

DETERMINAREA CONSTANTEI RYDBERG

1. Scopul lucrării

Determinarea constantei implicate în seriile spectrale ale atomilor hidrogenoizi.

2. Teoria lucrării

Atomii fiecărui element chimic emit, atunci când sunt excitați (de exemplu într-o descărcare în gaz), un spectru optic caracteristic de radiații, astfel că fiecare element poate fi identificat după spectrul său. Aceasta este esența analizei spectrale calitative. De asemenea, atomii pot fi excitați prin absorbție de radiație, spectrul de absorbție fiind identic cu cel de emisie. Spectrele elementelor chimice sunt cu atât mai complicate, cu cât numărul lor de ordine Z este mai mare. Spectrele optice ale atomilor sunt datorate electronilor optici, adică electronilor ce se găsesc pe orbita periferică.

Spectroscopiștii experimenatori au stabilit că toate liniile din diferitele serii spectrale ale atomului de hidrogen pot fi descrise printr-o relație generală care dă lungimea de undă a liniilor spectrale /1-5/:

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = T(m) - T(n) = \frac{R_H}{m^2} - \frac{R_H}{n^2} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1)$$

unde n și m sunt numere întregi, $T(m)$ și $T(n)$ sunt termeni spectrali, iar R_H este constanta Rydberg. $\tilde{\nu}_{mn}$ este numărul de undă (cunoscut și ca frecvență spațială), definit ca inversul lungimii de undă λ_{mn} . Relația (1) este formularea matematică a principiului de combinare Rydberg-Ritz : toate frecvențele (sau numerele de undă) ale atomului de hidrogen pot fi scrise ca diferența a doi termeni spectrali iar dacă există în spectru frecvențele (spațiale) $\tilde{\nu}_{mk}$ și $\tilde{\nu}_{nk}$, atunci există de asemenea diferența lor $\tilde{\nu}_{mn}$.

Explicarea liniilor spectrale ale atomului de hidrogen a constituit o verificare de succes a teoriei atomului de hidrogen, dată de Niels Bohr în 1913 (și pentru care a primit premiul Nobel pentru fizică în 1922). Bohr afirmă că nu există decât anumite orbite permise pentru electron, corespunzătoare unor stări staționare.

Astfel, el emite următoarele postulate:

I. Atomul se poate afla într-un șir discret de stări staționare, determinate de șirul discret $E_1, E_2, \dots, E_n \dots$ de valori ale energiei totale. În aceste stări atomul nici nu emite, nici nu absoarbe energie.

II. Energia atomului poate varia discontinuu, prin trecerea de la o stare staționară de energie totală E_n la o altă stare staționară de energie totală E_m . Frecvența fotonului absorbit sau emis este dată de relația:

$$\nu_{mn} = \frac{|E_n - E_m|}{h}, \quad (2)$$

procesul de absorbție având loc în cazul în care electronul trece de pe o orbită mai apropiată de nucleu pe una mai depărtată, iar emisia atunci când parcurge drumul invers.

III. Mărimea momentului cinetic al electronului pe orbitele circulare permise în jurul nucleului trebuie să fie egală cu un număr întreg de \hbar :

$$L = mvr = n\hbar \quad (3)$$

unde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ este constanta lui Planck redusă, h este constanta lui Planck iar n se numește număr cuantic principal și poate lua valorile $n = 1, 2, 3, \dots$

Astfel, considerând modelul planetar al atomului de hidrogen cu nucleul (protonul) imobil, se obține că energia totală E_n (compusă din energia cinetică a electronului în

mişcarea sa în jurul nucleului și energia electrostatică de interacție coulombiană nucleu-electron) pe orbita n este cuantificată:

$$E_n = -\frac{e^4 m_0}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

unde m_0 este masa electronului, e este sarcina electronului și ε_0 este constanta electrică a vidului.

Energia totală a atomului de hidrogen este negativă (ecuația (4)), ceea ce exprimă faptul că electronul se află legat în câmpul electromagnetic al nucleului.

Cea mai scăzută energie a atomului de hidrogen (numită și stare fundamentală) corespunde numărului cuantic $n = 1$ și are valoarea de $-13,6$ eV. Ionizarea atomului de hidrogen, adică spargerea lui într-un nucleu și un electron corespunde unei depărtări practic infinite dintre aceste particule, energia minimă a acestui sistem fiind zero. Energia minimă necesară pentru a ioniza atomul de hidrogen aflat în starea fundamentală se numește energie de ionizare și are valoarea de $13,6$ eV.

În mecanica cuantică energia atomului de hidrogen, expresia (4), se află prin integrarea ecuației Schrödinger, fără a se mai introduce condiția (3).

Folosind relațiile (2) și (4) se obține:

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (5)$$

care comparată cu (1), conduce la relația:

$$R_H = \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}, \quad (6)$$

expresie obținută în cazul modelului în care s-a considerat protonul imobil.

Din relația (2) pot fi găsite toate lungimile de undă ale liniilor diferitelor serii spectrale ale hidrogenului. O serie spectrală reprezintă totalitatea liniilor spectrale care au un nivel energetic de bază comun (fig.1).

Astfel există seria Lyman la care nivelul energetic comun este corespunzător lui $m = 1$ (în relația (5)), iar $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ (adică seria Lyman conține toate tranzițiile în care este prezent nivelul fundamental de energie) și are liniile în domeniul ultraviolet; seria Balmer (vizibil) la care $m = 2$ și $n = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ (adică seria Balmer conține toate tranzițiile în care este prezent primul nivel excitat de energie); seria Paschen la care $m = 3$ și $n = 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ iar liniile spectrale au lungimile de undă corespunzătoare radiațiilor din infraroșu etc. Într-o serie spectrală, radiația cu lungimea de undă cea mai mare se numește linie α (pentru aceasta $|n - m| = 1$, iar energia este cea mai scăzută din seria respectivă), următoarea linie β (pentru aceasta $|n - m| = 2$) ș.a.m.d.

3. Principiul experimentului

În această lucrare se va studia seria spectrală Balmer, determinându-se lungimile de undă pentru liniile $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta, H_\epsilon$ și H_∞ (limita seriei Balmer). Astfel, liniile spectrale de mai sus ale hidrogenului înregistrate pe o placă fotografică (spectrogramă) plasată în planul focal al unui spectroscop cu prismă sunt prezentate în partea de sus a figurii 2.

Pentru determinarea lungimilor de undă ale liniilor hidrogenului se folosește un spectru cunoscut, înregistrat la același spectroscop și în condiții identice, al mercurului. Lungimile de undă ale liniilor mercurului, de la stânga la dreapta în partea inferioară a spectrogramei din figura 2, sunt 623.4, 612.3, 579.0, 577.0, 546.1, 535.4, 435.8, 434.7, 433.9,

407.8 și 404.7 nm. Astfel, spectrul mercurului este folosit pentru etalonarea în lungimi de undă a spectrogramei.

În cazul seriei Balmer, relația (1) devine:

$$\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ unde } n = 3, 4, 5, 6, \dots \quad (7)$$

de unde rezultă constanta Rydberg:

$$R_H = \frac{4n^2}{\lambda_n(n^2 - 4)} \quad (8)$$

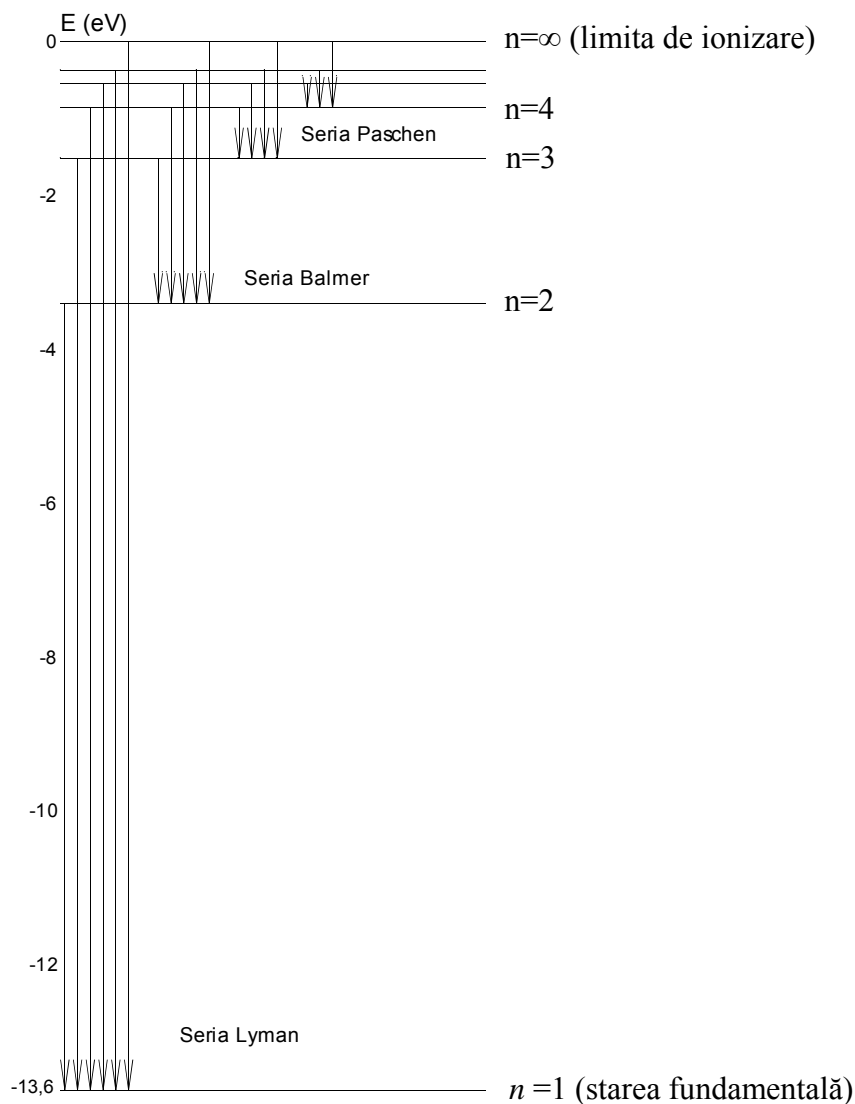


Fig. 1

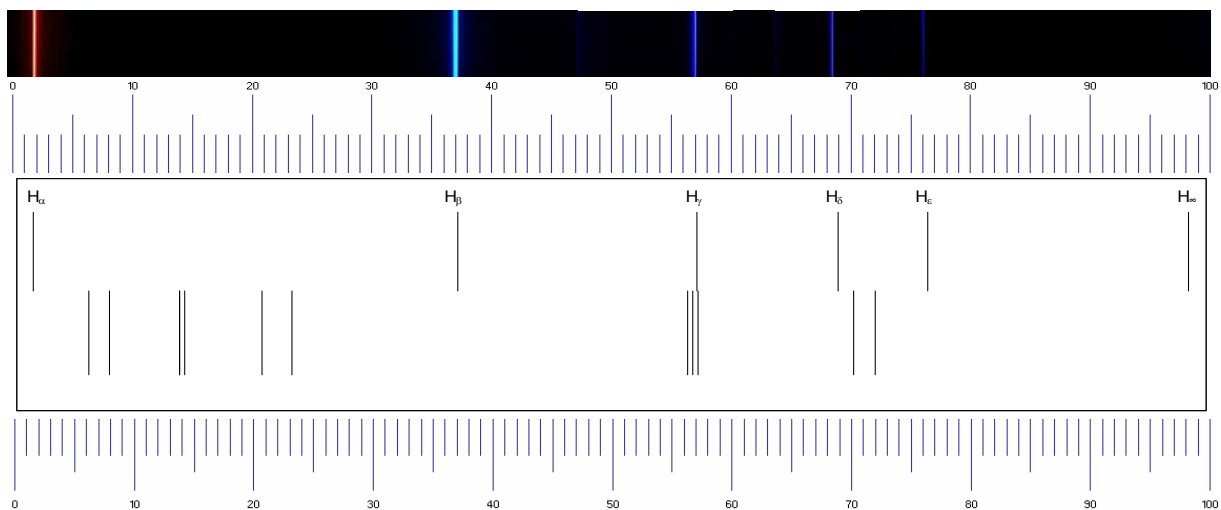


Fig. 2

4. Dispozitivul experimental

Studierea spectrogramei se face cu un microscop. Măsuța microscopului poate fi deplasată în plan orizontal, pe două direcții perpendiculare, cu ajutorul a două șuruburi. Deplasarea în lungul spectrului permite măsurarea poziției unei linii spectrale pe o riglă gradată în mm folosind un vernier cu precizia de 0,1 mm. Pentru fixarea poziției liniei dorite, ocularul microscopului este prevăzut cu un fir reticular.

Pentru efectuarea lucrării sunt necesare: spectrograma cu spectrul hidrogenului atomic vizibil (seria Balmer), cu spectrul mercurului și un microscop.

5. Modul de lucru și prelucrarea datelor experimentale

Se identifică spectrul mercurului și al hidrogenului privind întâi spectrograma cu ochiul liber și apoi la microscop.

Privind prin ocular, se potrivește oglinda microscopului pentru a avea o bună iluminare a spectrogramei. Se deplasează măsuța microscopului în plan orizontal astfel încât zona de pe spectrogramă înconjurată cu un cerc din figura 3 să fie pe axa obiectivului microscopului. Pentru a nu se sparge spectrograma, poziția verticală inițială a microscopului trebuie să fie cu obiectivul lipit de spectrogramă. Se ridică treptat tubul microscopului, până când liniile spectrale apar clare. Se verifică paralelismul între liniile spectrale și firul reticular, așezarea paralelă a firului reticular făcându-se prin rotirea ocularului.

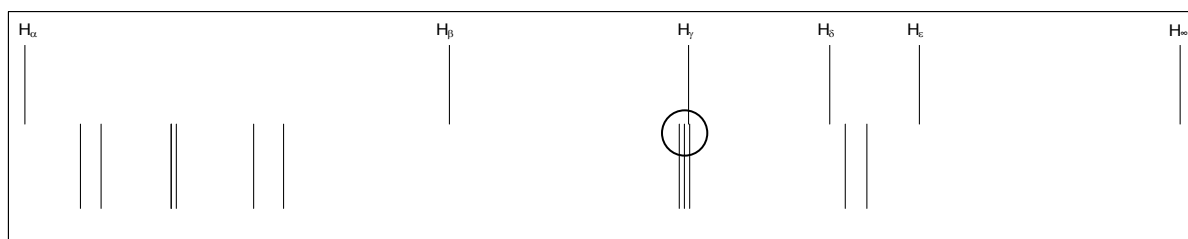


Fig. 3

Pentru a evita confuziile dintre cele două spectre, cel al mercurului și cel al hidrogenului, se deplasează spectrograma astfel încât să se vadă doar spectrul mercurului, așa cum se prezintă în figura 4.

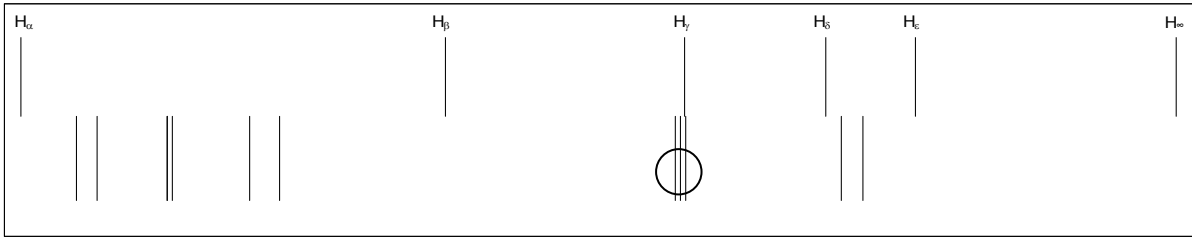


Fig. 4

Pornind dintr-una dintre marginile spectrului, cum este indicat în figura 5, se citesc pe rigla gradată (prin suprapunerea firului reticular cu fiecare linie) pozițiile x_i ale celor 11 linii ale mercurului, și se completează tabelul 1.

Tabelul 1

Etalonarea spectrogramei cu ajutorul spectrului mercurului

λ (nm)	623.4	612.3	579.0	577.0	546.1	535.4	435.8	434.7	433.9	407.8	404.7
x (mm)											
$1/\lambda^2$ (μm^{-2})	2,573	2,667	2,983	3,004	3,353	3,489	5,265	5,292	5,312	6,013	6,106

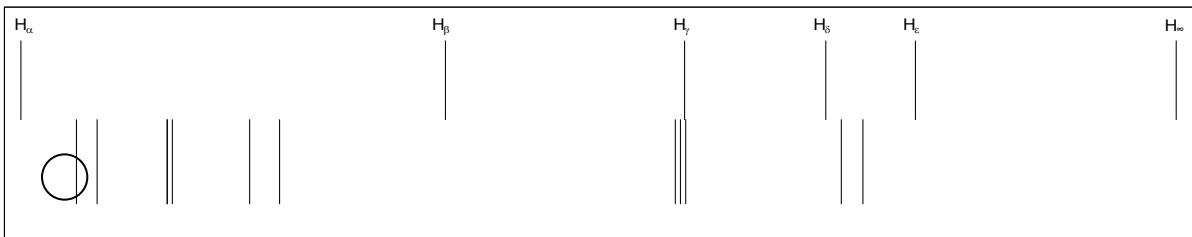


Fig. 5

Atenție : tabelul poate fi completat atât de la dreapta la stânga cât și de la stânga la dreapta. Priviți cu ochiul liber spectrograma aflată pe măsura microscopului (fără a o atinge) și figura 2 pentru a ști din care parte începeți completarea tabelului.

Se poziționează din nou obiectivul microscopului ca în figura 3, se deplasează spectrograma mai întâi ca în figura 6, și se citesc, după ce s-a deplasat spectrograma ca în figura 7, pozițiile x_j ale celor 6 linii din seria hidrogenului ($H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta, H_\epsilon$ și H_∞) și se trec în tabelul 2.

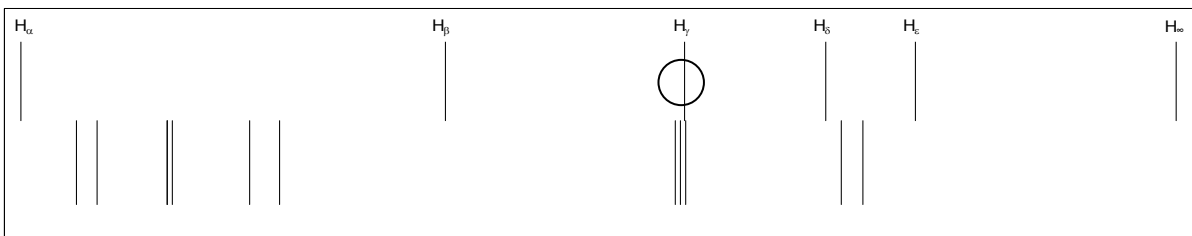


Fig. 6

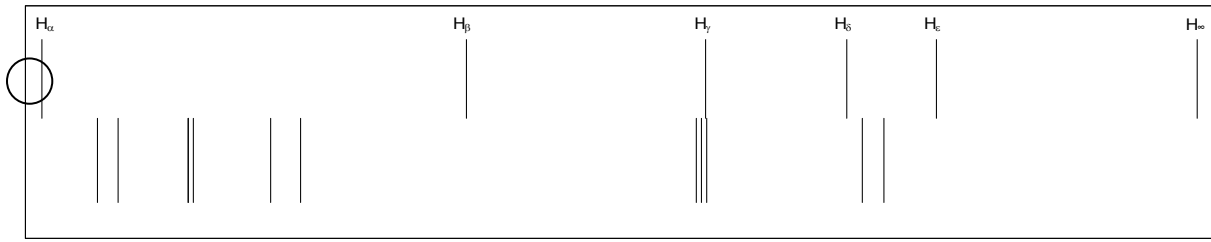


Fig. 7

Tabelul 2

Determinarea spectrului hidrogenului (seria Balmer) și a constantei Rydberg

Linia	x (mm)	$1/\lambda^2$ (μm^{-2})	λ (nm)	n	R_H	$\langle R_H \rangle$	$\sigma_{\langle R_H \rangle}$
H_α							
H_β							
H_γ							
H_δ							
H_ϵ							
H_∞							

Se trasează pe hârtie milimetrică curba de etalonare $\lambda = f(x)$ pentru mercur.

Comentariu. De fapt, curba de etalonare adevărată o constituie dependența $x(\lambda)$ dar pentru motive ce vor fi explicate în continuare, preferăm reprezentarea $\lambda(x)$. Am amintit că spectrograma a fost înregistrată cu un spectroscop cu prismă. Elementul dispersiv al spectroscopului – prisma – are un indice de refracție a cărui dependență într-o formă simplificată este liniară în $\frac{1}{\lambda^2}$ (formula lui Cauchy /6/). Poziția unei linii spectrale pe spectrogramă este aproximativ proporțională cu indicele de refracție al prismei adică, în cele din urmă, este liniară în $\frac{1}{\lambda^2}$ (sau, echivalent, funcția $\frac{1}{\lambda^2}$ este liniară în x).

Astfel, dacă folosim poziția x drept axă orizontală, pe același grafic pe care reprezentăm dependența $\lambda(x)$ folosind axa verticală din stînga, se reprezintă folosind axa verticală din dreapta graficul $\frac{1}{\lambda^2} = f(x_i)$, care reprezintă o dreaptă, a cărei ecuație poate fi scrisă $\frac{1}{\lambda^2} = A + B \cdot x$, și unde coeficienții A și B se pot obține prin metoda celor mai mici pătrate; aici este de fapt câștigul reprezentării $\frac{1}{\lambda^2} = f(x_i)$. Această ultimă reprezentare permite o mai bună determinare a lungimilor

de undă ale liniilor spectrale ale hidrogenului care se găsesc în afara domeniului acoperit de spectrul mercurului (de exemplu, din ecuația $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A + B \cdot x}}$). Și dependența (liniară, de fapt) $x\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ sau

$\frac{1}{\lambda^2}(x)$ poate fi considerată – în sens extins – tot o curbă de etalonare.

La trasarea curbei de etalonare $\lambda = f(x)$, scala corespunzătoare lungimilor de undă trebuie să conțină intervalul $\lambda \in (340 \div 660)$ nm .

La trasarea curbei de etalonare $\frac{1}{\lambda^2} = f(x_i)$, scala corespunzătoare inversului pătratelor lungimilor de undă trebuie să conțină intervalul $\frac{1}{\lambda^2} \in (2 \div 10) \mu\text{m}^{-2}$.

Având pozițiile x_j ale celor 6 linii ale hidrogenului, se determină din curba de etalonare lungimile de undă ale liniilor $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma \dots$ necesare pentru calcularea constantei lui Rydberg. Lungimile de undă se pot obține fie din curba de etalonare $\lambda = f(x)$, fie din dependența liniară $\frac{1}{\lambda^2}(x)$ (determinarea lungimilor de undă ale liniilor spectrale ale hidrogenului poate fi făcută numai prin prelucrarea matematică a datelor, dar este foarte instructiv să se traseze diversele grafice, se poate discuta despre dispersia normală, despre formarea imaginilor într-un spectroscop cu prismă, despre interpolare și extrapolare, despre precizia interpolării și a extrapolării, și despre multe alte fenomene naturale).

Se calculează constanta Rydberg conform relației (8); valorile obținute se trec în tabelul 2.

Se calculează valoarea medie $\langle R_H \rangle = \frac{\sum_{i=1}^6 R_{H_i}}{6}$ și deviația standard a valorii medii

$$\sigma_{\langle R_H \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (R_{H_i} - \langle R_H \rangle)^2}{6 \cdot 5}}$$

și rezultatul final se scrie sub forma $R_H = \langle R_H \rangle \pm \sigma_{\langle R_H \rangle}$.

Se compară cu valoarea actuală dată de CODATA - The Committee on Data for Science and Technology of the International Council for Science (ICSU). Se compară și se comentează precizia cu care este cunoscută valoarea constantei lui Rydberg în raport cu valorile preciziei cu care sînt cunoscute alte mărimi fizice.

6. Întrebări (întrebările 12-16 sunt facultative pentru cei care doresc acest lucru)

1. Ce sunt liniile spectrale ?
2. Ce este lungimea de undă ? Dar numărul de undă ? În ce relații se găsesc acestea cu frecvența radiației ? Dar cu energia radiației ? În ce relație se află frecvența unei radiații cu numărul său de undă ?
3. Ce este o serie spectrală a hidrogenului ? Câte linii spectrale conține o serie spectrală ? Ce este limita unei serii spectrale ? Care este energia nivelului superior al tranziției corespunzătoare limitei seriei spectrale ? Dar numărul său cuantic principal ?
4. Ce este un termen spectral ?
5. Ce reprezintă principiul de combinare Rydberg-Ritz în studiul liniilor spectrale emise de atomi ? Care este utilitatea lui ? Ce este mai simplu (sau mai comod) de cunoscut : liniile spectrale sau termenii spectrali ? Justificați răspunsul.
6. Ce sunt atomii hidrogenoizi ?
7. Care au fost postulatele enunțate de Bohr pentru explicarea spectrului atomilor de hidrogen ?
8. Să se aranjeze în ordinea crescătoare a lungimilor de undă liniile spectrale : $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta, H_\epsilon$ și H_∞ . (echivalent, așezarea în ordinea crescătoare a frecvențelor, în ordinea crescătoare a numărului cuantic principal, în ordinea crescătoare a energiilor nivelurilor superioare etc)
9. Ce este o spectrogramă ? Ce este curba de etalonare a spectrogramei ? La ce folosește curba de etalonare a spectrogramei ?

10. Știind că linia H_{β} a seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 486 nm, să se determine constanta lui Rydberg. (Se dă formula $\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ unde $n = 3, 4, 5, 6, \dots$)
11. Știind că limita seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 364,6 nm, să se determine constanta lui Rydberg. (Se dă formula $\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ unde $n = 3, 4, 5, 6, \dots$)
12. Știind că linia H_{α} a seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 656 nm, să se determine limita seriei Balmer a hidrogenului. (Se dă formula $\tilde{\nu}_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$)
13. Știind că linia H_{α} a seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 656 nm, să se determine limita seriei Lyman a hidrogenului. (Se dă formula $\tilde{\nu}_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$)
14. Știind că linia H_{α} a seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 656 nm, să se determine lungimea de undă a liniei α a a seriei Lyman a hidrogenului. În ce domeniu spectral se găsește aceasta ? (Se dă formula $\tilde{\nu}_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$)
15. Știind că linia H_{γ} a hidrogenului are lungimea de undă de 434 nm, să se calculeze energia de ionizare a H aflat în starea fundamentală de energie.
(Se dă formula $\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ unde $n = 3, 4, 5, 6, \dots$)
16. Știind că linia H_{α} a seriei Balmer a hidrogenului are lungimea de undă de 656 nm, să se determine lungimea de undă a liniei β a seriei Lyman a C^{5+} .
(Se dă formula $\tilde{\nu}_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$)

Bibliografie

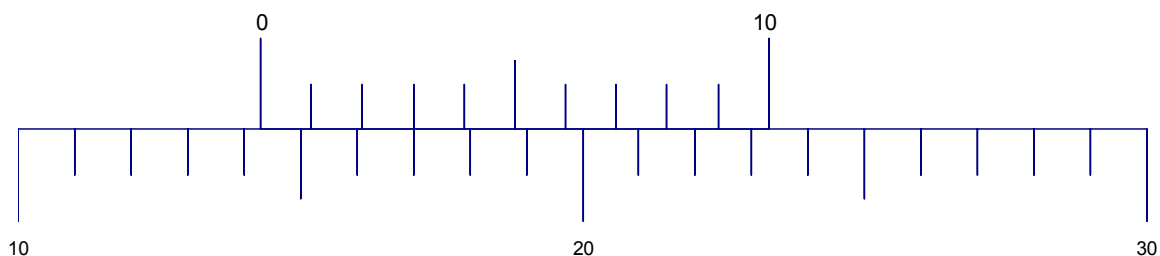
- /1/ Edouard Chpolski, Physique atomique, tome I, Editions Mir, Moscou, 1977, p.306-319
 /2/ Edouard Chpolski, Physique atomique, tome II, Editions Mir, Moscou, 1978, p.8
 /3/ B.H. Bransden, C.J. Joachain, Introducere în mecanica cuantică, Editura Tehnică, București, 1999, p.29
 /4/ B.H. Bransden, C.J. Joachain, Fizica atomului și a moleculei, Editura Tehnică, București, 1998, p.42
 /5/ I.M. Popescu, Fizică, vol II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, p.68
 /6/ Max Born, Emil Wolf, Principles of Optics. Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Seventh edition, Pergamon Press, Cambridge University Press, 1999, p.100
 /7/ <http://www.cfa.harvard.edu/amp/ampdata/kurucz23/sekur.html>,
<http://www.cfa.harvard.edu/amp/ampdata/databases.html>
 /8/ http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html
 /9/ <http://www.codata.org/index.html>
 /10/ <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>
 /11/ <http://physics.nist.gov/cuu/Reference/versioncon.shtml>
 /12/ http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen_spectral_series
 /13/ http://en.wikipedia.org/wiki/Balmer_series
 /14/ http://fr.wikipedia.org/wiki/Spectre_de_l%27atome_d%27hydrog%C3%A8ne
 /15/ http://fr.wikipedia.org/wiki/Spectre_de_l%27atome_d%27hydrog%C3%A8ne
 /16/ [http://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_spectrale_\(spectroscopie\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_spectrale_(spectroscopie))
 /17/ http://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Rydberg

Cum se citește o valoare pe un șubler (sau pe un goniometru) folosind un vernier:

1. Se privește scara principală (partea inferioară a figurii de mai jos) și se vede care este cea mai mică diviziune: aceasta reprezintă unitatea principală de măsură, iar ceea ce se va citi pe vernier va reprezenta fracțiuni din această unitate.
2. Se privește la numărul de gradații de pe vernier (partea superioară a figurii de mai jos) și se notează această valoare N . Precizia instrumentului este dată de raportul dintre unitatea principală și numărul de gradații de pe vernier. Vom numi această precizie unitate secundară.
3. Se vede unde se găsește zero-ul vernierului pe scara principală. Acesta este cuprins între 2 gradații pe scara principală. Deci poziția este dată de valoarea gradației din stânga pe scala principală, plus o fracțiune din unitatea principală, fracțiune care se citește cu ajutorul vernierului.
4. Se vede care dintre gradațiile vernierului este perfect în prelungirea unei gradații de pe scara principală. Astfel, fracția din unitatea principală, care se citește cu ajutorul vernierului, este egală cu produsul dintre indicele acestei gradații de pe vernier și unitatea secundară definită mai sus.

Exemplu

Cea mai mică diviziune pe scara principală este 1. Pe vernier sînt 10 diviziuni. Prin urmare, precizia este de $1/10$ din unitatea principală. Zero-ul vernierului este cuprins între 14 și 15 pe scala principală. Deci poziția este 14 plus ceva cuprins între 0 și 1. Se vede apoi că a 3-a gradație a vernierului vine perfect în prelungirea unei gradații de pe scara principală. Deci poziția depășește valoarea 14 cu $3 \cdot 1/10$, adică 0,3. Astfel poziția este 14,3.



Explicație matematică

1. Pe scara principală, fie a gradația de pe scala principală, imediat în stînga zero-ului vernierului.
2. Fie N numărul de gradații de pe vernier.
3. Astfel putem măsura cu o precizie egală cu a N -a parte din unitatea principală (diferența dintre două gradații vecine pe scala principală).
4. Fie p valoarea numerică a diferenței dintre două gradații vecine pe scala principală.
5. Astfel, avem o poziție de $a + \frac{x}{N} p$, unde $x = 0, 1, \dots, N - 1$.
6. Prin construcție, lungimea vernierului este egală cu $N - 1$ unități pe scala principală.
7. Deci, un interval de pe vernier este egal cu o lungime de $\frac{N - 1}{N} p$ unități de pe scala principală.
8. Fie y gradația de pe vernier care se prelungește precis cu o gradație de pe scara principală, unde $y = 0, 1, \dots, N - 1$.
9. Această gradație a vernierului este la poziția $a + \frac{x}{N} p + y \frac{N - 1}{N} p \in \mathbb{Z}$, sau, după ce se ajustează puțin, este la poziția (întreagă pe scala principală) $a + yp + \frac{x - y}{N} p \in \mathbb{Z}$. Dar $0 \leq |x - y| < N$. Singura posibilitate ca $a + yp + \frac{x - y}{N} p$ să fie un număr întreg este ca $x = y$.
10. În concluzie, avem valoarea poziției dată de $a + \frac{y}{N} p$, unde a este gradația de pe scala principală imediat în stînga zero-ului vernierului iar y reprezintă gradația de pe vernier care se prelungește exact cu o gradație de pe scala principală.