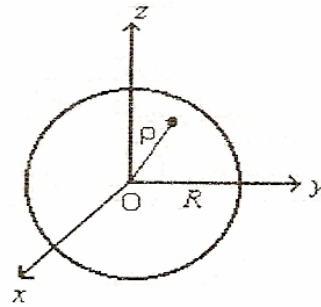


Fig. 8

e. *Momentul de inerție al unui cilindru omogen gol având razele interioară și exterioară  $r_i$  și, respectiv,  $r_e$ , masă  $m$  și înălțime  $h$  față de axa lui de simetrie. În acest caz este o situație similară cu cea de la punctul d, schimbându-se doar limitele de integrare:*

$$I_C = \underbrace{\iiint \rho^2 dm}_{\text{Volumul cilindrului}} = \rho_m h \int_{r_i}^{r_e} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho_m h \cdot 2\pi \cdot \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} = \frac{m}{2} (r_e^2 + r_i^2). \quad (19)$$