Anexa 1

A1.1. Oscilații amortizate

Deși de o mare importanță în fizică, oscilatorul liniar armonic este doar un model ideal. Faptul că energia totală este un invariant temporal este o urmare directă a ipotezei absenței efectelor disipative în sistemul fizic. Nu există oscilații mecanice pur armonice în sisteme închise, pentru simplul fapt că nu există sistem mecanic în mișcare repetitivă, fără disipare de energie sub formă termică, prin lucrul mecanic al forțelor de frecare. Evident, oscilațiile înteținute pot avea caracterul unor oscilații pur armonice, dar numai cu aport energetic exterior sistemului. Aceste aspecte par astăzi triviale, dar timp de sute de ani oamenii au încercat să construiască așa numitele "perpetuum mobile".

Vom numi *oscilație amortizată* mișcarea care are loc sub acțiunea simultană a unor forțe de tip elastic și a uneia sau mai multor forțe de tip disipativ (forțe de frecare).

Mișcarea amortizată nu este o oscilație liberă, în sensul definiției anterioare a acestui concept. Forțele elastice pot fi în general neliniare, iar forțele dispative pot avea naturi diferite (frecare uscată, frecare fluidă, "frecare" electromagnetică (de tipul celor care apar datorită curenților turbionari induși în metale aflate în mișcare în câmp magnetic).

Vom considera mai departe cazul unei mişcări unidimensionale sub acţiunea forţei elastice liniare şi a unei forţe de frecare fluidă proporţională cu viteza de oscilaţie (presupunere justificată în cele mai multe probleme de oscilații, în care vitezele au valori relativ reduse):

$$F_e = -kx\,; \tag{A1.1-1}$$

$$F_r = -b\dot{x}\,, \tag{A1.1-2}$$

unde k este constanta elastică iar b este un coeficient de frecare fluidă (vâscoasă).

Observaţii

a) Coeficientul de frecare fluidă nu este un parametru de material, deoarece nu caracterizează doar fluidul, ci și corpul care se mișcă în fluid. Depinde de vâscozitatea și densitatea fluidului, dar și de geometria corpului în mișcare (aria secțiunii transversale pe direcția de mișcare, factorul de formă).

b) La viteze mari, forța de rezistență variază neliniar cu viteza, crescând mult mai repede decât arată ecuația (A1.1-2).

Suma celor două forțe produce accelerația corpului:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}\,. \tag{A1.1-3}$$

Relația (A1.1-3) se poate pune sub forma canonică împărțind la masă (nenulă) și aranjând termenii în ordinea descrescătoare a ordinului de derivare:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{A1.1-4}$$

Expresia (A1.1-4) este o ecuație difernțială de ordinul II, cu coeficienți constanți, liniară și omogenă, a cărei rezolvare este descrisă în Anexa 2.

Vom folosi notațiile:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2\,,\ \text{și} \tag{A1.1-5}$$

$$\frac{b}{m} = 2\gamma\,, \tag{A1.1-6}$$

unde $\omega_0 > 0$ este pulsația proprie a oscilațiilor libere (în absența efectelor disipative), iar $\gamma > 0$ va fi numit în cele ce urmează coeficient de amortizare. Cu notațiile introduse, ecuația (A1.1-4) devine:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \tag{A1.1-7}$$

Ecuația caracteristică asociată acestei ecuații diferențiale este ecuația de gradul 2:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 , \tag{A1.1-8}$$

având discriminantul:

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4\left(\gamma^2 - \omega_0^2\right). \tag{A1.1-9}$$

În funcție de semnul discriminantului Δ, se vor distinge următoarele cazuri:

Cazul I - Regimul puternic disipativ

Se mai numește și regim supra-amortizat. Dacă parametrii fizici sunt astfel încât:

$$\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow \frac{b}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow b > 2\sqrt{km} , \tag{A1.1-10}$$

atunci soluțiile ecuației caracteristice (A1.1-8) sunt reale și distincte:

$$r_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} , \tag{A1.1-11}$$

și conform Anexei 2, soluția ecuației diferențiale (A1.1-7), adică legea de mișcare, va fi:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{r_1 t} + B \cdot \mathrm{e}^{r_2 t} \text{, adică} \tag{A1.1-12}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} + B \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} = \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[A \cdot \exp\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right)\right], \end{aligned} \tag{A1.1-13}$$

unde *A* și *B* sunt constante ce pot fi determinate dacă se cunosc poziția și viteza corpului la un moment dat (condițiile inițiale). Se observă că ambele soluții ale ecuației caracteristice sunt negative, deci ambii termeni ai legii de mișcare vor tinde la zero când timpul tinde la infinit. O astfel de mișcare se va "stinge" fără a prezenta caracteristicile unei oscilații, fiind mai degrabă o mișcare relativ lentă spre poziția de echilibru în care forțele elastice se anulează. În regim puetrnic disipativ, mișcarea va fi așadar aperiodică.

Cazul II - Regimul critic

Se mai numește și regim supra-amortizat critic. Dacă parametrii fizici satisfac relația:

$$\gamma = \omega_0 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{km} , \tag{A1.1-14}$$

atunci soluțiile ecuației caracteristice (A1.1-8) sunt reale și egale:

$$r = r_1 = r_2 = -\gamma , \tag{A1.1-15}$$

și conform Anexei 2, soluția ecuației diferențiale (A1.1-7) va fi:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{rt} + Bt \cdot \mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A + Bt\right), \tag{A1.1-16}$$

unde constantele *A* și *B* se pot determina din condițiile inițiale.

Legea de mișcare (A1.1-16) descrie așa-numita mișcare critică, ce asigură cea mai rapidă revenire a corpului spre poziția de echilibru $x = 0$, fără a se produce oscilații. Această afirmație trebuie înțeleasă în raport cu valoarea coeficientului de amortizare γ, pentru o pulsație proprie dată.

Observație: *Mișcarea critică are o aplicație interesantă, pentru un dispozitiv comun. Amortizoarele cu fluid care se instalează la ușile batante din spațiile publice intens circulate,* *asigură o mișcare a acestora care la modul ideal satisface două condiții: i) ușa nu trebuie să oscileze la închidere; ii) revenirea spre poziția de echilibru a ușii trebuie să fie cât mai rapidă, cu condiția i) satisfăcută. Aceasta este tocmai mișcarea cu frecare fluidă în regim critic. Un sistem amortizor-ușă de calitate va fi deci acela care funcționează cât mai aproape de regimul critic.*

Cazul III - Regimul oscilațiilor amortizate sau slab disipativ

Se mai numește și regim sub-amortizat. Dacă parametrii fizici satisfac relația:

$$\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow b < 2\sqrt{km}\,, \qquad \text{(A1.1-17)}$$

atunci soluțiile ecuației caracteristice (A1.1-8) sunt complex conjugate ($r_1 = r_2^*$):

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,, \qquad \text{(A1.1-18)}$$

și conform Anexei 2, soluția ecuației de mișcare va fi:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[A \cdot \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right)\right]. \qquad \text{(A1.1-19)}$$

Se introduce notația:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2, \qquad \text{(A1.1-20)}$$

unde ω_1 se numește pseudopulsația mișcării amortizate.

Observații:

a) Denumirea de pseudopulsație este justificată de caracterul periodic aproximativ al legii de mișcare în acest caz. Mișcarea este o pseudo-oscilație, cu înțelesul că legea de mișcare nu este periodică, în sens matematic strict.

b) Pseudopulsația este întotdeauna mai mică decât pulsația oscilațiilor libere ($\omega_1 < \omega_0$).

Cu notația introdusă și folosind formula lui Euler, legea de mișcare (A1.1-19) se poate pune sub forma echivalentă:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\cos\omega_1 t + \mathrm{i}A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t - \mathrm{i}B\sin\omega_1 t\right) = \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\cos(\omega_1 t)(A+B) + \sin(\omega_1 t)(\mathrm{i}A - \mathrm{i}B)\right]. \end{aligned} \qquad \text{(A1.1-21)}$$

Folosind renotările:

$$A + B = \mathsf{A}_0 \cos\varphi\text{, și} \qquad \text{(A1.1-22a)}$$

$$\mathrm{i}\,(A - B) = -\mathsf{A}_0 \sin\varphi\,, \qquad \text{(A1.1-22b)}$$

cu A_0 pozitiv, relația (A1.1-21) se rescrie succesiv:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathsf{A}_0\left[\cos(\omega_1 t)\cdot\cos\varphi - \sin(\omega_1 t)\sin\varphi\right]; \qquad \text{(A1.1-23)}$$

$$x(t) = \mathsf{A}_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega_1 t + \varphi). \qquad \text{(A1.1-24)}$$

Observație: *Un matematician scrupulos nu ar fi operat o astfel de transformare a legii de mișcare din forma (A1.1-19) în forma (A1.1-23). Ar fi spus direct că în cazul III, soluția generală a ecuației diferențiale a mișcării este exponențiala reală $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ înmulțită cu o combinație liniară a funcțiilor armonice $\sin(\omega_1 t)$ și $\cos(\omega_1 t)$, cum arată relația (A1.1-23).*

Relația (A1.1-24) reprezintă legea de mișcare a oscilatorului cu amortizare fluidă. Mișcarea este așadar o oscilație cvasiperiodică (cvasiarmonică) dacă γ, coeficientul de amortizare, este mic. Legea de mișcare are aspectul aproximativ al unei oscilații armonice dar amplitudinea nu este constantă în timp, ci descrește exponențial spre zero.

Figura 1 prezintă comparativ cele trei regimuri discutate mai sus.

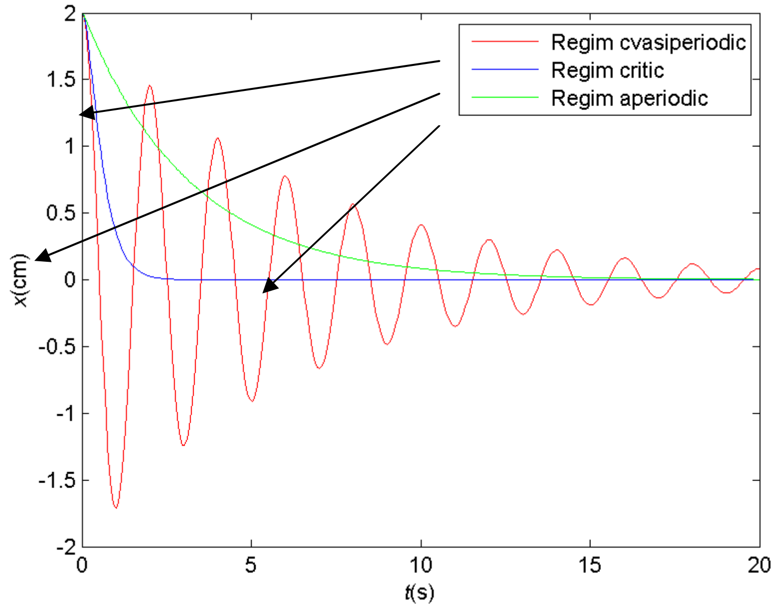

Fig. 1. Cele trei tipuri de mişcări posibile sub acţiunea unei forţe elastice liniare şi a unei forţe de frecare vâscoase.

Vom nota:

$$A(t) = \mathsf{A}_0 \cdot e^{-\gamma t}, \tag{A1.1-25}$$

amplitudinea mişcării amortizate ca funcţie de timp. În acestă perspectivă, A_0 are semnificaţia de amplitudine iniţială sau maximă: $\mathsf{A}_0 = A(0)$. Cu notaţia făcută, legea de mişcare capătă o formă similară cu cea a oscilatorului liniar armonic:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi) = A(t) \cdot \cos\phi(t). \tag{A1.1-26}$$

A_0 şi φ se pot determina dacă se cunosc poziţia şi viteza oscilatorului la momentul $t_0 = 0$.

Un exemplu de variaţie în timp a elongaţiei oscilatorului armonic este prezentat în Fig. 2.

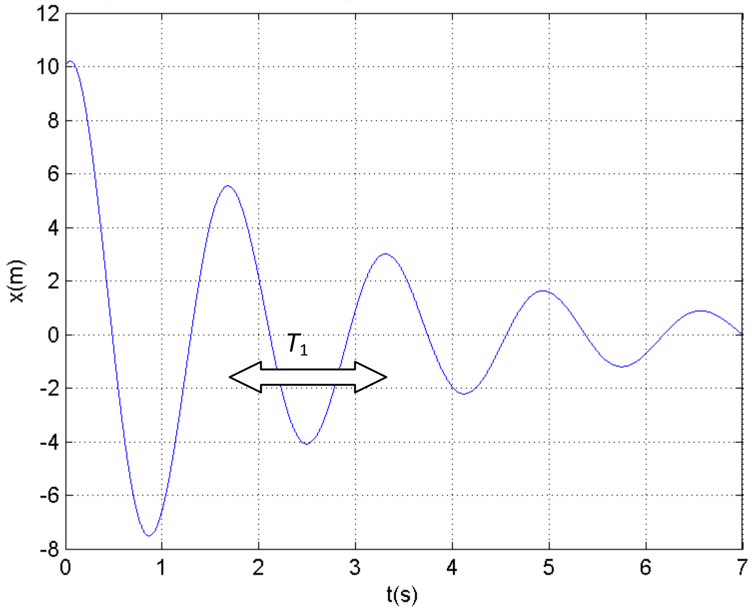

Fig. 2. Graficul legii de mişcare a unui oscilator cu amortizare fluidă.

Se introduc pseudoperioada și respectiv pseudofrecvența oscilației amortizate prin relațiile:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}; \qquad \text{(A1.1-27)}$$

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2\pi}. \qquad \text{(A1.1-28)}$$

Observații:

a) Se observă că pseudoperioada oscilațiilor amortizate este mai mare decât perioada proprie a oscilațiilor libere $T_0 = \sqrt{2\pi/\omega_0}$ (mișcarea amortizată este mai "leneșă"). Oscilațiile libere armonice (o idealizare) sunt un caz limită, pentru $\gamma \to 0$, al oscilațiilor cu disipare de energie.

b) Legea de mișcare nefiind riguros periodică, pseudoperioada nu are o semnificație matematică clară, ca în cazul oscilatorului armonic. Putem să interpretăm mărimea T_1 ca fiind intervalul de timp între două momente consecutive pentru care oscilatorul trece prin poziția de echilibru în același sens.

Legea de viteză se obține prin derivarea în raport cu timpul a legii de mișcare (A1.1-24):

$$v(t) = x'(t) = -\mathrm{A}_0\, \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi)\right]. \qquad \text{(A1.1-29)}$$

Viteza este defazată în raport cu elongația, după cum se observă în Fig. 3.

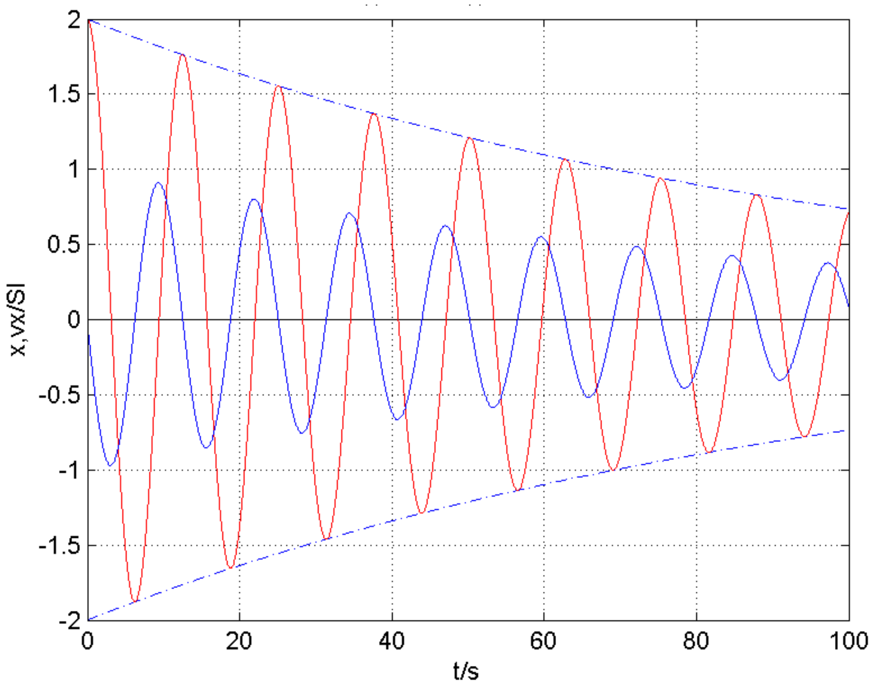

Fig. 3. Legea vitezei pentru un oscilator amortizat, în suprapunere peste legea sa de mișcare (cu linie punctată sunt reprezentate curbele $A(t)$ și $-A(t)$, numite "înfășurătoare" ale graficului legii de mișcare).

Putem calcula momentele de timp la care viteza oscilatorului amortizat se anulează. Este echivalent cu a căuta momentele de extrem ale poziției în cursul mișcării. Egalând cu zero expresia (A1.1-29), se obține:

$$tg(\omega_1 t+\varphi)=\frac{\gamma}{\omega_1}\Rightarrow t_n=\frac{1}{\omega_1}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)-\varphi+n\pi\right]. \tag{A1.1-30}$$

Din această relaţie se observă că intervalul de timp între două maxime consecutive ale elongaţiei este dat de pseudoperioada $T_1=2\pi/\omega_1$.

Se defineşte o mărime adimensională ce caracterizează "rapiditatea" cu care oscilaţia se stinge, numită decrement logaritmic de amortizare:

$$D=\ln\frac{A(t)}{A(t+T_1)}=\ln\frac{A_0\cdot e^{-\gamma t}}{A_0\cdot e^{-\gamma(t+T_1)}}=\ln\left(e^{\gamma T_1}\right)=\gamma T_1. \tag{A1.1-31}$$

O oscilaţie cu amortizare puternică va avea decrementul mare. D se poate pune şi sub forma explicită:

$$D=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=\frac{2\pi b}{\sqrt{4km-b^2}}, \tag{A1.1-32}$$

care arată că pentru o constantă elastică fixată, decrementul de amortizare depinde de coeficientul de frecare fluidă (vezi Fig. 4). La limită, în cazul mişcării critice, decrementul de amortizare tinde la infinit.

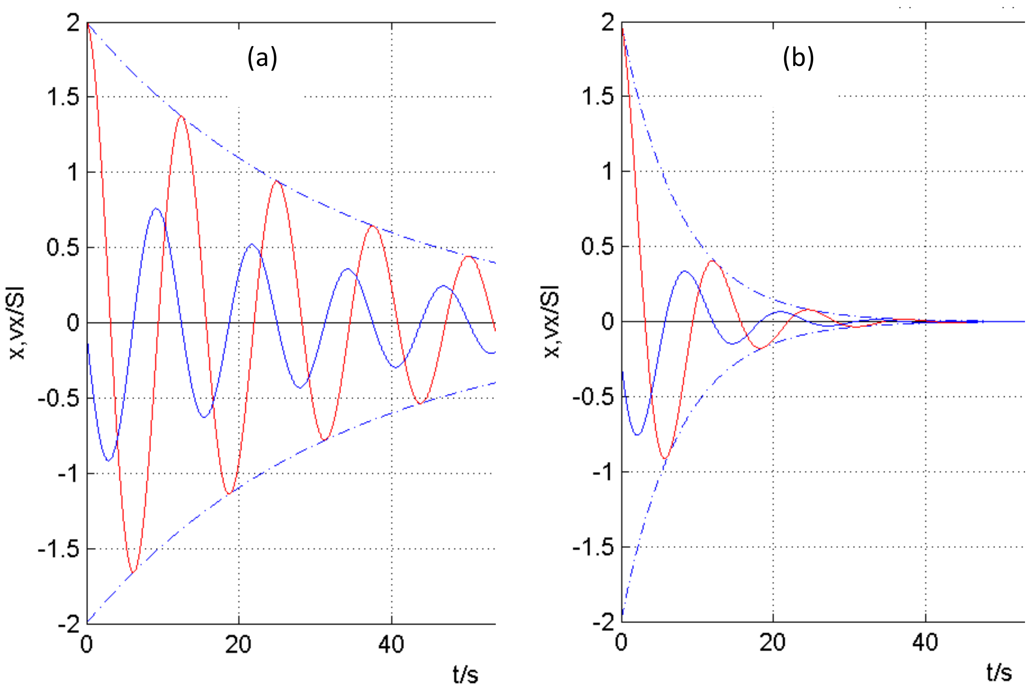

Fig. 4. Oscilații amortizate: (a) cu decrement mic; (b) cu decrement mare. Constanta elastică este identică, dar coeficientul de frecare fluidă este de patru ori mai mare în cazul (b).

A1.2. Oscilații forțate

Un oscilator real pierde energie prin frecări, iar mişcarea sa este amortizată în absența altor forțe care să efectueze lucru mecanic pozitiv. Pentru a compensa pierderile de energie prin frecare trebuie acţionat asupra oscilatorului cu o forţă excitatoare periodică în timp numită forţă de întreţinere. Acest fenomen este cunoscut sub numele de oscilație forțată sau întreținută.

Vom numi *oscilație forțată* mișcarea care are loc sub acțiunea simultană a unor forțe de tip elastic, a uneia sau mai multor forțe de tip disipativ (forțe de frecare), și a unor forțe de întreținere periodice în timp.

Un sistem oscilant întreținut poate avea unul sau mai multe corpuri componente, efectuând o oscilație simplă, respectiv una compusă (complexă). De asemena, mișcarea poate avea loc în una sau mai multe dimensiuni.

Presupunem mai departe o mișcare simplă unidimensională, sub acțiunea unei forțe de tip elastic liniară, a forței disipative de tip fluid, și a unei forțe de întreținere armonică în timp:

$$F_e = -kx\,; \tag{A1.2-1}$$

$$F_r = -b\dot{x}\,; \tag{A1.2-2}$$

$$F_i(t) = F_0 \cos(\omega t), \tag{A1.2-3}$$

unde mărimile din ecuațiile (A1.2-1) și (A1.2-2) au aceleași semnificații ca în paragraful A1.1, F_0 reprezintă amplitudinea forţei excitatoare, iar $\omega > 0$ este pulsația de întreținere (pulsația forței excitatoare).

Observații

a) Forța F_i din relația (A1.2-3) depinde explicit de timp. Și forțele din relațiile (A1.2-1) și (A1.2-2) depind de timp, dar implicit, prin intermediul poziției și respectiv vitezei.

b) Pentru simplitate, am ales originea timpului astfel încât $F_i(0) = F_0$. Altfel spus, am ales să nu avem fază inițială în expresia forței de întreținere.

Rezultanta celor trei forțe produce accelerația corpului:

$$-kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ddot{x}\,. \tag{A1.2-4}$$

Relația (A1.2-4) se poate pune sub forma canonică împărțind la masă (nenulă) și aranjând termenii în ordinea descrescătoare a ordinului de derivare. Termenul forței de întreținere îl vom scrie în membrul drept și va constitui neomogenitatea ecuației diferențiale:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\gamma}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{a_0}\cos(\omega t)\,. \tag{A1.2-5}$$

În ecuația (A1.2-5) am introdus notațiile explicate în capitolul de oscilații amortizate, precum și notația a0, o mărime cu dimensiunea fizică de accelerație. Cu aceste notații, avem:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos(\omega t), \tag{A1.2-6}$$

adică o ecuaţie diferenţială de ordin II, liniară, cu coeficienţi constanţi, și neomogenă. În Anexa 2 este explicat mai pe larg cum se procedează pentru soluționarea acestui tip de ecuație. Pe scurt, soluția generală a ecuației neomogene este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară a ecuației neomogene.

$$x_{g,n}(t) = x_{g,o}(t) + x_{p,n}(t). \tag{A1.2-7}$$

Ecuația omogenă corespunzătoare, specifică oscilațiilor amortizate:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{A1.2-8}$$

a fost discutată în paragraful A1.1 și a condus la soluția:

$$x_{g,o}(t) = \mathsf{A}_0\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi). \tag{A1.2-9}$$

Soluția particulară se propune de forma neomogenității (de tip cosinusoidal):

$$x_{p,n}(t) = \mathrm{B}\cos(\omega t + \delta), \tag{A1.2-10}$$

unde faza inițială δ este un defazaj în raport cu forța de întreținere. Soluția particulară (A1.2-10) trebuie să verifice separat ecuația diferențială neomogenă, ceea ce conduce la determinarea constantelor B și δ. Vom prezenta o soluție complexă pentru acest calcul. Se caută funcția particulară complexă de forma forței de întreținere, adică oscilantă armonic la pulsația ω, și se admite posibilitatea unei amplitudini complexe $\widetilde{X} = \mathrm{B}\exp(i\delta)$:

$$\widetilde{x}_{p,n}(t) = \widetilde{X}\exp[i\omega t], \tag{A1.2-11}$$

Se consideră ca având semnificație fizică partea reală a funcției complexe. Prin înlocuirea expresiei (A1.2-11) în ecuația diferențială a mișcării, se obține:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega\right)\widetilde{X}\exp[i\omega t] = a_0\exp[\mathrm{i}\,\omega t], \tag{A1.2-12}$$

de unde se deduce că:

$$\widetilde{X} = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \tag{A1.2-13}$$

Mai departe se calculează modulul B și argumentul δ al numărului complex (A1.2-13) și se obțin relațiile:

$$\mathrm{B}(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}. \tag{A1.2-14}$$

$$\mathrm{tg}\delta(\omega) = \frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{A1.2-15}$$

Ținând cont că faza inițială δ este negativă (conform relației (A1.2-13), din care se poate deduce că $\sin\delta = -2\mathrm{B}\omega\gamma / a_0 < 0$) și că arctangenta ia valori din cadranele trigonometrice I și IV, defazajul δ se poate exprima astfel:

$$\delta(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} - \pi. \tag{A1.2-16}$$

Se observă că B și δ sunt funcții de pulsația forței de întreținere, pentru un oscilator cu parametrii fizici fixați.

Soluția (A1.2-7) a ecuației neomogene, adică:

$$x_{g,n}(t) = \mathsf{A}_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\left(\underset{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}{\underset{\uparrow}{\omega_1}}\; t + \varphi\right) + \mathrm{B}(\omega)\cos\left(\underset{F}{\underset{\uparrow}{\omega}}\, t + \delta(\omega)\right), \tag{A1.2-17}$$

este legea de mișcare a oscilatorului forțat, în cele mai generale condiții. Constantele A_0 și φ pot fi determinate din cunoașterea condițiilor inițiale $x_{g,n}(0) = x_0$ și $\dot{x}_{g,n}(0) = v_0$. Figura 1 prezintă legile de mișcare în câteva situații distincte de oscilații forțate, pentru seturi diferite de condiții inițiale, și valori diferite (crescătoare) ale pulsației forței de întreținere. Se observă imediat trei aspecte importante: i) după timp suficient de lung, toate oscilațiile prezentate capătă aspect strict armonic, indiferent de variabilitatea observată a aspectului graficului la începutul mișcării; ii) amplitudinea în regimul armonic depinde de frecvența forței de întreținere, variind în limite foarte largi; iii) există o pulsație de întreținere la care amplitudinea de oscilație se maximizează. Pentru valori mai mici sau mai mari ale pulsației forței de întreținere, amplitudinea scade.

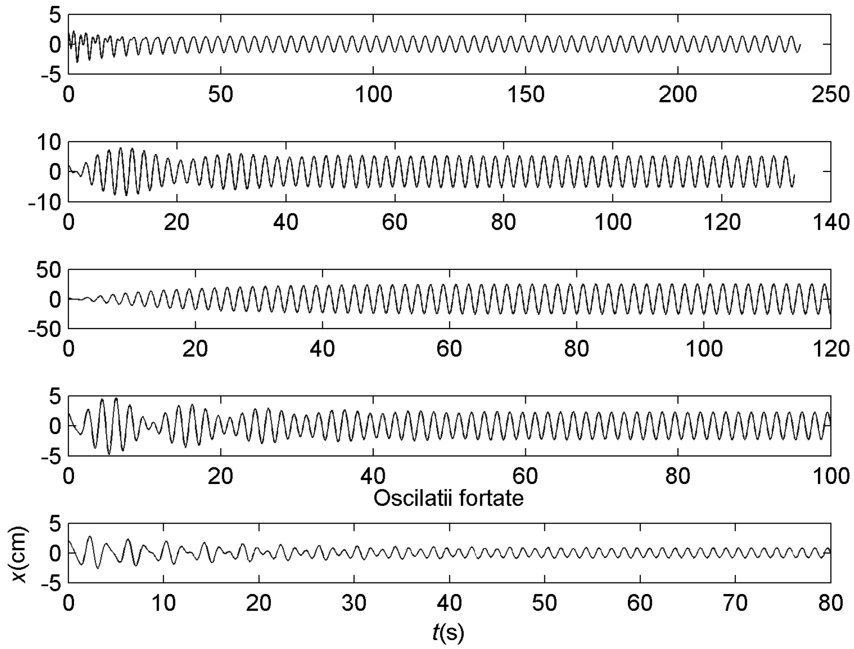

Fig. 1. Oscilații forțate în regim tranzitoriu și în regim permanent, pentru diferite valori ale frecvenței forței armonice de întreținere.

În continuare vom explica teoretic aspectele observate în Fig. 1. Comportamentul legii de mișcare generale (A1.2-17) depinde de raportul între primul termen al soluției, de tip amortizat, și al doilea, de tip armonic (soluția particulară). Se notează cu $\tau = \gamma^{-1}$ timpul de relaxare, definit ca intervalul după care amplitudinea termenului amortizat scade de "e" ori (numărul lui Euler). Se pot pune în evidență două situații calitativ distincte:

- Dacă $t \lesssim \tau$, cei doi termeni ai soluției generale (A1.2-17) sunt în general de același ordin de mărime, niciunul neputând fi neglijat în raport cu celălalt. Mișcarea este descrisă corect doar de legea de mișcare completă $x_{g,n}(t)$. Acest caz anarmonic se numește regim tranzitoriu al oscilaţiei forţate, deoarece durează un timp finit, de ordinul timpului de relaxare (vezi porţiunea de început a legilor de mişcare din Fig. 1).
- Dacă $t >> \tau$, termenul amortizat al soluției (A1.2-17) devine mult mai mic decât cel de-al doilea, putând fi neglijat, adică $x_{g,0}(t) << \mathrm{B}$. În acest caz mișcarea este bine descrisă de soluția particulară, regimul numindu-se permanent.

Mișcarea oscilatorului forțat în regim permanent este prin urmare armonică, la o pulsație impusă de forța excitatoare:

$$x(t) \cong \mathrm{B}(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega)). \qquad \text{(A1.2-18)}$$

Să admitem că sistemul oscilant este bine precizat, în sensul că masa sa, pulsația proprie, și coeficientul de amortizare sunt cunoscute și fixate. Se observă că amplitudinea mișcării oscilatorii forțate în regim permanent (A1.2-14) și defazajul față de forța de întreținere (A1.2-16) depind de pulsația de întreținere, un parametru necaracteristic sistemului oscilant, determinat doar de sistemul excitator. În Fig. 2 sunt reprezentate grafic formele tipice ale graficelor acestor funcții. Se observă că amplitudinea crește de la valoarea

$\mathrm{B}(0) = F_0 / \left(m\omega_0^2\right) = F_0 / k$ (care este deformarea statică a sistemului la forță constantă F_0) la o valoare maximă, după care scade asimptotic spre zero la frecvențe mari: $\lim\limits_{\omega \to \infty} \mathrm{B}(\omega) = 0$.

Amplitudinea oscilației forțate în regim permanent prezintă, în general, un maxim local la o frecvență pe care o vom numi frecvență de rezonanță a amplitudinii. Această frecvență are o valoare apropiată de frecvența proprie a oscilatorului liber, așa cum se va demonstra mai jos.

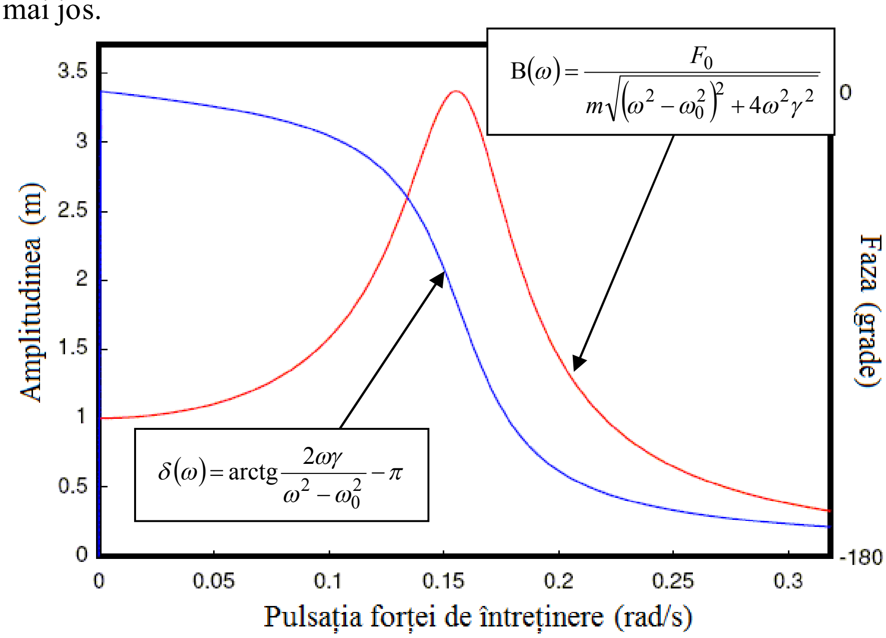

Fig. 2. Dependența tipică a amplitudinii B și fazei δ a oscilațiilor forțate în regim permanent de pulsația ω a forței de întreținere.

Faza δ scade de la zero la pulsații mici și tinde asimptotic spre $-\pi$ la pulsații mari. Vom încerca să explicăm fizic și intuitiv această comportare, în termeni mai puțin riguroși dar mai sugestivi. La pulsații mici, variația forței de întreținere este foarte lentă și deformarea sistemului oscilant urmează fidel variația forței, ceea ce se numește oscilație în fază cu sistemul excitator ($\lim\limits_{\omega \to 0} \mathrm{tg}\,\delta = 0$). Când pulsația crește, elongația sistemului oscilator nu mai "reușește" să urmărească în fază forța excitatoare, ci "rămâne în urmă", adică defazată negativ. La frecvențe foarte mari, înțelegerea fenomenului poate face apel la conceptul de mișcare în antifază, specifică oscilațiilor cu două moduri proprii. Într-un anumit sens, oscilațiile forțate pot fi văzute ca o oscilație compusă sistem oscilant - sistem excitator, ceea ce explică analogia amintită.

Dacă admitem că masa și constanta elastică a sistemului oscilant sunt fixate, dar se poate modifica coeficientul de frecare fluidă, vom putea compara oscilații forțate cu coeficienți de amortizare diferiți.

Observație: *Acest gen de variație este mai greu de realizat practic într-un montaj în care forța disipativă provine chiar din interacția corpului cu un fluid. Există însă sisteme echivalente, cu forțe de frânare magnetice, descrise matematic de o formulă similară celei de frecare vâscoasă. Cu un astfel de dispozitiv, coeficientul de amortizare este de obicei reglabil continuu prin variația unui curent electric.*

În Fig. 3 sunt prezentate curbe de amplitudine pentru valori echidistante ale coeficientului de amortizare.

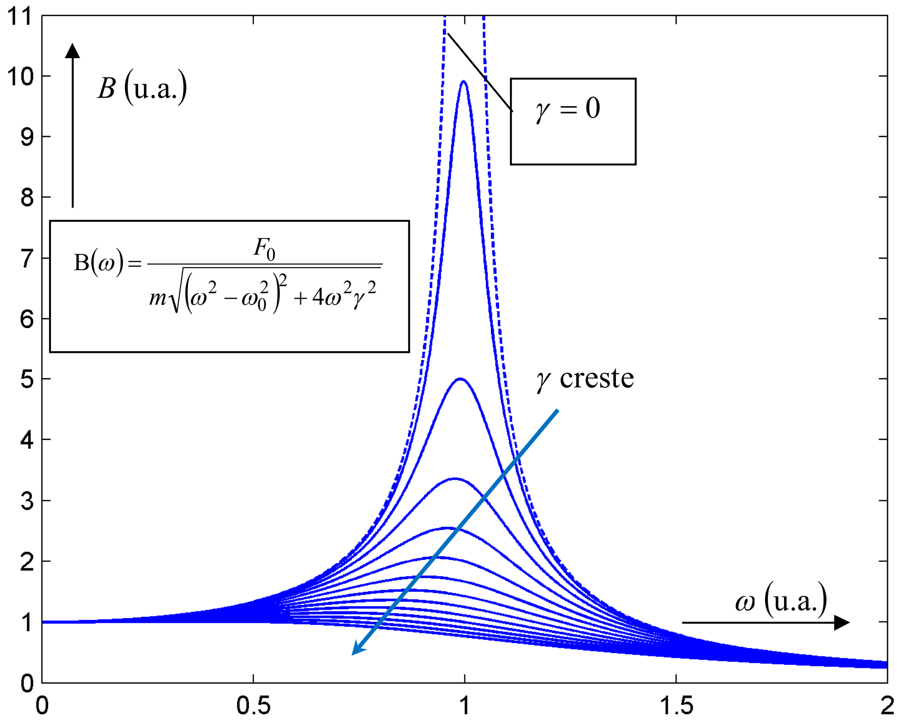

Fig. 3. Curbe de amplitudine la diferite valori ale coeficientului de amortizare. Pentru $\gamma = 0$, amplitudinea tinde la infinit la o anumită valoare a pulsației. B și ω sunt date în unități arbitrare, iar γ variază cu pas constant.

Evidenţiem câteva idei importante:

- **Oscilația forțată prezintă un regim tranzitoriu anarmonic, urmat de un regim permanent armonic.**
- **Oscilația permanentă se produce la o frecvență dependentă doar de sistemul excitator.**
- **Amplitudinea de oscilație forțată în regim permanent se maximizează la o anumită frecvență, apropiată de frecvența proprie a oscilatorului liber.**
- **Elongația oscilatorului forțat este defazată în urma forței excitatoare, cu un unghi depinzând de frecvență.**
- **Când frecvenţa de întreţinere este mult mai mică decât frecvenţa proprie, defazajul între legea de mişcare şi forţă se apropie de 0 (oscilaţia este în fază cu forţa excitatoare).**
- **Dacă frecvenţa de întreţinere este mult mai mare decât frecvenţa proprie, legea de mişcare este defazată cu π radiani în urma forţei de întreţinere (oscilaţia este în antifază cu forţa exterioară).**

Vom discuta în continuare un fenomen deosebit de interesant și important, asociat oscilațiilor forțate. Este vorba despre fenomenul de rezonanță. Deși termenul "rezonanță" face parte din vocabularul curent, conceptul fizic corespunzător este mai puțin înțeles.

În fizică, rezonanța este un fenomen selectiv de transfer energetic care apare în contextul oscilațiilor întreținute, la anumite frecvențe caracteristice sistemelor oscilante.

Efectele rezonanței constă în maximizarea unor mărimi specifice oscilației iar în practică sunt deosebit de importante pentru funcționarea unor sisteme și dispozitive. Există procese de rezonanță în toate clasele de fenomene fizice: rezonanța mecanică de amplitudine sau de viteză, rezonanța electrică de tensiune (sarcină electrică) sau de curent, rezonanța optică, rezonanța magnetică nucleară, rezonanța de spin, rezonanța cuantică, rezonanța plasma, rezonanța gravitațională, etc.

În mecanică se pot evidenția două tipuri principale de rezonanță:

- rezonanța de amplitudine;
- rezonanța de viteză (numită uneori și rezonanță de putere).

Rezonanța de amplitudine reprezintă fenomenul prin care, la o frecvență bine determinată a forței de întreținere, amplitudinea oscilației forțate în regim permanent este maximizată.

Pentru a studia cantitativ acest fenomen, vom reveni la expresia (A1.2-14) a amplitudinii oscilației forțate, ca funcție de pulsația forței exterioare. Vom rescrie această relație într-o formă care favorizează calculul comod al punctului de extrem:

$$\mathrm{B}(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{E_a(\omega)}}. \qquad \text{(A1.2-19)}$$

B atinge un maxim când expresia:

$$E_a(\omega) = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2 \qquad \text{(A1.2-20)}$$

atinge un minim. Fiind o funcție derivabilă, putem aplica teorema Fermat de extrem local, anulând prima derivată:

$$E_a'(\omega) = 2 \cdot \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \cdot 2\omega + 8\omega\gamma^2 = 0, \qquad \text{(A1.2-21)}$$

de unde rezultă:

$$4\omega\left(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2\right) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \omega = 0, \text{ sau} \\ \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2. \end{array} \right. \qquad \text{(A1.2-22)}$$

Prima soluție nu este de interes, ea indică doar faptul că derivata la dreapta a funcției B la frecvență nulă este zero. A doua condiție din (A1.2-22) conduce la o soluție reală doar dacă $\omega_0^2 \geq 2\gamma^2 \Leftrightarrow \omega_0 \geq \sqrt{2}\gamma$:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \qquad \text{(A1.2-23)}$$

Această expresie definește așa-numita pulsație de rezonanță a amplitudinii, valoarea pulsației forței de întreținere la care devine maximă amplitudinea de oscilație în regim permanent.

Observații:

a) Pulsația ω_r a rezonanței de amplitudine este mai mică decât pseudopulsația oscilației amortizate, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, care la rândul ei este mai mică decât pulsația proprie a oscilațiilor libere, ω_0.

b) Rezonanța de amplitudine poate avea loc doar dacă $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$. Dacă această condiție nu este satisfăcută, curba de amplitudine este monoton descrescătoare (nu se mai observă un maxim de amplitudine).

Expresia amplitudinii la rezonanță se obține din relația (A1.2-19) folosind pulsația de rezonanță obținută mai sus:

$$\mathrm{B}_{\max} = \mathrm{B}(\omega_r) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(-2\gamma^2\right)^2 + 4\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) \cdot \gamma^2}} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_1}. \qquad \text{(A1.2-24)}$$

Ținând cont de faptul că $\gamma^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2$ și $\omega_1^2 = \left(\omega_r^2 + \omega_0^2\right)/2$, relația (A1.2-24) poate fi scrisă ca o funcție a maximului de amplitudine de variabila ω_r, în ipoteza unei pulsații proprii constante:

$$\mathrm{B}_{\max}(\omega_r) = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^4 - \omega_r^4}} . \qquad \text{(A1.2-25)}$$

Această funcție are semnificație fizică doar pentru $\omega_r < \omega_0$ și tinde la infinit pentru $\omega_r \to \omega_0$. Este reprezentată grafic în Fig. 4 cu linie punctată groasă și arată clar că pe măsură ce ω_r scade (prin creșterea coeficientului de amortizare γ în relația (A1.2-23)), maximul de rezonanță al amplitudinii scade și simultan se deplasează spre stânga (spre pulsații mai mici). Rezonanța de amplitudine poate avea așadar efecte majore de creștere a elongației de oscilație în vecinătatea pulsației proprii, dacă coeficientul de amortizare este redus.

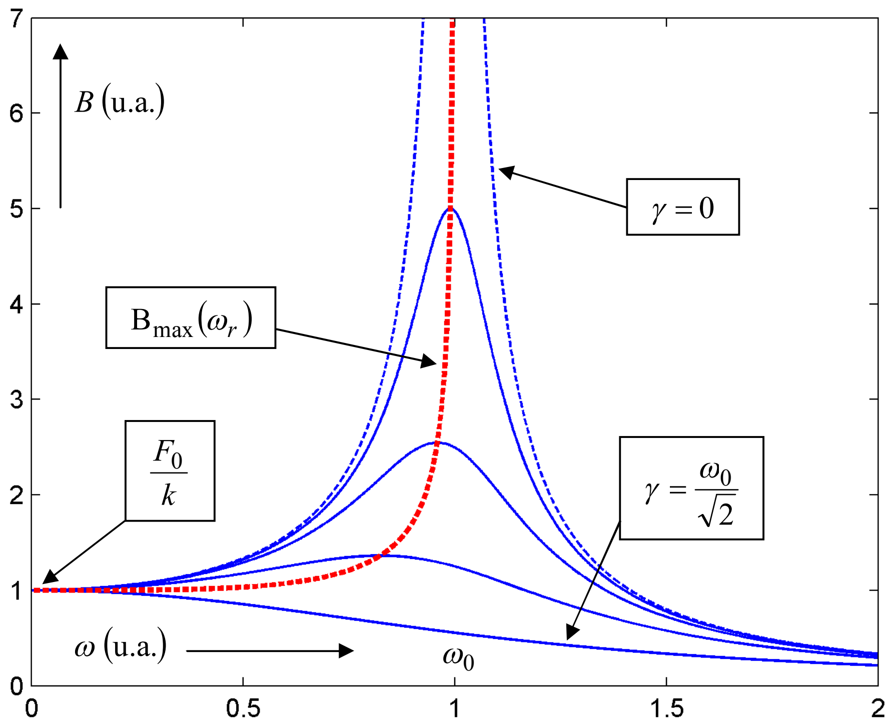

Fig. 4. Maxime de rezonanță pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare. Amplitudinea și pulsația sunt date în unități arbitrare.

Rezonanța de viteză reprezintă fenomenul prin care, la o anumită pulsație de întreținere, amplitudinea vitezei de oscilație se maximizează.

Se demonstrează ușor că rezonanța de viteză nu se produce simultan (la aceeași pulsație) cu rezonanța de amplitudine. Legea vitezei oscilatorului forțat se obține prin derivarea temporală a relației (A1.2-18):

$$v(t) = \dot{x}(t) \cong -\omega \mathrm{B}(\omega)\sin\left(\omega t + \delta(\omega)\right) . \qquad \text{(A1.2-26)}$$

Amplitudinea vitezei de oscilație este valoarea maximă atinsă de expresia (A1.2-26):

$$v_a(\omega) = \omega \mathrm{B}(\omega) = \frac{F_0 \omega}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} . \qquad \text{(A1.2-27)}$$

Pentru a studia variația cu pulsația a acestei mărimi, relația (A1.2-27) se poate rescrie astfel:

$$v_a(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{E_v(\omega)}}, \tag{A1.2-28}$$
unde expresia de sub radical este:
$$E_v(\omega) = \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\gamma^2. \tag{A1.2-29}$$
$$v_a \text{ maxim} \Leftrightarrow E_v \text{ minim} \Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_0^2}{\omega} \Leftrightarrow \omega_r' = \omega_0. \tag{A1.2-30}$$
Valoarea definită de relația (A1.2-30) se numește pulsaţia rezonanţei de viteză. Se observă așadar că rezonanța vitezei are loc la pulsația proprie a oscilatorului liber. Conform expresiei (A1.2-27) se pot scrie și relațiile:
$$\begin{aligned} &\lim_{\omega \to 0} v_a(\omega) = 0; \\ &\lim_{\omega \to \infty} v_a(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{A1.2-31}$$
Expresia amplitudinii vitezei la rezonanță se obține din relația (A1.2-27) folosind pulsația de rezonanță a vitezei (44):
$$v_a^{\max} = v_a(\omega_0) = \frac{F_0\omega_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} = \frac{F_0\omega_0}{m \cdot 2\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{2m\gamma} = \mathrm{B}_{\max} \cdot \omega_1. \tag{A1.2-32}$$
Observații:

a) Pulsația rezonanței de viteză ω_r' nu depinde de coeficientul de amortizare (spre deosebire de ω_r), dar amplitudinea vitezei la rezonanță depinde invers proporțional de acesta.

b) Viteza de oscilaţie are o amplitudine care se maximizează când pulsaţia de întreţinere, ω, devine egală cu pulsaţia proprie a sistemului, ω_0, deci la o frecvență mai mare decât cea la care se produce fenomenul rezonanței de amplitudine. Am afirmat deja că oscilația forțată în regim permanent este o oscilație armonică, deci este aparent similară oscilației libere. Există însă o diferență esențială: oscilația liberă se produce la pulsația proprie a sistemului oscilant, pe când oscilația forțată are loc cu pulsația impusă de forța de întreținere.

Factorul de calitate al oscilatorului forțat este o mărime adimensională ce caracterizează eficiența transferului energetic de la sistemul excitator la sistemul oscilant. Se definește prin raportul dintre energia medie a oscilatorului forțat și lucrul mecanic efectuat de forța de întreținere într-o perioadă de oscilație:
$$Q \overset{\text{def}}{=} 2\pi\frac{\langle E\rangle}{\langle L_i\rangle}. \tag{A1.2-33}$$
$\langle E\rangle$ - energia medie temporală a oscilatorului forţat;

$\langle L_i\rangle$ - lucrul mecanic efectuat de forţa de întreţinere F_i într-o perioadă.

Vom calcula o expresie a factorului de calitate în funcție de pulsația proprie a oscilatorului liber și de coeficientul de amortizare și vom discuta semnificația sa grafică.

Dacă oscilația în regim permanent este armonică, putem concluziona că energia mecanică totală a oscilatorului rămâne constantă în timp. De aici deducem că într-o perioadă de oscilație, lucrul mecanic al forței de întreținere trebuie să fie egal în modul cu lucrul mecanic al forțelor disipative (care este negativ):

$$\underset{"+"}{\langle L_i \rangle} = - \underset{"-"\text{(disipat prin frecări)}}{\langle L_r \rangle} \tag{A1.2-34}$$

Există deci două căi de a calcula mărimea $\langle L_i \rangle$ (direct și indirect, prin intermediul lucrului mecanic rezistent) și le vom aborda pe amândouă, ca exercițiu interesant.

Puterea mecanică instantanee asociată forței de întreținere, este:

$$P_i(t) = \underbrace{F_0 \cos(\omega t)}_{F_i(t)} \cdot v(t). \tag{A1.2-35}$$

Lucrul mecanic efectuat de forța excitatoare într-o perioadă se poate calcula ca produsul dintre puterea de întreținere medie temporală și perioada $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle L_i \rangle = \langle P_i \rangle \cdot T \,. \tag{A1.2-36}$$

Pentru calculul puterii medii de întreținere, aplicăm formula generală de mediere pentru funcții periodice, în care folosim legea vitezei (A1.2-26) și o formulă trigonometrică de transformare a produsului în sumă:

$$\begin{aligned}
\langle L_i \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T P_i(t)\,\mathrm{d}t \cdot T = -\int_0^T F_0 \cos(\omega t) \cdot \mathrm{B}(\omega)\omega \sin(\omega t + \delta)\,\mathrm{d}t = \\
&= -F_0\,\mathrm{B}(\omega)\omega \left(\int_0^T \frac{\sin(2\omega t + \delta)}{2}\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\sin\delta}{2}\mathrm{d}t \right) = \\
&= -F_0\,\mathrm{B}(\omega)\omega \cdot \left[\left.\frac{-\cos(2\omega t + \delta)}{4\omega}\right|_0^T + \frac{1}{2}T\sin\delta \right] = \\
&= -\frac{1}{2}F_0\,\mathrm{B}(\omega)\omega T \sin\delta = -\pi F_0\,\mathrm{B}(\omega)\sin\delta.
\end{aligned} \tag{A1.2-37}$$

Folosind expresia lui $\sin\delta$ în (A1.2-37), obținem:

$$\langle L_i \rangle = -\pi F_0\,\mathrm{B}(\omega)\left[-\frac{2\,\mathrm{B}(\omega)\omega m\gamma}{F_0} \right] = 2\pi m\gamma \mathrm{B}(\omega)^2 \omega > 0 \,. \tag{A1.2-38}$$

Să calculăm acum într-o manieră similară lucrul mecanic rezistent (disipat) într-o perioadă de oscilație. Pornim de la expresia puterii rezistente instantanee asociată forței de frecare de tip fluid (amintim că $b = 2m\gamma$):

$$P_r(t) = F_r(t) \cdot v(t) = -b \cdot v(t)^2 \,. \tag{A1.2-39}$$

Folosim o relație similară cu (A1.2-36):

$$\begin{aligned}
\langle L_r \rangle &= \langle P_r \rangle \cdot T = \frac{1}{T}\int_0^T -2m\gamma \mathrm{B}(\omega)^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)\,\mathrm{d}t \cdot T = \\
&= -2m\gamma \mathrm{B}(\omega)^2 \omega^2 \cdot \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\delta)}{2}\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

$$= -2m\gamma B(\omega)^2 \omega^2 \cdot \left[\int_0^T \frac{dt}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\delta) dt}_{0} \right] = \tag{A1.2-40}$$
$$= -m\gamma B(\omega)^2 \omega^2 \cdot T = -2\pi m\gamma B(\omega)^2 \omega = -\langle L_i \rangle.$$

Vom calcula acum energia totală medie pe o perioadă:

$$\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \int_0^T v^2 \, dt + \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot \int_0^T x^2 \, dt =$$
$$= \frac{1}{2T} \left[m B(\omega)^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2(\omega t + \delta) dt + m B(\omega)^2 \omega_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt \right]. \tag{A1.2-41}$$

În relația (A1.2-41) intervin două integrale de același tip, ambele egale cu jumătate din perioadă ($\int_0^T \sin^2(\omega t + \delta) dt = \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt = T/2$). Energia medie va fi:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2T} \cdot \frac{m B(\omega)^2 \cdot T}{2} \left(\omega^2 + \omega_0^2\right) = \frac{1}{4} m B(\omega)^2 \left(\omega^2 + \omega_0^2\right). \tag{A1.2-42}$$

Înlocuind relațiile (A1.2-42) și (A1.2-37) în expresia de definiție (A1.2-33), se obține:

$$Q(\omega) = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot m B(\omega)^2 \left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{B(\omega)^2 \omega^2 \cdot m\gamma T} = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{4\omega\gamma}. \tag{A1.2-43}$$

Relația (A1.2-43) reprezintă expresia factorului de calitate al oscilatorului forțat la o frecvență oarecare a forței de întreținere. La rezonanța de viteză ($\omega_r' = \omega_0$), formula (A1.2-43) capătă forma mai simplă:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \tag{A1.2-44}$$

$Q_{\text{mare}} \Leftarrow \langle E \rangle >> \langle L_i \rangle$: Un factor de calitate mare înseamnă o energie a oscilatorului mult mai mare decât lucrul mecanic efectuat periodic pentru întreținerea oscilației. Oscilatorul "acumulează" cu ușurință energie, pierderile fiind relativ mici, și oscilația forțată este ușor de întreținut.

$Q_{\text{mic}} \Leftarrow \langle E \rangle \approx \langle L_i \rangle$: Un factor de calitate mic se obține atunci când energia oscilatorului este de același ordin de mărime cu lucrul mecanic de întreținere. Oscilatorul pierde rapid energia provenită din lucrul mecanic al forței excitatoare, efectele disipative fiind relativ importante. O astfel de oscilație forțată este întreținută cu dificultate, ineficient din punct de vedere energetic.

În continuare vom demonstra existența unei relații între puterea disipată medie (sau, echivalent, puterea absorbită medie) a oscilatorului forțat și factorul de calitate și vom ilustra grafic această legătură. Din relația (A1.2-39) deducem că:

$$\left|\langle P_r \rangle\right|(\omega) = m\gamma B(\omega)^2 \omega^2 = m\gamma v_a(\omega)^2. \tag{A1.2-45}$$

Puterea medie se maximizează simultan cu amplitudinea vitezei, la pulsația $\omega_r' = \omega_0$, acesta fiind motivul pentru care rezonanța de viteză se mai poate numi și rezonanță de putere (Fig. 7). Valoarea maximă a puterii medii este, conform cu relația (A1.2-32):

$$\left|\langle P_r\rangle\right|_{\max} = \left|\langle P_r\rangle\right|(\omega_0) = m\gamma \cdot v_a^{\max 2} = m\gamma \cdot \left(\frac{F_0}{2m\gamma}\right)^2 = \frac{F_0^2}{4m\gamma}. \qquad \text{(A1.2-46)}$$

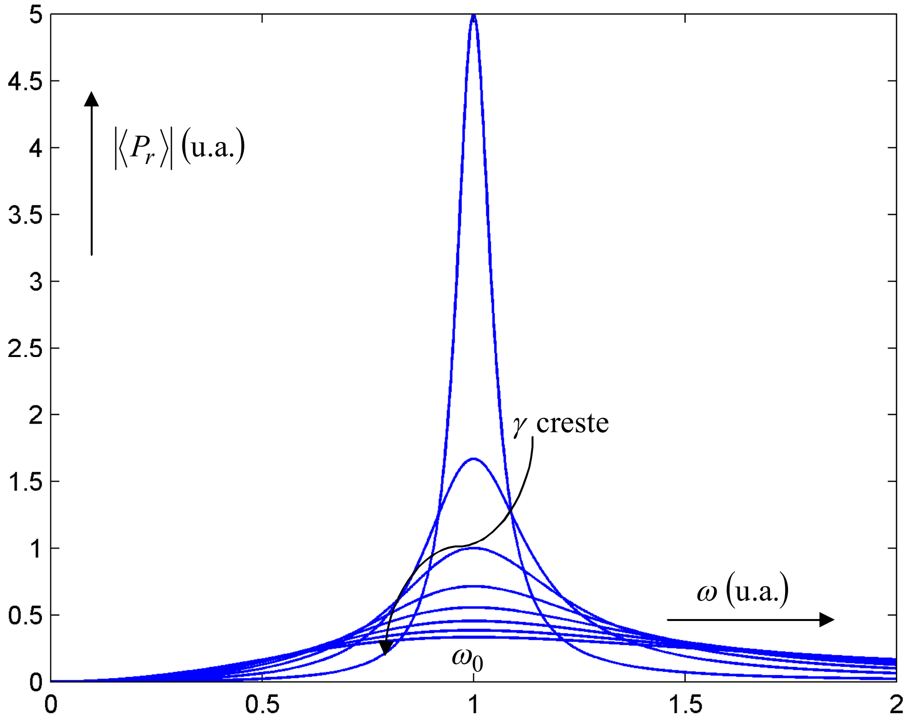

Fig. 7. Rezonanța de putere, cu coeficient de amortizare variabil.

Să calculăm acum valorile pulsației la care puterea se reduce la jumătate din valoarea maximă. Avem, succesiv, relațiile echivalente:

$$\left|\frac{\langle P_r\rangle}{\langle P_r\rangle_{\max}}\right| = \frac{\mathrm{B}(\omega)^2\omega^2 m\gamma}{\dfrac{F_0^2}{4m\gamma}} = \frac{\mathrm{B}(\omega)^2\omega^2 \cdot 4m^2\gamma^2}{F_0^2} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(A1.2-47a)}$$

$$\frac{F_0^2 \cdot \omega^2}{m^2\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2\right]} \cdot \frac{4m^2\gamma^2}{F_0^2} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(A1.2-47b)}$$

$$8\omega^2\gamma^2 = 4\omega^2\gamma^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2. \qquad \text{(A1.2-47c)}$$

$$\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 = 4\omega^2\gamma^2. \qquad \text{(A1.2-47d)}$$

$$\omega^2-\omega_0^2 = \pm 2\omega\gamma. \qquad \text{(A1.2-47e)}$$

$$(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0) = \pm\, 2\omega\gamma. \qquad \text{(A1.2-47f)}$$

Când coeficientul de amortizare γ este destul de mic, se poate face aproximația $\omega+\omega_0 \cong 2\omega$ în vecinătatea rezonanței de putere, și relația (A1.2-47f) devine:

$$\omega - \omega_0 \cong \pm \gamma , \qquad \text{(A1.2-48)}$$

ceea ce furnizează două soluții:

$$\omega_- = \omega_0 - \gamma; \qquad \omega_+ = \omega_0 + \gamma. \qquad \text{(A1.2-49)}$$

Diferența celor două pulsații este:

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 2\gamma . \qquad \text{(A1.2-50)}$$

Substituind (A1.2-50) în (A1.2-44) se obține:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \qquad \text{(A1.2-51)}$$

ceea ce se poate concluziona astfel:

Factorul de calitate la rezonanța de putere este dat de raportul între frecvența de rezonanță şi lărgimea la semi-înălţime a curbei de putere.

Această interpretare este ilustrată grafic în Fig. 8.

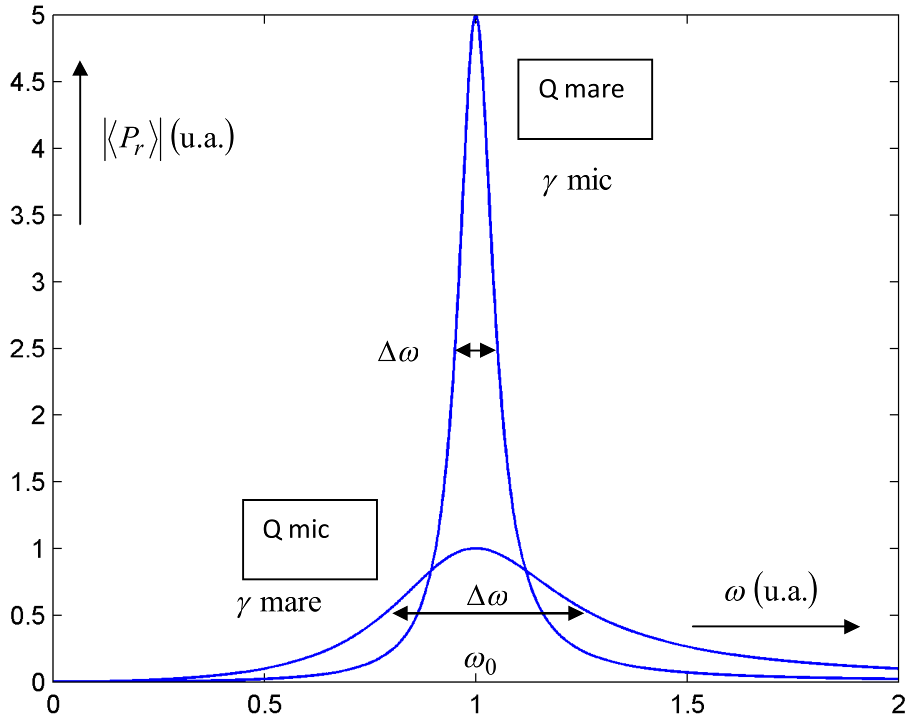

Fig. 8. Curbe de putere pentru două valori ale factorului de calitate. Maximul puterii este invers proporțional cu γ, iar lărgimea curbei la semi-înălțime este direct proporțională cu γ.

Observaţii:

a) Expresia din relația (A1.2-44) poate fi asociată și unui oscilator amortizat și numită factorul de calitate al oscilatorului amortizat. Q_0 poate fi pus în relație cu decrementul logaritmic de amortizare:

$$Q_0 = \frac{\pi\omega_0}{D\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \qquad \text{(A1.2-52)}$$

b) Factorul de calitate se poate calcula atât pentru oscilatorii mecanici, cât şi pentru cei electromagnetici, optici sau cuantici. De exemplu, o antenă (circuit RLC oscilant) este *"bună" dacă are factor de calitate mare deoarece recepţionează foarte selectiv semnalele radio.O sursă laser (oscilator sau generator optic) este în general cu atât mai performantă cu cât are factorul de calitate mai mare, condiţie echivalentă cu monocromaticitatea sursei. Înțelegem că nu poate exista o sursă laser perfect monocromatică, care ar avea factorul de calitate infinit. Electronii aflați într-o groapă cuantică semiconductoare polarizată la o tensiune constantă cu ajutorul unei surse de tensiune, pot fi înțeleși ca oscilatori cuantici forțați. Factorul de calitate cuantic va fi în această situație o măsură a stabilității electronilor pe nivelele de energie în groapa cuantică.*

Fenomenele de rezonanță mecanică sunt foarte importante. Rezonanța poate fi utilă în anumite mecanisme dar poate avea și efecte distructive. De exemplu, cutremurele produc oscilația forțată a structurilor civile și industriale. Dacă energia seismică este acumulată preponderent în unde de anumite frecvențe caractersitice, și dacă acestea sunt apropiate de frecvențele proprii de mișcare ale unei clădiri, aceasta poate oscila cu amplitudine mare și poate fi distrusă. Proiectarea modernă a clădirilor în zonele seismice ține cont de posibilele efecte ale cutremurelor.

Anexa 2

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul II

Una dintre ramurile matematicii cu cele mai vaste domenii de aplicabilitate o constituie studiul ecuațiilor diferențiale. Această anexă prezintă noțiuni despre o categorie particulară de ecuații diferențiale ordinare, utile în studiul oscilațiilor mecanice. Neglijând uneori rigoarea matematică, se vor prezenta metodele de rezolvare folosite curent în practică. Vom adapta notațiile folosite la problemele de fizică studiate. Studiul sistematic al ecuațiilor diferențiale trebuie făcut la cursurile de matematici superioare.

O ecuație diferențială este o relație în care intervin o funcție de una sau mai multe variabile, derivate ale acestei funcții, și unele dintre variabile. Nu ne vom ocupa aici de cazul funcțiilor cu mai multe variabile, în cazul cărora ecuațiile se numesc cu derivate parțiale.

Dacă funcția *x* care intervine în ecuația diferențială este de o singură variabilă *t* și deci derivatele care intervin sunt în raport cu această variabilă, ecuația diferențială se numește ordinară.

Orice funcție $x(t)$ care verifică ecuația diferențială se numește soluție sau integrală a acesteia.

Ordinul unei ecuații diferențiale este dat de ordinul maxim al derivatelor ce apar în ecuație. De exemplu, dacă derivata maximală din ecuație este $x^{(n)}$, ordinul ecuației diferențiale este n.

Se poate vorbi despre gradul ecuației diferențiale, dacă forma implicită a acesteia:

$$F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(A2-1)}$$

este o funcție rațională. **Gradul funcției determină atunci gradul ecuației diferențiale.** Deosebit de importante pentru aplicații sunt ecuațiile diferențiale de gradul 1, numite și ecuații diferențiale liniare. În aceste ecuații funcția necunoscută și derivatele sale apar doar la puterea 1. Ecuațiile diferențiale neliniare fie sunt de grad superior, fie nu au grad definit, dacă F nu este rațională. Forma generală a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul n este:

$$f_n(t)x^{(n)}(t) + \ldots + f_2(t)x''(t) + f_1(t)x'(t) + f_0(t)x(t) = f(t), \qquad \text{(A2-2)}$$

unde $f, f_0, \ldots, f_n$ sunt funcții date de *t*. Dacă în particular, funcția f este identic nulă, ecuația se numește omogenă. Dacă funcțiile $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sunt constante, ecuația diferențială se numește cu coeficienți constanți.

Integralele ecuațiilor diferențiale pot fi generale, particulare, sau singulare. În contextul de interes pentru noi, nu vom întâlni soluții singulare, acestea fiind caracteristice de regulă unor discontinuități ale ecuației date. Vom discuta despre soluții generale și particulare, în anumite situații bine precizate. În matematică, teoremele de existență stabilesc condițiile pe care trebuie să le satisfacă ecuațiile diferențiale pentru a admite soluții. Se poate arăta că integrala generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n conține n constante, adică o astfel de integrală este determinată făcând abstracție de n constante.

Procedeul prin care se determină soluția sau integrala unei ecuații diferențiale se numește integrare. O ecuație diferențială este integrabilă prin metode elementare dacă soluția ei generală se obține ca o combinație a unui număr finit de funcții elementare, prin metode de integrare obișnuite, numite cvadraturi. Acest lucru este posibil doar pentru unele tipuri de ecuații diferențiale.

În problemele de oscilații întâlnim o categorie particulară de ecuații diferențiale ordinare, și anume cele de ordinul II. Când acestea sunt neliniare, le rezolvăm în general folosind metode de calcul aproximativ. Când problemele sunt liniare sau se pot liniariza, avem de rezolvat ecuații diferențiale liniare, de ordinul II, cu coeficienți constanți, omogene (dacă oscilațiile sunt libere) sau neomogene (dacă oscilațiile sunt forțate). Soluțiile vor fi în acest caz determinate prin metode elementare, făcând abstracție de 2 constante de integrare. Acestea se vor putea afla doar din cunoașterea unor condiții inițiale în problema de fizică.

Ecuațiile de ordinul II au coeficientul constant $f_2(t) \equiv C_2$ nenul, deci se pot întotdeauna împărți prin acesta. Aceste ecuații se pot scrie așadar în forma generică:

$$x''(t) + C_1 x'(t) + C_0 x(t) = f(t), \qquad \text{(A2-3)}$$

unde $f(t)$ se mai numește și neomogenitate.

Pentru coerență și comoditate, din motive care țin de problemele de oscilații studiate, vom folosi notațiile:

$$C_0 = \omega_0^2, \text{ și} \qquad \text{(A2-4)}$$

$$C_1 = 2\gamma, \qquad \text{(A2-5)}$$

unde $\omega_0 > 0$ se numește pulsația proprie, iar $\gamma > 0$ este coeficientul de amortizare (vezi Anexa 1). Cu notațiile introduse, ecuația (A2-3) devine:

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t). \qquad \text{(A2-6)}$$

Vom discuta rezolvarea acestei ecuații în două etape.

Etapa 1) Vom începe prin a rezolva ecuația omogenă, adică ne ocupăm prima dată de situația mai simplă, în care $f(t) = 0$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad \text{(A2-7)}$$

Observăm că ecuația (A2-7) admite soluția banală $x(t) \equiv 0$, care nu prezintă interes deosebit. Deoarece ecuația este omogenă și liniară în funcția $x(t)$ și în cele două derivate ale sale, dacă $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt două integrale particulare, atunci orice combinație liniară $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ este soluție a ecuației, A și B fiind constante arbitrare. Pentru ca o combinație $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ de două soluții particulare să reprezinte integrala generală, soluțiile $x_1(t)$ și $x_2(t)$ trebuie să fie liniar independente. Dacă nu ar fi astfel, atunci s-ar putea găsi două constante α și β, ambele diferite de zero, pentru care $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = 0$. Dacă $\alpha \neq 0$, rezultă că $x_1 = -\beta x_2/\alpha = \overline{\alpha}\, x_2$. Cele două funcții ar reprezenta așadar aceeași integrală particulară, deoarece diferă numai printr-un factor constant.

Când cele două soluții particulare $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt liniar independente, ele formează un sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale. În acest caz, raportul $x_1(t)/x_2(t)$ nu este constant, și derivata sa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1' x_2 - x_1 x_2'}{x_2^2} \qquad \text{(A2-8)}$$

nu este identic nulă. Determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1' & x_1 \\ x_2' & x_2 \end{vmatrix} = x_1' x_2 - x_1 x_2', \qquad \text{(A2-9)}$$

egal cu numărătorul din relația (A2-8), se numește determinant wronskian, după numele matematicianului polonez Josef Wronski (1778-1853). Are loc teorema:

Două soluții particulare $x_1(t)$ și $x_2(t)$ formează un sistem fundamental și deci combinația liniară $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ reprezintă integrala generală a ecuației diferențiale (A2-7), dacă și numai dacă determinantul wronskian format cu aceste funcții este diferit de zero.

Această teoremă este adevărată și pentru coeficienți variabili, dar în astfel de cazuri nu există o metodă generală de găsire a unui sistem fundamental de soluții.

În cazul nostru însă, coeficienții sunt constanți și o metodă generală de rezolvare este disponibilă. Propunând soluții de forma $x(t) = \exp(rt)$ în ecuația (A2-7), și ținând cont de faptul că exponențiala nu se anulează, se arată imediat că r trebuie să verifice o ecuație algebrică simplă. Ecuația caracteristică asociată acestei ecuații diferențiale este ecuația de gradul 2:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0, \qquad \text{(A2-10)}$$

având discriminantul:

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4\left(\gamma^2 - \omega_0^2\right). \qquad \text{(A2-11)}$$

Ecuația de gradul 2 are în general două soluții complexe, acestea fiind uneori reale. În funcție de semnul discriminantului Δ, se vor distinge următoarele cazuri:

Cazul I $\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow \Delta > 0$

În acest caz soluțiile ecuației caracteristice (10) sunt reale și distincte:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,. \qquad \text{(A2-12)}$$

Se poate verifica imediat că, substituind soluțiile $x_1(t) = \exp(r_1 t)$ și $x_2(t) = \exp(r_2 t)$ în wronskianul (A2-9), acesta nu se anulează. Prin urmare, conform discuției de mai sus, integralele particulare $x_1(t)$ și $x_2(t)$ formează un sistem fundamental și soluția generală a ecuației diferențiale (A2-7) va fi combinația liniară:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{r_1 t} + B \cdot \mathrm{e}^{r_2 t}\text{, adică} \qquad \text{(A2-13)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\cdot t} + B \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\cdot t} = \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[A \cdot \exp\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\cdot t\right)\right], \end{aligned} \qquad \text{(A2-14)}$$

unde A și B sunt constante ce pot fi determinate pe baza unor condiții inițiale în problema de fizică. Se observă (în particular, pentru $\gamma > 0$) că ambele soluții ale ecuației caracteristice sunt negative, deci ambii termeni ai soluției generale vor tinde la zero când variabila t tinde la infinit.

Cazul II $\gamma = \omega_0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

Soluțiile ecuației caracteristice (A2-10) sunt reale și egale:

$$r = r_1 = r_2 = -\gamma\,. \qquad \text{(A2-15)}$$

În acest caz soluțiile $x_1(t)$ și $x_2(t)$ de forma propusă inițial sunt liniar dependente și wronskianul se anulează. Prin înlocuire directă în ecuația (A2-7), se verifică faptul că funcția $x_2(t) = t\exp(rt)$ este soluție particulară. Deoarece de această dată avem raportul $x_2(t)/x_1(t) = t$ neconstant, soluțiile particulare $x_1(t) = \exp(rt)$ și $x_2(t) = t\exp(rt)$ sunt liniar independente și wronskianul este nenul. Soluția generală a ecuației diferențiale (A2-7) va fi atunci o combinație liniară a celor două funcții:

$$x(t) = A \cdot e^{rt} + Bt \cdot e^{rt} = e^{-\gamma t}(A + Bt), \tag{A2-16}$$

unde constantele A și B se pot determina din condițiile inițiale. Și acest gen de soluție tinde la zero, pentru $t \to \infty$, indiferent de valorile coeficienților A și B.

Cazul III $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow \Delta < 0$

În acest caz soluțiile ecuației caracteristice (A2-10) sunt complex conjugate ($r_1 = r_2^*$):

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{A2-17}$$

Soluțiile particulare $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt liniar independente și deci soluția generală se scrie:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A \cdot \exp\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right) + B \cdot \exp\left(-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right)\right]. \tag{A2-18}$$

Se poate introduce notația $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ și folosind formula lui Euler, soluția (A2-18) se poate pune sub forma echivalentă:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}(A\cos\omega_1 t + iA\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t - iB\sin\omega_1 t) = \\ &= e^{-\gamma t}[\cos(\omega_1 t)(A + B) + \sin(\omega_1 t)(iA - iB)]. \end{aligned} \tag{A2-19}$$

Folosind renotările $A + B = \mathsf{A}_0\cos\varphi$, și $i(A - B) = -\mathsf{A}_0\sin\varphi$, cu A_0 pozitiv, relația (A2-19) se poate rescrie astfel:

$$x(t) = \mathsf{A}_0\, e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi). \tag{A2-20}$$

Funcția (A2-20) este o soluție de tip cvasiarmonic, pentru care constantele A_0 și φ se pot determina din condiții suplimentare. O situație particulară a acestui caz este aceea în care $\gamma = 0$, și deci $\omega_1 = \omega_0$. Ecuația diferențială omogenă (A2-7) devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{A2-21}$$

cu soluția obținută din particularizarea expresiei (A2-20):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{A2-22}$$

Soluția (A2-22) este numită armonică, și se poate exprima și cu funcția sinus, prin schimbarea corespunzătoare a fazei inițiale φ.

Etapa 2) Dacă $f(t) \neq 0$, ecuația (A2-6) este neomeogenă. Se aplică următoarea teoremă:

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordinul II este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației diferențiale omogene corespunzătoare și o soluție particulară oarecare a ecuației neomogene.

Dacă $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ este soluția generală a ecuației omogene și $x_p(t)$ este o integrală particulară a celei neomegene, atunci $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + x_p(t)$ va fi integrala generală a ecuației diferențiale neomogene. O integrală particulară $x_p(t)$ a ecuației diferențiale neomogene se poate obține din integrala generală a ecuației omogene prin metoda variației constantelor a lui Lagrange. Aplicarea metodei variației constantelor este uneori incomodă deoarece se ajunge la integrale ce nu pot fi evaluate decât prin aproximație. Când coeficienții ecuației diferențiale sunt însă constanți, atunci pentru anumite forme ale neomogenității se poate determina o integrală particulară fără a se folosi metoda variației constantelor. Dintre toate tipurile de neomogenități pentru care teoria matematică oferă soluții particulare, ne vom opri doar asupra celor de interes pentru lucrarea de față, adică de forma:

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t). \tag{A2-23}$$

În acest caz, soluția particulară se caută de forma:

$$x_p(t) = a^*\cos(\omega t) + b^*\sin(\omega t), \tag{A2-24}$$

chiar și atunci când unul dintre coeficienții a și **b** este nul. Aici a^* sau b^* se determină prin metoda coeficienților nedeterminați, adică $x_p(t)$ de forma (A2-24) se înlocuiește în ecuația (A2-6) și se identifică separat coeficienții termenilor restrânși în $\cos(\omega t)$ și $\sin(\omega t)$.