UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN BUCUREŞTI
DEPARTAMENTUL DE FIZICĂ

LABORATORUL DE TERMODINAMICĂ ŞI FIZICĂ STATISTICĂ

BN 119

STUDIUL DISTRIBUȚIEI STATISTICE POISSON

STUDIUL DISTRIBUȚIEI STATISTICE POISSON

1. Scopul lucrării

Se verifică condițiile experimentale de realizare a distribuției Poisson, aflându-se estimatele parametrului acestei distribuții.

2. Teoria lucrării

Să considerăm un detector iradiat cu un fascicul de particule ionizante, ce sunt statistic independente una de alta, ca de exemplu un fascicul de raze cosmice sau din fondul natural de radiații. Ajungerea uneia din particule în detector constituie un fenomen întâmplător (aleatoriu). De aceea, în cursul diferitelor intervale de timp egale, prin detector va trece un număr diferit de particule. Care este în aceste condiții probabilitatea $p_k(t)$ ca în cursul intervalului de timp t în detector să ajungă *k* particule ?

O astfel de problemă este tipică pentru un număr mare de fenomene ale fizicii nucleare, cele mai multe dintre ele deosebindu-se de cea prezentată numai prin aceea că în locul numărului de particule ce ajung în detector este luat în considerare numărul altor fenomene, ca de exemplu numărul de dezintegrări ale unei substanțe radioactive într-un anumit interval de timp, numărul de stele α pe o anumită suprafață dintr-o emulsie nucleară iradiată uniform, etc.

Pentru simplificare, în continuare se va vorbi numai despre numărul de evenimente ce au loc într-un interval de timp *t*.

Să considerăm un interval de timp $\mathrm{d}t$ foarte mic (la limită infinit mic) şi să presupunem că probabilitatea realizării în cursul acestui interval de timp a unui singur eveniment $p_1(\mathrm{d}t)$ este proporțională cu $\mathrm{d}t$, adică:

$$p_1(\mathrm{d}t) = n \cdot \mathrm{d}t \tag{1}$$

în care mărimea n, de obicei, este denumită intensitate. În general intensitatea poate să depindă de timp, însă vom presupune că ea este constantă.

Pentru ca în timpul $\mathrm{d}t$ să aibă loc două evenimente, este necesar ca după primul eveniment, în cursul timpului care a mai rămas până la sfârşitul intervalului $\mathrm{d}t$, să aibă loc cel de-al doilea eveniment. Probabilitatea fiecăruia din aceste cazuri este dată de o relație de forma (1), fiind un infinit mic de ordinul întîi datorită lui $\mathrm{d}t$. Având în vedere independența statistică a celor două evenimente, probabilitatea $p_2(\mathrm{d}t)$ de realizare a celor două evenimente este egală cu produsul probabilităților lor, adică va fi un infinit mic de ordinul doi în raport cu $\mathrm{d}t$. În mod analog ne convingem că probabilitățile $p_3(\mathrm{d}t), p_4(\mathrm{d}t),....$ de realizare a 3,4, ... evenimente în cursul intervalului de timp $\mathrm{d}t$ sunt infiniți mici de ordinul trei, patru, ... De aceea, în egalitatea evidentă: $p_0(\mathrm{d}t)+p_1(\mathrm{d}t)+p_2(\mathrm{d}t)+p_3(\mathrm{d}t)+....=1$ care exprimă faptul că în intervalul de timp $\mathrm{d}t$ are loc cu certitudine un număr oarecare de evenimente, se pot neglija termenii de la ordinul doi în sus, rezultând că: $p_0(\mathrm{d}t)=1-p_1(\mathrm{d}t)$ care împreună cu relația (1) dă: $p_0(\mathrm{d}t)=1-n\cdot\mathrm{d}t$.

Din această relație rezultă că:

$$p_0(\mathrm{d}t) = 1 \tag{2}$$

Condiția (2) exprimă faptul că în cursul unui interval de timp de mărime nulă nu poate avea loc nici un eveniment şi deci:

$$p_1(0) = p_2(0) = ... = p_k(0) = 0 \tag{2'}$$

Pentru calcularea probabilității $p_k(t)$ vom începe cu cel mai simplu caz, cel al probabilității $p_0(t)$ ca în cursul intervalului de timp t să nu aibă loc nici un eveniment. Să considerăm pentru început un interval de timp $t+\mathrm{d}t$ nu pre mare şi să calculăm $p_0(t+\mathrm{d}t)$.

Pentru ca în intervalul $t+\mathrm{d}t$ să nu aibă loc nici un eveniment este necesar şi suficient ca să nu existe nici un eveniment atât în intervalul *t*, cât şi în intervalul d*t*. Datorită independenței statistice a evenimentelor ce au loc în intervale independente (nesuprapuse), probabilitatea realizării simultane a celor două cazuri este egală cu produsul probabilităților fiecărui caz în parte, deci: $p_0(t+\mathrm{d}t)=p_0(t)\cdot p_0(\mathrm{d}t)=p_0(t)\cdot(1-n\,\mathrm{d}t)$.

Pe de altă parte, cu o precizie până la termenul de ordinul $(\mathrm{d}t)^2$, avem că: $p_0(t+\mathrm{d}t)=p_0(t)+\dfrac{\mathrm{d}\,p_0(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.

Din cele două expresii ale lui $p_0(t+\mathrm{d}t)$, după simplificările corespunzătoare, obținem ecuația diferențială:

$$\frac{\mathrm{d}\,p_0(t)}{\mathrm{d}t}+np_0=0 \tag{3}$$

pentru determinarea lui $p_0(t)$. Rezolvând ecuația (3) cu condiția inițială (2), obținem că:

$$p_0(t)=e^{-nt} \tag{4}$$

Să calculăm acum $p_k(t)$, presupunând $k\geq 1$. Ca şi mai înainte, să calculăm pentru început $p_k(t+\mathrm{d}t)$. Pentru ca în intervalul $t+\mathrm{d}t$ să aibă loc *k* evenimente, este necesar şi suficient să se realizeze unul dintre următoarele cazuri:

- în intervalul *t* au avut loc *k* evenimente, în d*t* nici unul;
- în intervalul *t* au avut loc $k-1$ evenimente, în d*t* un eveniment;
- în intervalul *t* au avut loc $k-2$ evenimente, în d*t* 2 evenimente;

....

- în intervalul *t* nu a avut loc nici un eveniment, în d*t* au avut loc *k* evenimente.

Datorită independenței statistice a evenimentelor ce au loc în intervalele nesuprapuse, rezultă că:

$$p_k(t+\mathrm{d}t)=p_k(t)\cdot p_0(\mathrm{d}t)+p_{k-1}(t)\cdot p_1(\mathrm{d}t)+p_{k-2}(t)\cdot p_2(dt)+\quad ....+p_0(t)\cdot p_k(\mathrm{d}t)$$

Neglijând infiniții mici de ordinul doi şi mai mare, relația de mai sus devine:

$$p_k(t+\mathrm{d}t)=p_k(t)\cdot p_0(\mathrm{d}t)+p_{k-1}(t)\cdot p_1(\mathrm{d}t),$$

adică:

$$p_k(t+\mathrm{d}t)=p_k(t)(1-n\,\mathrm{d}t)+p_{k-1}(t)\cdot n\cdot\mathrm{d}t$$

Pe de altă parte:

$$p_k(t+\mathrm{d}t)=p_k(t)+\frac{\mathrm{d}\,p_k(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t$$

Comparând cele două expresii ale lui $p_k(t+\mathrm{d}t)$ după simplificările corespunzătoare, obținem ecuația diferențială:

$$\frac{\mathrm{d}\,p_k}{\mathrm{d}t}+np_k=np_{k-1} \tag{5}$$

pentru probabilitatea $p_k(t)$, care trebuie rezolvată impunând condițiile (2').

Înlocuind succesiv $k=1,2,3,...$ în ecuația (5) şi ținând cont de relația (4), obținem probabilitățile $p_1(t), p_2(t)$, şi aşa mai departe. Se poate vefica că soluția sistemului de ecuații (5) şi (3) este:

$$p_k(t)=\frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt} \tag{6}$$

Notând $nt=a$, care este o mărime constantă pentru un interval *t* fixat şi o intensitate *n* constantă, relația (6) devine:

$$p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{7}$$

care reprezintă legea de distribuţie Poisson.

Rezultatul obţinut poate fi interpretat în două moduri. Considerând un număr foarte mare de instalaţii complet identice, compuse din surse de particule identice, în cursul unui interval de timp t primul detector înregistrează k_1 particule, al doilea k_2 particule şi aşa mai departe. Atunci valorile $k_1, k_2, ...$ sunt distribuite după legea Poisson (7). Considerând acum numai un singur detector şi o singură sursă, detectorul va înregistra un număr $k_1, k_2, k_3, ...$ de particule în cursul unui număr mare de intervale de timp egale între ele.

Dacă intensitatea n este constantă, deci parametrul a este constant, valorile k_i vor fi de asemenea distribuite după legea Poisson:

$$p(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{8}$$

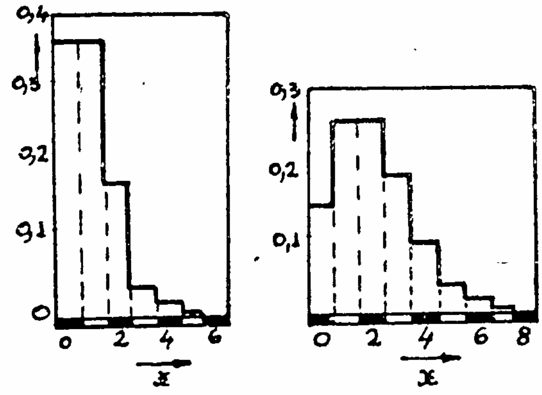

Fig. 1.

O mărime, care reprezintă un număr de evenimente (variabil în raport cu un anumit factor - timp, suprafaţă, volum, etc.), este distribuită Poisson dacă satisface condiţiile:

a) este un număr întreg şi pozitiv, inclusiv zero:

b) într-un interval foarte mic al domeniului de variaţie se poate produce sau un singur eveniment sau nici unul (probabilitatea producerii a două sau mai multe evenimente în acest interval este nulă);

c) probabilitatea producerii unui singur eveniment într-un asemenea interval foarte mic este proporţională cu mărimea intervalului.

De aici rezultă pentru dispersie:

$$\sigma^2 = \left\langle k^2 \right\rangle - \left\langle k \right\rangle^2 = a^2 + a - a^2 = a \tag{9}$$

Deci parametrul a al distribuţiei Poisson reprezintă speranţa matematică $\langle k \rangle$ a variabilei aleatorii, precum şi dispersia σ^2.

Estimarea parametrului a al distribuţiei

Repetarea de n ori, în condiţii identice, a măsurării directe a unei mărimi distribuită Poisson oferă un colectiv de valori numerice $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$, evident unele valori putându-se repeta. Probabilitatea W a realizării simultane a tuturor celor n valori individuale este egală cu produsul probabilităţilor individuale:

$$W = e^{-a} \frac{a^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-a} \frac{a^{k_2}}{k_2!} \cdot .....e^{-a} \frac{a^{k_n}}{k_n!} = \prod_{i=1}^{n} e^{-a} \frac{a^{k_i}}{k_i!} \tag{10}$$

a cărei valoare nu poate fi calculată datorită necunoaşterii parametrului a.

În ipoteza plauzabilităţii maxime, drept estimat al parametrului a se consideră acea valoare pentru care funcţia W îşi atinge maximul, atunci estimatul parametrului a al distribuţiei se obţine din condiţia:

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a} = 0 \tag{11}$$

Logaritmând relaţia (10), obţinem:

$$\ln W = -na + \ln a \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\,!$$

şi derivând în raport cu a: $\dfrac{\partial \ln W}{\partial a} = -n + \dfrac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

astfel că din condiţia (11) se obţine estimatul:

$$a^* = est(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \tag{12}$$

care este un estimat consistent şi nedeplasat.

Deci, conform relaţiei (10), estimatul parametrului a al distribuţiei Poisson este media aritmetică $\overline{x}$ a şirului de valori obţinute experimental.

Distribuţia valorii medii

Valoarea medie $\overline{x}$ a şirului de valori experimentale este la rândul său o mărime fluctuantă. Pentru a stabili legea sa de distribuţie, să calculăm funcţia generatoare a distribuţiei. În conformitate cu "Teoria erorilor", funcţia generatoare a distribuţiei medie este: $m_{\overline{x}}(\lambda) = \left[m_x\left(\dfrac{t}{n}\right)\right]^n$.

Deoarece variabila x este distribuită Poisson, în conformitate cu relaţia (9), obţinem că:

$$m_{\overline{x}}(\lambda) = e^{-a} \cdot e^{ae^{\frac{\lambda}{n}}} \tag{13}$$

astfel că:

$$m_{\overline{x}}(\lambda) = e^{-na} \cdot e^{nae^{\frac{\lambda}{n}}} = e^{na\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)} \tag{14}$$

Derivatele acestei funcţii generatoare sunt:

$$m'_{\overline{x}}(\lambda) = ae^{\frac{\lambda}{n}} \cdot e^{na} = e^{na\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}$$

$$m''_{\overline{x}}(\lambda) = ae^{\frac{\lambda}{n}} \cdot e^{na(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)} \cdot \frac{1}{n} + ae^{\frac{\lambda}{n}}$$

Pentru $\lambda = 0$ se obţin speranţele matematice:

$$\left\langle \overline{x} \right\rangle = a \tag{15}$$

$$\left\langle \overline{x}^2 \right\rangle = a\left(\frac{1}{n} + a\right) \tag{16}$$

astfel că dispersia este:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left\langle \bar{x}^2 \right\rangle - \left\langle \bar{x} \right\rangle^2 = a\left(\frac{1}{n} + a\right) - a^2 = \frac{a}{n} \quad (17)$$

Deci media $\bar{x}$ a şirului de valori experimentale este o mărime distribuită Poisson cu speranţa matematică a şi dispersia $\frac{a}{n}$.

Estimatul dispersiei mediei este deci:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{est(a)}{n} = \frac{\bar{x}}{n} \quad (18)$$

Numărul de particule care ajung într-un detector iradiat de o sursă radioactivă cu o intensitate constantă şi deci cadenţa impulsurilor înregistrate de detector, adică numărul de impulsuri înregistrate în intervale de timp egale, prezintă fluctuaţii.

Pentru un număr infinit de înregistrări, presupunând că duratele acestora sunt riguros egale, numerele de impulsuri obţinute sunt distribuite după legea Poisson:

$$P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!} \quad (19)$$

unde $P(x)$ reprezintă probabilitatea ca la înregistrare să se obţină *x* impulsuri, iar a reprezintă media statistică (speranţa matematică) a impulsurilor înregistrate:

$$a = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(x) \quad (20)$$

Pentru un număr limitat *N* de înregistrări se poate presupune că formula (1) îşi păstrează valabilitatea doar dacă *N* este suficient de mare. În acest caz numărul de înregistrări în care se obţine acelaşi număr *x* de impulsuri va fi:

$$K_c(x) = P(x) \cdot N \quad (21)$$

unde indicele *c* are semnificaţia că această valoare se obţine prin calcul. $K_c(x)$ este definit ca frecvenţa de apariţia a fenomenului *x*, adică de câte ori în seria celor *N* înregistrări vor fi înregistrate *x* impulsuri.

În această lucrare se urmăreşte a se compara pentru un număr *N* mare de înregistrări, distribuţia experimentală a valorilor *x* cu o distribuţie Poisson calculată, adică compararea frecvenţelor de apariţie experimentale $K_e(x)$ cu frecvenţele calculate $K_c(x)$.

Pentru determinarea probabilităţilor Poisson este necesară cunoaşterea parametrului a al distribuţiei. Însă acesta este necunoscut, valoarea lui depinzând de intensitatea sursei radioactive (numărul de particule emise în unitatea de timp), tipul detectorului şi tensiunea sa de funcţionare, geometria înregistrării. Din această cauză parametrul a va fi înlocuit cu estimatul său, care s-a demonstrat a fi valoarea medie aritmetică a şirului de valori x_i experimentale:

$$est\ a = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i)}{\sum_{i=1}^{n'} K_e(x_i)} \quad (22)$$

în care n' reprezintă numărul de valori *x* diferite obţinute.

În scopul înlesnirii calculelor, valorile probabilităţilor Poisson se găsesc într-un tabel din anexa lucrării, pentru valori ale parametrului a între 7,0 şi 15,0 în pas de 0,1.

Pentru compararea distribuţiilor experimentale şi calculate, se utilizează testul χ^2 (Pearson). În acest scop se calculează mărimea χ^2, definită ca:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n'} \frac{\left[K_e(x_i) - K_c(x_i)\right]^2}{K_c(x_i)} \tag{23}$$

χ^2 este, la rândul său, o mărime fluctuantă, prezentând o distribuție cu un număr $n = n' - 1$ grade de libertate, întrucât distribuției Poisson teoretică i s-a impus condiția de a avea aceeaşi valoare medie cu distribuția experimentală.

Probabilitatea de realizare a unei valori mai mari decât o anumită valoare χ^2, pentru un număr *n* de grade de libertate, este:

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int_{\chi^2}^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \, \mathrm{d}y$$

Valorile $P(\chi^2, n)$ sunt date într-un tabel din anexa lucrării pentru valori $\chi^2 \in [1,30]$ şi $n \in [6,15]$.

Se consideră că distribuția experimentală a valorilor x concordă cu o distribuție Poisson dacă $P(\chi^2, n)$ are o valoare cuprinsă între 5% - 95%.

$P(\chi^2, n)$ reprezintă probabilitatea ca un alt ansamblu de determinări experimentale să prezinte o abatere față de distribuția Poisson calculată mai mare sau cel puțin egală.

3. Dispozitivul experimental

Montajul cuprinde un detector cu scintilație conectat la un numărător electronic NUMEPORT 537A

4. Instrucțiuni de utilizare a numărătorului electronic

Pe panoul frontal sunt patru comutatoare: ALIMENTARE, IMPULSURI, CICLU UNIC, STOP.

Se trece comutatorul de STOP pe T, timp, comutatorul de CICLU UNIC pe cifra 2, care corespunde la o pauză de 2 sec între înregistrări consecutive, comutatorul de IMPULSURI pe cifra 2 care marchează numărul de secunde în care se face înregistrarea de impulsuri. Se alimentează numărătorul de la rețeaua de curent şi se trece comutatorul de ALIMENTARE pe poziția LUCRU.

Numărul de impulsuri este afişat electronic în caseta IMPULSURI iar timpul corespunzător în caseta SECUNDE. În aceste condiții numărătorul înregistrează timp de două secunde numărul de impulsuri detectate şi becul START este apris după care afişează timp de 2 secunde (becul START este stins), şterge înregistrarea anterioară şi porneşte automat o nouă înregistrare.

5. Modul de lucru

Se întocmeşte un tabel în care pe linie se consideră numărul x_i de impulsuri afişate după 2 secunde, iar pe verticală se marchează apariția numărului de impulsuri afişat corespunzător la fiecare înregistrare consecutivă. Se recomandă ca valorile afişate x_i să fie cuprinse între 0 şi 20.

Dacă numărul de impulsuri înregistrate depăşeşte 20, se măreşte pragul de sensibilitate al numărătorului.

6. Prelucrarea datelor experimentale

Se întocmeşte un tabel de forma indicata mai jos:

x_i	$K_e(x_i)$	$x_i K_e(x_i)$	$P(x_i)$	$K_c(x_i)$	$K_e(x_i) - K_c(x_i)$	$\frac{[K_e(x_i) - K_c(x_i)]^2}{K_c(x_i)}$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
Suma	N	Σ				χ^2

Pe prima coloană sunt trecute numerele de impulsuri x diferite obținute, iar pe cea de a doua coloană sunt trecute frecvențele de apariție experimentale $K_e(x_i)$ care se socotesc cu ajutorul datelor înscrise în primul tabel. Suma valorilor $K_e(x_i)$ reprezintă numărul total *N* de măsurători înregistrate.

Suma $\sum$ a valorilor $x_i K_e(x_i)$ din cea de a treia coloană serveşte la determinarea estimatului parametrului a cu relația (22). Pe cea de a patra coloană se trec valorile probabilităților Poisson $P(x_i)$ calculate după relația (19) în care parametrul a este înlocuit cu estimatul său $\bar{x}$. Aceste valori se extrag din tabelul cu probabilități Poisson din anexa lucrării.

Următoarea coloană cuprinde frecvențele de apariție $K_c(x_i)$ calculate cu ajutorul relației (21) cu o precizie de o singură zecimală şi se aproximează cu valoarea întreagă, prin rotunjirea corespunzătoare.

În scopul calculării mărimii χ^2 se completează ultimele două coloane, suma valorilor cuprinse în ultima coloană reprezentând valoarea χ^2.

Cu valoarea χ^2 obținută şi numărul $n = n' - 1$ se determină din tabelul de valori ale probabilităților $P(\chi^2, n)$ din anexa lucrării valoarea probabilității $P(\chi^2, n)$.

Se construiesc apoi pe hârtie milimetrică histograma teoretică şi histograma experimentală, pe acelaşi grafic, eventual cu culori diferite; pe abscisă se consideră numărul de impulsuri x_i, iar pe ordonată frecvențele de apariție calculate $K_c(x_i)$, respectiv experimentale $K_e(x_i)$.

Referatul asupra lucrării va cuprinde un rezumat al teoriei, cel de al doilea tabel, graficul cu cele două histograme şi valoarea probabilității $P(\chi^2, n)$.

7. Utilitatea lucrării; aplicații în economie

Obişnuirea studenților cu aplicarea metodelor statistice în prelucrarea evenimentelor aleatoare şi a lanțurilor stochastice.

8. Întrebări preliminare

1. Ce este o distribuție statistică ?
2. Explicați care sînt mărimile care intervin în expresia probabilității Poisson : $P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$
3. Care este definiția speranței matematice ? Care este speranța matematică pentru o distribuție Poisson : $P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$?
4. Care este definiția dispersiei ? Care este dispersia pentru o distribuție Poisson : $P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$?
5. În ce constă testul χ^2 ?
6. Care sint semnificațiile parametrului distribuției Poisson ?
7. Care sunt condițiile de valabilitate a distribuției Poisson ?
8. În ce constă metoda maximei plauzibilități ?
9. Care sunt estimatele de maximă plauzibilitate pentru distribuția Poisson ?
10. Ce este funcția generatoare a unei distribuții ?
11. Imaginați o organigramă pentru prelucrarea la calculator a datelor experimentale.
12. Care este montajul utilizat în cadrul lucrării ?
13. Ce legături cunoaşteți între distribuțiile Poisson, Gauss şi binomială ?
14.

9. Observații

Testul χ^2 este o metodă statistică principală de verificare a faptului dacă o distribuție este de tip Poisson, întrucât acest test este rapid aplicabil şi uşor de modelat în calculele executate automat.

Deoarece între distribuțiile Poisson, Gauss şi Bernoulli există relații de legătură imediate, obținute pe baza formulei lui Sticlang, se pot elabora metode statistice de verificare a unor astfel de distribuții, prin extinderea rezultatelor prezentei lucrări.

Aceste distribuții, fiind cel mai des întâlnite în informatică, statistică matematică, modelarea procedeelor din economie şi tehnică, importanța acestei lucrări se extinde în afara studiilor din cadrul laboratoarelor de fizică.

Prbabilităţî $P(\chi^2, n)$

χ^2 \ n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	9856	9943	9982	9994	9993	9999	10000	10000	10000	10000
2	9197	9598	9810	9915	9963	9965	9994	9998	9999	10000
3	8088	8850	9344	9643	9814	9907	9935	9979	9991	9996
4	6767	7798	8571	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977
5	5438	6600	7526	8343	8912	9312	9580	9752	9858	9921
6	4232	5398	6472	7399	8153	8743	9161	9462	9665	9797
7	3203	4280	5366	6371	7254	7901	8576	9022	9347	9576
8	2381	3326	4335	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238
9	1756	2527	3425	4373	5321	6219	7129	7729	8311	8775
10	1247	1586	2650	3505	4405	5304	6160	6939	7622	5197
11	884	1386	2017	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526
12	620	1066	1512	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790
13	430	721	1119	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023
14	206	512	818	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255
15	203	360	591	909	1321	1825	2414	3074	3782	4514
16	238	251	424	669	996	1411	1912	2491	3134	3821
17	93	174	301	487	744	1079	1496	1993	2562	3189
18	62	120	212	352	550	816	1157	1575	2368	2627
19	42	82	149	252	403	611	955	1231	1649	2137
20	28	56	103	179	293	453	671	952	1301	1719
21	18	38	71	126	211	334	504	729	1016	1368
22	12	25	40	89	151	244	375	554	786	1078
23	8	17	34	62	107	177	277	417	603	841
24	5	1	23	43	76	127	203	311	458	651
25	3	8	16	30	53	91	148	231	346	499
26	2	5	10	20	37	65	107	170	259	380
27	1	3	7	14	26	46	77	124	193	297
28	1	2	5	10	18	32	55	90	142	216
29	1	1	3	6	12	23	39	65	104	161
30	0	1	2	4	9	16	28	47	76	119

Probabilităţi Poisson
Valorile din tabel se înmulţesc cu 10^{-4} pentru a se obţine valorile P(x) reale.

x	a=5	a=5,1	a=5,2	a=5,3	a=5,4	a=5,6	a=5,6	a=5,7	a=5,8	a=5,9	a=6
1	336	310	286	264	243	224	207	190	175	161	148
2	842	792	745	701	658	618	579	543	509	476	446
3	1403	1347	1292	1238	1185	1133	1082	1032	984	937	892
4	1754	1718	1680	1641	1600	1558	1515	1471	1427	1383	1338
5	1754	1752	1747	1739	1728	1714	1697	1677	1655	1632	1606
6	1462	1490	1514	1536	1555	1571	1583	1593	1600	1604	1606
7	1044	1085	1125	1163	1199	1234	1267	1297	1326	1352	1376
8	652	692	731	770	809	848	887	924	961	997	1032
9	362	392	422	453	485	518	551	585	619	653	688
10	181	200	219	240	262	285	309	333	359	385	413
11	82	92	103	115	128	142	157	172	189	206	225
12	34	39	45	51	57	65	73	82	91	101	112
13	13	15	18	20	24	27	31	36	40	46	51
14	4	5	6	7	9	10	12	14	16	19	22
15	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	8
16	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

x	a=6,1	a=6,2	a=6,3	a=6,4	a=6,5	a=6,6	a=6,7	a=6,8	a=6,9	a=7
1	136	125	115	106	97	89	82	75	69	63
2	417	390	364	340	317	296	276	257	239	223
3	848	806	765	725	688	651	617	583	551	521
4	1293	1249	1205	1161	1118	1075	1033	992	951	912
5	1578	1549	1518	1486	1453	1419	1384	1349	1313	1277
6	1604	1601	1594	1585	1574	1561	1546	1529	1510	1490
7	1398	1418	1435	1449	1462	1472	1480	1485	1488	1490
8	1066	1098	1130	1159	1188	1214	1239	1262	1284	1303
9	722	757	791	824	858	890	922	954	984	1014
10	440	469	498	527	557	587	618	648	679	709
11	244	264	285	307	329	352	376	401	426	451
12	124	136	149	163	178	194	210	227	245	263
13	58	65	72	80	89	98	108	118	130	141
14	25	28	32	36	41	46	51	57	64	70
15	10	11	13	15	17	20	23	26	29	33
16	3	4	5	6	7	8	9	11	12	14
17	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5
18	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

x	a=7,1	a=7,2	a=7,3	a=7,4	a=7,5	a=7,6	a=7,7	a=7,8	a=7,9	a=8
0	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3
1	59	54	49	45	41	38	35	32	29	27
2	208	194	180	167	156	145	134	125	116	107
3	492	464	438	413	389	366	345	324	305	286
4	874	836	799	764	729	696	663	632	602	573
5	1241	1204	1167	1130	1094	1057	1021	986	951	916
6	1468	1445	1420	1394	1367	1339	1311	1282	1252	1221
7	1489	1486	1481	1474	1465	1454	1442	1428	1413	1396
8	1321	1337	1351	1363	1373	1381	1388	1392	1395	1396
9	1042	1070	1096	1121	1144	1167	1187	1207	1224	1241
10	740	770	800	829	858	887	914	941	967	993
11	478	504	531	558	585	613	640	667	695	722
12	283	303	323	344	366	388	411	434	457	481
13	154	168	181	196	211	227	243	260	278	296
14	78	86	95	104	113	123	134	145	157	169
15	37	41	46	51	57	62	69	75	83	90
16	16	19	21	24	26	30	33	37	41	45
17	7	8	9	10	12	13	15	17	19	21
18	3	3	4	4	5	6	6	7	8	9
19	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4

x	a=8,1	a=8,2	a=8,3	a=8,4	a=8,5	a=8,6	a=8,7	a=8,8	a=8,9	a=9
0	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1
1	25	23	21	19	17	16	14	13	12	11
2	100	92	86	79	74	68	63	58	54	50
3	269	252	237	222	208	195	183	171	160	150
4	544	517	491	466	443	420	398	377	357	337
5	882	849	816	784	752	722	692	663	635	607
6	1191	1160	1128	1097	1066	1034	1003	972	941	911
7	1378	1358	1338	1317	1294	1271	1247	1222	1197	1171
8	1395	1392	1388	1382	1375	1366	1356	1344	1332	1318
9	1256	1269	1280	1290	1299	1306	1311	1315	1317	1318
10	1017	1040	1063	1084	1104	1123	1140	1157	1172	1186
11	749	776	802	828	853	878	902	925	948	970
12	505	530	555	579	604	629	654	679	703	728
13	315	334	354	374	395	416	438	459	481	504
14	182	196	210	225	240	256	272	289	306	324
15	98	107	116	126	136	147	158	169	182	194
16	50	55	60	66	72	79	86	93	101	109
17	24	26	29	33	36	40	44	48	53	58
18	11	12	14	15	17	19	21	24	26	29
19	5	5	6	7	8	9	10	11	12	14
20	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6

x	a=9,1	a=9,2	a=9,3	a=9,4	a=9,5	a=9,6	a=9,7	a=9,8	a=9,9	a=10
1	10	9	9	8	7	7	6	5	5	5
2	46	43	40	37	34	31	29	27	25	23
3	140	131	123	115	107	100	93	87	81	76
4	319	302	285	269	254	240	226	213	201	189
5	581	555	530	506	483	460	439	418	398	378
6	881	851	822	793	764	736	709	682	656	631
7	1145	1118	1091	1064	1037	1010	982	955	928	901
8	1302	1286	1269	1251	1232	1212	1191	1170	1148	1126
9	1317	1315	1311	1306	1300	1293	1284	1274	1263	1251
10	1198	1210	1219	1228	1235	1241	1245	1249	1250	1251
11	991	1012	1031	1049	1067	1083	1098	1112	1125	1137
12	752	776	799	822	844	866	888	908	928	948
13	526	549	572	594	617	640	662	685	707	729
14	342	361	380	399	419	439	459	479	500	521
15	208	221	235	250	265	281	297	313	330	347
16	118	127	137	147	157	168	180	192	204	217
17	63	69	75	81	88	95	103	111	119	128
18	32	35	39	42	46	51	55	60	65	71
19	15	17	19	21	23	26	28	31	34	37
20	7	8	9	10	11	12	14	15	17	19
21	3	3	4	4	5	6	6	7	8	9

x	a=10,1	a=10,2	a=10,3	a=10,4	a=10,5	a=10,6	a=10,7	a=10,8	a=10,9	a=11
1	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2
2	21	19	18	16	15	14	13	12	11	10
3	71	66	61	57	53	49	46	43	40	37
4	178	168	158	148	139	131	123	116	109	102
5	360	342	325	309	293	278	264	250	237	224
6	606	581	558	535	513	491	470	450	430	411
7	874	847	821	795	769	743	718	694	669	646
8	1103	1080	1057	1033	1009	985	961	936	912	888
9	1238	1224	1209	1194	1177	1160	1142	1124	1105	1085
10	1250	1249	1246	1241	1236	1230	1222	1214	1204	1194
11	1148	1158	1166	1174	1180	1185	1189	1192	1193	1194
12	966	984	1001	1017	1032	1047	1060	1072	1084	1094
13	751	772	793	814	834	853	872	891	909	926
14	542	563	584	604	625	646	667	687	708	728
15	365	383	401	419	438	457	476	495	514	534
16	230	244	258	272	287	303	318	334	350	367
17	137	146	156	167	177	189	200	212	225	237
18	77	83	89	96	104	111	119	127	136	145
19	41	45	48	53	57	62	67	72	78	84
20	21	23	25	27	30	33	36	39	43	46
21	10	11	12	14	15	17	18	20	22	24
22	5	5	6	6	7	8	9	10	11	12

x	a=11,1	a=11,2	a=11,3	a=11,4	a=11,5	a=11,6	a=11,7	a=11,8	a=11,9	a=12
2	9	9	8	7	7	6	6	5	5	4
3	34	32	30	28	26	24	22	21	19	18
4	96	90	84	79	74	69	65	61	57	53
5	212	201	190	180	170	160	152	143	135	127
6	393	375	358	341	325	310	295	281	268	255
7	623	600	578	556	535	514	494	474	455	437
8	864	840	816	792	769	745	722	700	677	655
9	1065	1045	1024	1003	982	961	939	917	895	874
10	1182	1170	1157	1144	1129	1114	1099	1082	1066	1048
11	1193	1192	1189	1185	1181	1175	1169	1161	1153	1144
12	1104	1112	1120	1126	1131	1136	1139	1142	1143	1144
13	942	958	973	987	1001	1014	1025	1036	1046	1056
14	747	767	786	804	822	840	857	874	889	905
15	553	572	592	611	630	649	668	687	706	724
16	384	401	418	435	453	471	489	507	525	543
17	250	264	278	292	306	321	336	352	367	383
18	154	164	174	185	196	207	219	231	243	255
19	90	97	104	111	119	126	135	143	152	161
20	50	54	59	63	68	73	79	84	91	97
21	26	29	32	34	37	41	44	47	51	55
22	13	15	16	18	20	21	23	25	28	30
23	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
24	3	3	4	4	5	5	6	6	7	8

x	a=12,1	a=12,2	a=12,3	a=12,4	a=12,5	a=12,6	a=12,7	a=12,8	a=12,9	a=13
3	16	15	14	13	12	11	10	10	9	8
4	50	46	43	41	38	35	33	31	29	27
5	120	113	107	101	95	89	84	79	74	70
6	242	230	219	208	197	187	178	169	160	152
7	419	402	385	368	353	337	323	308	295	281
8	634	612	591	571	551	531	512	493	475	457
9	852	830	808	787	765	744	723	702	681	661
10	1031	1013	994	975	956	937	918	898	878	859
11	1134	1123	1112	1100	1087	1074	1060	1045	1030	1015
12	1143	1142	1139	1136	1132	1127	1121	1115	1107	1099
13	1064	1072	1078	1084	1089	1093	1096	1098	1099	1099
14	920	934	947	960	972	983	994	1004	1013	1021
15	742	759	777	794	810	826	841	856	871	885
16	561	579	597	615	633	650	668	685	702	719
17	399	416	432	449	465	482	499	516	533	550
18	268	282	295	309	323	337	352	367	382	397
19	171	181	191	202	213	224	235	247	259	272
20	103	110	118	125	133	141	149	158	167	177
21	60	64	69	74	79	85	90	96	103	109
22	33	36	38	42	45	48	52	56	60	65
23	17	19	21	22	24	27	29	31	34	37

x	a=13,1	a=13,2	a=13,3	a=13,4	a=13,5	a=13,6	a=13,7	a=13,8	a=13,9	a=14
3	8	7	7	6	6	5	5	4	4	4
4	25	23	22	20	19	18	16	15	14	13
5	66	62	58	55	51	48	45	42	40	37
6	144	136	129	122	115	109	103	97	92	87
7	269	256	245	233	222	212	202	192	183	174
8	440	423	407	391	375	360	345	331	318	304
9	640	620	601	582	563	544	526	508	491	473
10	839	819	799	779	760	740	720	701	682	663
11	999	983	966	949	932	915	897	880	862	844
12	1091	1081	1071	1060	1049	1037	1024	1011	998	984
13	1099	1098	1096	1093	1089	1085	1080	1074	1067	1060
14	1028	1035	1041	1046	1050	1054	1056	1058	1060	1060
15	898	911	923	934	945	955	965	974	982	989
16	735	751	767	783	798	812	826	840	853	866
17	567	583	600	617	633	650	666	682	697	713
18	412	428	443	459	475	491	507	523	539	554
19	284	297	310	324	337	351	365	380	394	409
20	186	196	206	217	228	239	250	262	274	286
21	116	123	131	138	146	155	163	172	181	191
22	69	74	79	84	90	96	102	108	115	121
23	39	42	46	49	53	57	61	65	69	74
24	22	23	25	27	30	32	35	37	40	43
25	11	12	13	15	16	17	19	21	22	24
26	6	6	7	8	8	9	10	11	12	13
27	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7

x	a=14,1	a=14,2	a=14,3	a=14,4	a=14,5	a=14,6	a=14,7	a=14,8	a=14,9	a=15
4	12	12	11	10	9	9	8	7	7	6
5	35	33	31	29	27	25	24	22	21	19
6	82	78	73	69	65	61	58	55	51	48
7	165	157	149	142	135	128	122	115	109	104
8	292	279	267	256	244	234	223	213	204	194
9	457	440	424	409	394	379	365	351	337	324
10	644	625	607	589	571	553	536	519	502	486
11	825	807	789	771	753	735	716	698	681	663
12	970	955	940	925	910	894	878	861	845	829
13	1052	1043	1034	1025	1014	1004	992	981	969	956
14	1060	1058	1057	1054	1051	1047	1042	1037	1031	1024
15	996	1002	1007	1012	1016	1019	1021	1023	1024	1024
16	878	889	900	911	920	930	938	946	954	960
17	728	743	757	771	785	798	811	824	836	847
18	570	586	602	617	632	648	663	677	692	706
19	423	438	453	468	483	498	513	528	543	557
20	298	311	324	337	350	363	377	390	404	418
21	200	210	220	231	242	253	264	275	287	299
22	128	136	143	151	159	168	176	185	194	204
23	79	84	89	95	100	106	113	119	126	133
24	46	50	53	57	61	65	69	73	78	83

25	26	28	30	33	35	38	41	43	47	50
26	14	15	17	18	20	21	23	25	27	29
27	7	8	9	10	11	11	12	14	15	16
28	4	4	5	5	5	6	7	7	8	9

x	a=15,1	a=15,2	a=15,3	a=15,4	a=15,5	a=15,6	a=15,7	a=15,8	a=15,9	a=16
5	18	17	16	15	14	13	12	11	11	10
6	46	43	40	38	36	34	32	30	28	26
7	98	93	88	84	79	75	71	67	63	60
8	186	177	169	161	153	146	139	132	126	120
9	311	299	287	275	264	253	243	232	223	213
10	470	454	439	424	409	395	381	367	354	341
11	645	628	611	594	577	560	544	527	512	496
12	812	795	778	762	745	728	711	695	678	661
13	943	930	916	902	888	874	859	844	829	814
14	1017	1010	1001	993	983	974	963	953	942	930
15	1024	1023	1021	1019	1016	1012	1008	1003	998	992
16	966	972	977	981	984	987	989	991	992	992
17	858	869	879	888	897	906	914	921	928	934
18	720	734	747	760	773	785	797	808	819	830
19	572	587	602	616	630	645	659	672	686	699
20	432	446	460	474	489	503	517	531	545	559
21	311	323	335	348	361	373	386	400	413	426
22	213	223	233	244	254	265	276	287	298	310
23	140	147	155	163	171	180	188	197	206	216
24	88	93	99	105	111	117	123	130	137	144
25	53	57	61	64	69	73	77	82	87	92
26	31	33	36	38	41	44	47	50	53	57
27	17	19	20	22	23	25	27	29	31	34
28	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19
29	5	5	6	6	7	8	8	9	10	11