DIFRACŢIA FRESNEL

1. Scopul lucrării

Lucrarea prezintă o metodă de determinare a lungimii de undă pe baza difracţiei de tip Fresnel produsă pe un orificiu circular.

2. Teoria lucrării

Fenomenul de difracţie este un fenomen tipic ce apare la propagarea undei, atunci când suprafaţa de undă este limitată de obstacolele întâlnite. În esenţă ea reprezintă ansamblul fenomenelor datorate naturii ondulatorii a luminii, fenomene care apar la propagarea sa într-un mediu cu caracteristici eterogene foarte pronunţate. În sens restrâns, difracţia constă în fenomenul de ocolire aparentă a obstacolelor de mici dimensiuni de către lumină, sau altfel spus, în devierile de la legile opticii geometrice.

Difracţia Fresnel se realizează atunci când sursa se află la o distanţă destul de apropiată de obstacol, astfel încât curbura fronturilor de undă nu mai poate fi neglijată.

Considerăm o sursă de unde monocromatice S, plasată în faţa unui ecran opac prevăzut cu un orificiu circular. Conform celor discutate anterior se produce fenomenul de difracţie, consecinţă a faptului că suprafaţa de undă sferică este parţial obturată. (Fig. 1)

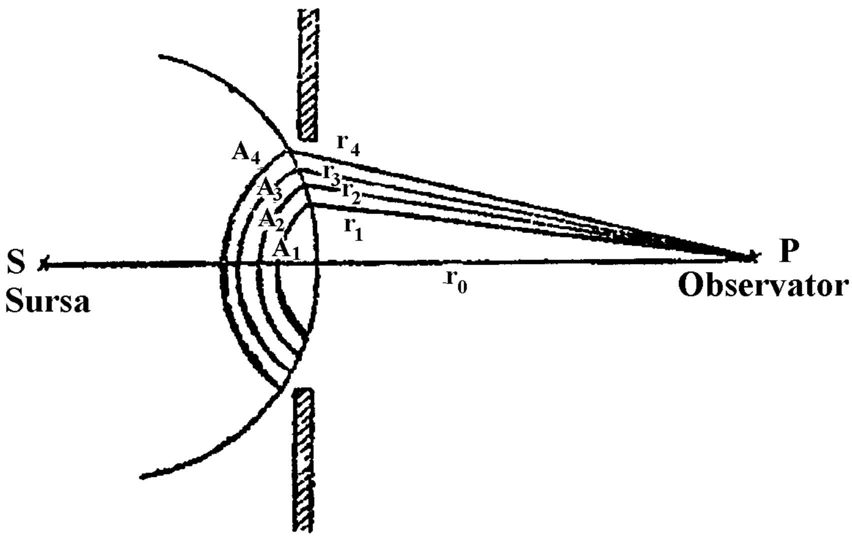

Fig. 1.

Datorită simetriei problemei faţă de axa SP, evaluarea intensităţii într-un punct *P* situat pe axa SP, poate fi făcută simplu prin metoda zonelor Fresnel.

Frontul de undă sferic ce ajunge în faţa acestui orificiu se împarte în zone Fresnel, prin aplicarea metodei zonelor lui Fresnel.

Construcţia zonelor Fresnel se realizează în modul următor: se duce din punctul P o perpendiculară pe suprafaţa de undă, $A_0P = r_0$. Apoi din *P* se construieşte, $A_1P = r_1 = r_0 + \lambda/2$. Există o familie de drepte cu lungimea r_1, iar locul geometric al intersecţiei lor cu suprafaţa de undă este un cerc. Cercul delimitează prima zonă Fresnel, de forma unei calote sferice.

Se construieşte apoi dreapta $A_2P = r_2 = r_0 + 2\lambda / 2$.

A doua zonă Fresnel este o zonă sferică delimitată de două cercuri, intersecţiile familiilor de drepte r_1 şi r_2 cu suprafaţa de undă. Analog se construiesc toate zonele Fresnel.

Construcţia s-a făcut respectându-se condiţia geometrică:

$$A_1P - A_0P = A_2P - A_1P = ... = \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

Se observă că distanţele de la cele două frontiere ale unei zone la punctul *P*, diferă cu $\frac{\lambda}{2}$.

Fiecare zonă Fresnel constituie o sursă secundară de unde. Fiecare undă secundară determină în punctul de observaţie *P*, câte o oscilaţie reprezentată printr-un vector numit fazor, a cărui mărime şi fază este determinată de drumul optic parcurs de la sursa secundară (zona Fresnel) până în punctul de observaţie. Prima zonă emite o undă secundară de amplitudine a_1, a doua zonă emite o undă secundară de amplitudine a_2,...... ş.a.m.d.

Din relaţia (1) rezultă că oscilatiile care reprezintă undele în *P*, de la două zone vecine sunt în opoziţie de fază.

Undele vecine fiind în opoziţie de fază, amplitudinea rezultantă în *P* se scrie:

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... \tag{2}$$

În cazul discutat, zonele Fresnel având arii egale, amplitudinile sunt influenţate numai de drumurile parcurse de unde şi de unghiul de înclinare. Acestea crescând amândouă, amplitudinile undelor secundare descresc odată cu mărimea rangului zonei Fresnel, adică:

$$a_1 > a_2 > a_3 .... > a_n \tag{3}$$

Variaţia monotonă permite, cel puţin într-o primă aproximaţie, să se considere amplitudinea undei provenită de la o zonă ca media aritmetică a amplitudinii undelor provenite de la zonele vecine:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \tag{4}$$

Scriind formula (2) în conformitate cu relaţia (4):

$$A = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2} \right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2} \right) + ...$$

se observă că fiecare paranteză din relaţia anterioară este nulă, ceea ce reduce expresia amplitudinii rezultante la:

$$A = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_n}{2} \tag{5}$$

cu semnul (+) dacă n este impar şi $(-)$ dacă n este par.

Deci amplitudinea rezultantă prezintă o valoare maximă pentru număr impar de zone şi o valoare minimă pentru număr par de zone.

Când *n* devine foarte mare, a_n devine practic nul şi relaţia (5) se reduce la $A \approx \frac{a_1}{2}$, ceea ce arată că efectele de difracţie trebuie luate în consideraţie numai în cazul unui număr mic de zone Fresnel. Dacă numărul acestora este mare, abaterea de la propagarea rectilinie este neglijabilă, obstacolul nefăcând altceva decât să delimiteze fasciculul de unde.

Deoarece intensitatea este proporţională cu pătratul amplitudinii, intensitatea în centrul figurii de difracţie este maximă pentru un număr impar de zone Fresnel şi minimă pentru un număr par de zone Fresnel.

În cazul difracţiei Fresnel, figura de difracţie constă din cercuri alternative luminoase şi întunecate.

Stabilim acum legătura între numărul de zone Fresnel şi distanţa r (poziţia observatorului). Notaţiile sunt exemplificate în figura (2). Din relaţia (1) rezultă că:

$$\delta_k = A_k P - A_0 P = k\frac{\lambda}{2}$$

În triunghiul OPA_k:

$$\left(OA_0 + r\right)^2 = \left(r + \delta_k\right)^2 - r_k{}^2$$

Suprafaţa de undă având o curbură mică, neglijând OA_0^2 şi neglijând δ^2 (λ mic) rezultă:

$$2OA_0 r = 2r\delta_k - r_k^2 .$$

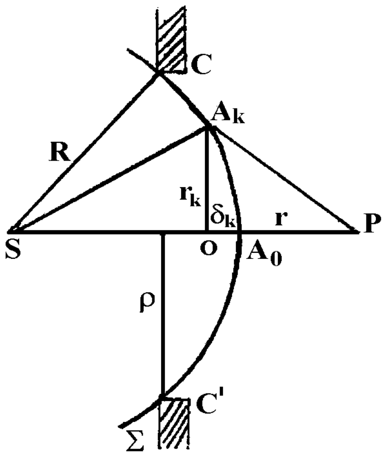

Fig. 2.

Din triunghiul SOA_k:

$$r_k^2 = R^2 - \left(R - OA_0\right)^2 = 2ROA_0$$

Din ultimele două relaţii rezultă că:

$$\frac{r}{R} = \frac{2r\delta_k}{r_k^2} - 1 .$$

În consecinţă se obţine $r_k^2 = \frac{Rr}{R+r} 2\delta_k$; unde

$$\delta_k = k\lambda ;\ \Rightarrow\ r_k^2 = k\frac{Rr}{R+r}\lambda .$$

Suprafaţa de undă având o curbură mică, rezultă aria calotei sferice πr_k^2. Ca urmare aria zonei Fresnel cu frontierele r_{k+1} şi r_k va fi:

$$S = \pi r_{k+1}^2 - \pi r_k^2 = \pi\frac{Rr}{R+r}\lambda$$

Se observă că ariile zonelor sunt aceleaşi (pentru R şi r_0 constante) şi nu depind de ordinul k al zonei.

Numărul total de zone Fresnel cuprinse în orificiul circular de rază ρ va fi:

$$n = \frac{\pi\rho^2}{S} = \frac{\rho^2}{\lambda}\frac{R+r}{Rr}$$

De unde obţinem:

$$\lambda = \frac{\rho^2 r + \rho^2 R}{nrR} \tag{6}$$

Această ecuaţie poate fi pusă sub forma:

$$n = \frac{1}{r}\cdot\frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\cdot\lambda} \tag{7}$$

Ecuaţia (7) arată că dependenţa $n = f\left(\frac{1}{r}\right)$ are o formă liniară, de pantă:

$$m = \frac{\rho^2}{\lambda} \tag{8}$$

Această observaţie stă la baza celei de-a doua metode de determinare a lungimii de undă.

3. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental (fig. 3) cuprinde un bec B, dispus la capătul unui banc optic pe care se află: o lentilă L_1 ce focalizează lumina becului pe o deschidere mică S practicată într-o foiţă metalică subţire, realizându-se astfel o sursă cât mai punctiformă; un filtru F care selectează lumina monocromatică ce cade pe ecran; ecranul E prevăzut cu orificiul circular de rază ρ pe care se produce difracţia (sistemul permite alegerea a trei valori pentru ρ); un sistem de vizare alcătuit dintr-o lentilă L_2.

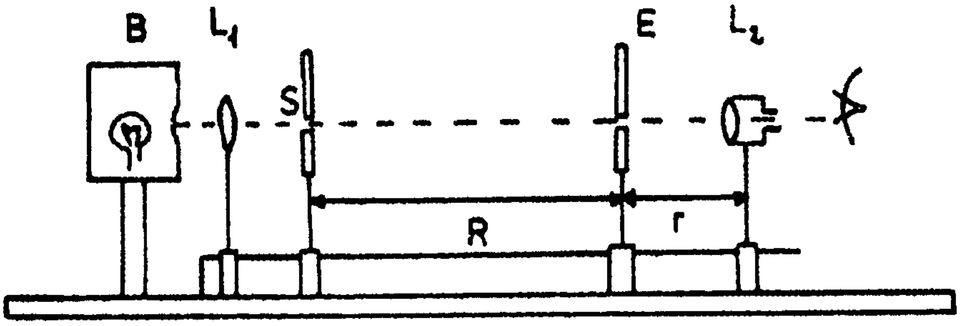

Fig. 3.

4. Modul de lucru

Se alimentează becul de la reţeaua de 220Vc.a. Se reglează distanţa între lentila L_1 şi deschiderea S astfel încât aceasta din urmă să se afle în focarul lentilei. Se deplasează ecranul E până când distanţa *R* este de aproximativ 50 cm până la 70 cm. Se are grijă ca E să fie perpendicular pe axa optică a bancului optic. Se îndepărtează L_2 începând din apropierea ecranului, punându-se la punct figura de difracţie. Numărul total n al zonelor Fresnel se constată experimental că este egal cu suma dintre numărul total al zonelor luminoase (inclusiv zona luminoasă marginală ce apare totdeauna) şi numărul inelelor întunecoase (inclusiv punctul central întunecat ce apare la unele distanţe). Spre exemplificare, în figura (4), sunt prezentate câteva cazuri.

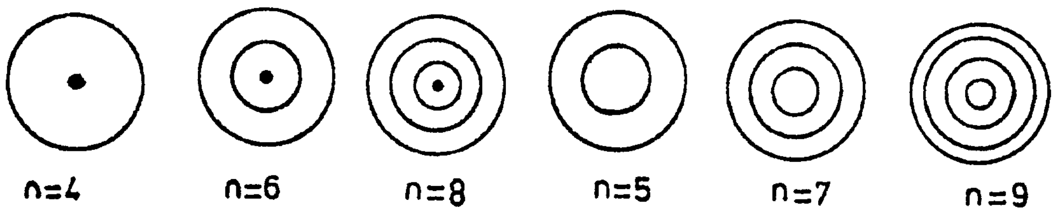

Fig. 4.

Îndepărtând L_2 faţă de E, aspectul figurii de difracţie variază, numărul inelelor scăzând pe măsură ce ne îndepărtăm.

Pentru distanţa *R* fixă (mărimea sa este aleasă pentru a avea o imagine clară a figurii de difracţie), se variază distanţa *r*, astfel încât să se obţină una din figurile de difracţie din figura (4). Se determină *r* la cel puţin cinci figuri de difracţie, corespunzătoare la numere *n* de zone Fresnel diferite (uzual n cuprins între 4 şi 9). Valoarea distanţei *r* se determină ca medie a cinci măsurători. Se repetă măsurătorile pentru încă două valori ale distanţei *R*.

Rezultatele măsurătorilor se trec într-un tabel. Tabelul este întocmit pentru o distanţă *R* fixă şi un ρ fix. Se vor întocmi trei astfel de tabele (pentru fiecare *R* fix câte un tabel).

Tabel

Rezultatele măsurătorilor poziţiilor diverselor figuri de interferenţă – difracţie Fresnel

<table>
<tr><th>R</th><th>n</th><th>r_i
(mm)</th><th>$\bar{r}$
(mm)</th><th>$\sigma_{\bar{r}}$</th><th>$n\bar{r}$
(mm)</th><th>$\bar{\lambda} = \dfrac{\rho^2(\bar{r}+R)}{n\bar{r}R}$
(nm)</th><th>$\sigma_{\bar{\lambda}}$</th><th>$\bar{\lambda}$
(nm)</th><th>$\sigma_{\bar{\lambda}}$</th></tr>
<tr><td rowspan="25"></td><td rowspan="5"></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="25"></td><td rowspan="25"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

5. Prelucrarea datelor experimentale

METODA 1. Relaţia (6) permite calculul lungimii de undă λ dacă cunoaştem valorile parametrilor *R*, *r* şi *n*. O dată calculate aceste valori, vom determina valoarea medie $\overline{\lambda}$ a lungimii de undă şi abaterea sa standard $\sigma_{\overline{\lambda}}$ cu ajutorul relaţiilor de definiţie:

$$\overline{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i}{N}; \qquad \sigma_{\overline{\lambda}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i - \overline{\lambda}\right)^2}{N(N-1)}} \tag{9}$$

unde *N* reprezintă numărul de determinări al lungimilor de undă.

Rezultatul final va fi prezentat sub forma standard:

$$\lambda = \overline{\lambda} \pm \sigma_{\overline{\lambda}}$$

METODA 2. Prezentăm acum metoda grafică de determinare a lungimii de undă: se trasează pe hârtie milimetrică, pentru fiecare distanţă *R*, graficul $n = f(1/r)$ în funcţie de numărul *n* al zonelor Fresnel, care, conform ecuaţiei (7), trebuie să reprezinte o dreaptă. Comparând panta teoretică (8) cu panta experimentală a dreptei (7) se obţine lungimea de undă. Se face media valorilor lungimilor de undă obţinute pentru diversele distanţe *R*.

O alternativă a acestei metode, mai corectă din punct de vedere statistic, prevede efectuarea de 10 ori a tabelului (n, r_{mediu}) pentru $n \in (4,,6,7,8,9)$, la distanţă *R* fixă. Pentru fiecare tabel se obţine pe calea grafică expusă mai sus, lungimea de undă. Repetând procedura expusă pentru 3 distanţe *R* diferite, obţinem 30 de lungimi de undă pentru care putem media şi abaterea standard cu relaţiile (9).

Tabelul anterior este întocmit pentru o distanţă *R* fixă şi un ρ fix. Se vor întocmi trei astfel de tabele pentru fiecare distanţă *R* fixă.

Se dă: diametrul ρ = 0.4 mm.

6. Întrebări

1. Ce este difracţia luminii? Ce este difracţia Fresnel?
2. Desenaţi schema simplificată a dispozitivului experimental utilizat pentru studiul difracţiei Fresnel.
3. Unde se produce difracţia în dispozitivul experimental de mai sus?
4. Ce este o undă monocromatică? Cum se obţine lumina monocromatică a cărei lungime de undă se determină prin studiul difracţiei Fresnel?
5. Ce reprezintă lungimea de undă? Dar frecvenţa undei? În ce relaţie se găsesc ele?
6. Ce reprezintă zonele Fresnel? Unde şi cum se construiesc ele? Care este semnificaţia lor?
7. Care este semnificaţia mărimilor din ecuaţia $\lambda = \dfrac{\rho^2(r+R)}{nrR}$?
8. Desenaţi figura de difracţie pe care aţi văzut-o pentru *n*=5.