

OSCILAȚII MECANICE

1. Scopul lucrării

- Studiul oscilațiilor amortizate (lege de mișcare, pseudoperioadă, decrement logaritmic, coeficient de amortizare);
- Studiul oscilațiilor forțate (regim tranzitoriu, regim permanent, rezonanță de amplitudine, factor de calitate).

2. Introducere

În sens restrâns, *mișcarea oscilatorie* sau *oscilația* reprezintă o mișcare descrisă matematic de o funcție *periodică* în variabila timp. În sens mai larg, se numesc oscilații și mișcările descrise de funcții *cvasiperiodice* (aproape periodice, sau aproximativ periodice). *Oscilatorul mecanic* este un corp sau un sistem de corpuri care realizează o mișcare periodică sau cvasiperiodică. Oscilatorii mecanici sunt prezenți în foarte multe domenii tehnice și contexte cotidiene. Leagănul copiilor este un oscilator gravitațional amortizat. Clopoțelul este un oscilator amortizat/forțat, precum sunt și multe instrumente muzicale! Sistemul de suspensie al automobilelor realizează oscilații amortizate. Ceasurile clasice sunt sisteme mecanice care efectuează oscilații forțate. Tot oscilații forțate realizează și motoarele, pompele, turbinele. Înțelegerea problemelor legate de sistemele mecanice oscilante asigură o bază teoretică pentru studiul unor fenomene fizice mai complexe. Spre exemplu, studiul undelor elastice folosește multe noțiuni întâlnite mai întâi în studiul oscilațiilor mecanice. Circuitele electrice oscilante se studiază cu un aparat matematic similar. Probleme importante din mecanica cuantică, cum ar fi oscilatorul armonic cuantic, se bazează pe o bună înțelegere a oscilațiilor obișnuite. Înțelegerea oscilațiilor mecanice este utilă și pentru studiul rezonanțelor electromagnetice, antenelor radio, și al oscilatorilor laser.

Deși de o mare importanță în fizică, *oscilatorul liniar armonic* este doar un model ideal. Faptul că energia totală este un invariant temporal este o urmare directă a ipotezei absenței efectelor disipative în sistemul fizic. Nu există oscilații mecanice pur armonice în sisteme închise, pentru simplul fapt că nu există sistem mecanic în mișcare repetitivă, fără disipare de energie sub formă termică, prin lucrul mecanic al forțelor de frecare. Toți oscilatorii mecanici reali izolați sunt *amortizați*. Amplitudinea de oscilație și energia lor descresc în timp.

Oscilațiile forțate pot avea caracterul unor oscilații pur armonice, dar numai datorită aportului energetic exterior sistemului. Oscilatorii *forțați* prezintă un fenomen interesant numit *rezonanță*, constând în maximizarea energiei de oscilație, la anumite frecvențe de întreținere. Fenomenele de rezonanță mecanică sunt foarte importante, fiind utile în anumite mecanisme, dar putând avea și efecte distructive în structurile mecanice.

3. Teoria lucrării

Pentru o prezentare extensivă a teoriei, studenții pot consulta Anexa 1 asociată acestei lucrări, în versiunea electronică. În cele ce urmează, sunt prezentate doar noțiunile și formulele cele mai importante. Tratarea teoretică a subiectului face referire la elongații rectilinii, pentru a fi mai familiară studenților. Cazul legilor de mișcare unghiulare este complet similar, astfel încât toate noțiunile și concluziile discutate sunt valabile și în cazul mișcărilor de rotație amortizată și forțată.

3.1. Oscilații amortizate

Se studiază mișcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acțiunea forței elastice liniare și a unei forțe de frecare fluidă proporțională cu viteza de oscilație:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (3.1-1)$$

unde k este constanta elastică iar b este coeficientul de frecare vâscoasă. Expresia (3.1-1) este o ecuație diferențială de ordinul II, liniară și omogenă, a cărei rezolvare este dată în Anexa 2.

Cu notațiile $k/m = \omega_0^2$ (unde $\omega_0 > 0$ este *pulsatia proprie* a oscilațiilor libere) și $b/m = 2\gamma$ (unde $\gamma > 0$ este *coeficientul de amortizare*), ecuația (3.1-1) se scrie:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1-2)$$

Toate regimurile de mișcare posibile sunt explicate în Anexa 1. În această secțiune vom considera doar regimul sub-amortizat (slab disipativ), în care parametrii fizici satisfac relația $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow b < 2\sqrt{km}$. Se introduce notația:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2, \quad (3.1-3)$$

unde ω_1 se numește *pseudopulsatia* mișcării amortizate. Conform Anexei 2, soluția ecuației (3.1-2) se poate scrie în acest caz:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi). \quad (3.1-4)$$

Relația (3.1-4) reprezintă legea de mișcare a oscilatorului amortizat. Oscilația este *cvasiarmonică*, cu amplitudine descrescând exponențial spre zero. Cu notația $A(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t}$, legea de mișcare (3.1-4) capătă o formă similară cu cea a oscilatorului liniar armonic. *Amplitudinea maximă* A_0 și *faza inițială* φ sunt determinate de poziția și viteza oscilatorului la momentul inițial $t_0 = 0$.

Se definesc pseudoperioada și respectiv pseudofrecvența oscilației amortizate:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}; \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1}. \quad (3.1-5)$$

Mărimea adimensională ce caracterizează "rapiditatea" cu care oscilația "se stinge" se numește *decrement logarithmic de amortizare*:

$$D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_1)} = \ln \frac{A_0 \cdot e^{-\gamma t}}{A_0 \cdot e^{-\gamma(t+T_1)}} = \ln(e^{\gamma T_1}) = \gamma T_1. \quad (3.1-6)$$

3.2. Oscilații forțate

Se consideră mișcarea prezentată mai sus, introducând în plus o forță de întreținere armonică în timp:

$$F_i(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (3.2-1)$$

unde F_0 reprezintă amplitudinea forței excitatoare, iar $\omega > 0$ este pulsția de întreținere.

Ecuația de mișcare a corpului este:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{\frac{\gamma}{2}} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), \quad (3.2-2)$$

adică o ecuație diferențială de ordin II, liniară, cu coeficienți constanți, și neomogenă. În Anexele 1 și 2 este explicat pe larg cum se procedează pentru soluționarea acestui tip de ecuație. Soluția generală a ecuației neomogene este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară a ecuației neomogene:

$$x_{g,n}(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + B(\omega) \cos[\omega t + \delta(\omega)], \quad (3.2-3)$$

unde

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}}, \text{ și} \quad (3.2-4)$$

$$\delta(\omega) = \arctg \frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (3.2-5)$$

sunt amplitudinea și respectiv faza inițială a soluției particulare. Funcția (3.2-3) este legea de mișcare a oscilatorului forțat, în cele mai generale condiții. Constantele A_0 și φ pot fi determinate din cunoașterea condițiilor inițiale $x_{g,n}(0) = x_0$ și $\dot{x}_{g,n}(0) = v_0$. La începutul mișcării, cei doi termeni din (3.2-3) pot fi comparabili și se spune că avem *regim tranzitoriu*. După amortizarea primului termen, mișcarea oscilatorului forțat în *regim permanent* este armonică, la o pulsație impusă de forța excitatoare:

$$x(t) \cong B(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)). \quad (3.2-6)$$

Rezonanța de amplitudine reprezintă fenomenul prin care, la o frecvență bine determinată a forței de întreținere, amplitudinea oscilației forțate în regim permanent este maximizată. În Anexa 1 se arată că pulsația de rezonanță a amplitudinii este:

$$\omega_r = 2\pi\nu_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (3.2-7)$$

Factorul de calitate al oscilatorului forțat se definește prin raportul dintre energia medie a oscilatorului și lucrul mecanic efectuat de forța de întreținere într-o perioadă de oscilație. La rezonanța de amplitudine, factorul de calitate are următoarea expresie:

$$Q(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}. \quad (3.2-8)$$

4. Descrierea instalației experimentale

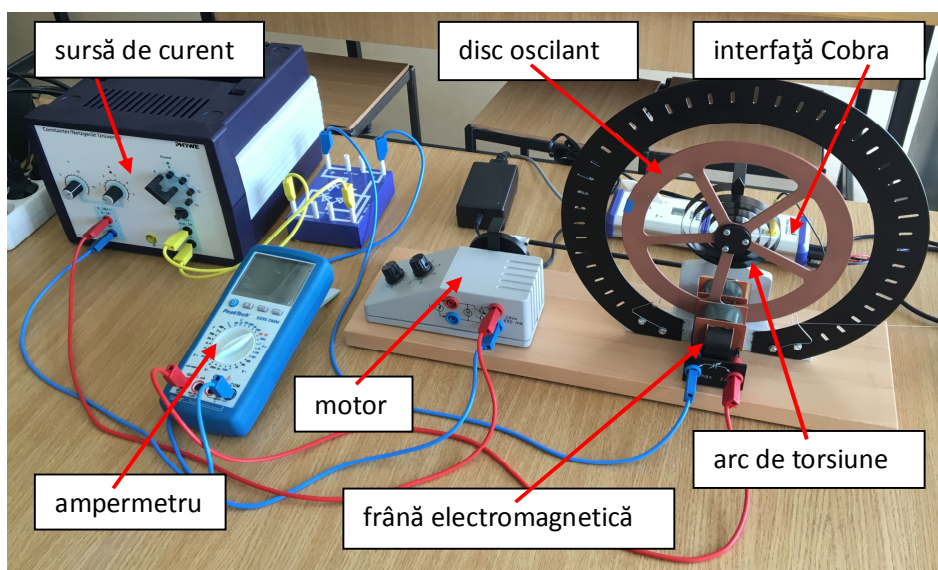
Montajul experimental incluzând *pendulul Pohl* este ilustrat în imaginea de mai jos. Cuprinde un sistem mecanic oscilant, un sistem electric de control, și un sistem electronic de măsură.

Sistemul mecanic oscilant constă într-un disc metalic circular, montat pe un lagăr cu frecare redusă, și legat de un arc de torsiune. Amplitudinea oscilațiilor de rotație poate fi urmărită în raport cu un cadran gradat, coplanar, concentric și exterior discului.

Sistemul electric cuprinde o sursă de curent care alimentează un motor și un electromagnet. Frânarea discului nu este fluidă, ci de un tip similar matematic, bazat pe forțe electromagnetice. Discul se mișcă între piesele polare ale electromagnetului. Când prin circuit trece un curent electric, mișcarea discului antrenează purtătorii de sarcină din metal cu

anumite viteze, în câmpul magnetic produs de electromagnet. Apar curenți turbionari în material, care prezintă efect disipativ Joule. Curentul prin electromagnet poate fi variat în trepte, cu ajutorul conectorului mobil al sursei, și este măsurat cu ajutorul ampermetrului. Forțarea oscilațiilor se face cu ajutorul unei pârgii atașată la arc de torsiune și la excentricul motorului electric cu turație controlată. Aceasta se poate modifica atât cu ajutorul butonului sursei, cât și cu ajutorul variatorului montat pe carcasa motorului.

Sistemul de măsură constă într-un senzor de mișcare antrenat de disc prin intermediul unui fir tensionat. Senzorul este conectat la calculator printr-o interfață electronică. Achiziția de date, construirea graficului legii de mișcare și analiza măsurărilor se face cu ajutorul unui computer, prin intermediul interfeței Cobra 4, folosind un software dedicat.



Dispozitivul experimental, incluzând *pendulul Pohl* și sisteme de control

5. Utilizarea programului de achiziție de date

Există două segmente ale software-ului dedicat acestei lucrări:

- *Cobra 4*, asociat interfeței cu același nume, realizează achiziția de date de la senzorul de mișcare, în formă tabelată și grafică. Aceste date sunt valori numerice ale unghiului de rotație, corespunzătoare unui șir de momente de timp.
- *Phywe measure 4* este destinat analizei specifice a măsurărilor înregistrate.

Modul de folosire:

- la lansarea aplicației *Measure* sistemul de calcul verifică prezența fizică a interfeței Cobra 4 atașată unui port USB și deschide pagina de achiziție *Cobra 4* și o sub-fereastră numită *Timer-Counter configuration form*; în această fereastră se selectează *Open experiment*;
- din sub-fereastră *Open experiment*, cu Opțiunea *Cobra4 with configuration file* bifată, se face selecția următoare: *TESS expert Physics*, apoi *Oscillations and Mechanical Waves*, *Acoustics*, apoi *Forced oscillations - Pohl's pendulum with Cobra 4*;
- în pagina grafică deschisă, se folosește butonul din dreapta al mouse-ului pe canalul *Distance s1* (stânga sus) pentru a deschide sub-fereastră *Channel Distance s1 (ID 01)*; se fac

următoarele setări la rubrica *Experiment Parameters*: Movement sensor - Predefined diameter: **12 mm**, User defined diameter: **185 mm**;

- se pune sistemul oscilant în mișcare, cu motorul oprit pentru oscilațiile amortizate, sau cu motorul pornit pentru oscilațiile forțate; se pornește/oprește achiziția valorilor măsurate folosind butoanele dedicate din bara de meniu (circular, respectiv pătrat); în fereastra grafică apare legea de mișcare, iar în tabelul din stânga, valorile măsurate;

- la oprirea achiziției, din sub-fereastra *Data processing* se selectează *send all data to measure*; în acest moment se deschide fereastra *Phywe measure 4*, unde se pot analiza valorile măsurate, folosind sub-meniul *Analysis*;

- pentru determinarea frecvenței sau pseudofrecvenței se utilizează funcția *Fourier analysis* din sub-meniul *Analysis*, care are ca efect afișarea spectrului de frecvență; abscisa maximului acestui spectru, adică frecvența căutată, poate fi accesată apăsând butonul din stânga al mouse-ului în vecinătatea punctului de maxim; alternativ, se pot determina momentele de timp corespunzătoare unor maxime consecutive ale legii de mișcare, folosind funcția *Peak analysis* din același sub-meniu; perioada sau pseudoperioada este atunci diferența acestor momente de timp; în cazul oscilațiilor forțate, analiza Fourier se recomandă pentru legea de mișcare în regim permanent; pentru determinarea amplitudinii de oscilație, se poate utiliza funcția *Curve analysis* din sub-meniul *Analysis*, care permite determinarea coordonatelor maximelor și minimelor legii de mișcare; cunoscând amplitudinea la două momente de timp separate de o pseudoperioadă, în cazul mișcării amortizate, se poate afla decrementul logaritmic de amortizare.

6. Organizarea măsurărilor și calculelor

6.1. În cazul oscilațiilor amortizate în regim slab disipativ, se completează următorul tabel, pentru cel puțin **două valori** nenule diferite ale curentului prin electromagnet.

I(A)	$\nu_1(\text{Hz})$	$T_1(\text{s})$	D	$\gamma(\text{s}^{-1})$	$\omega_0(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$
curentul prin electromagnet	pseudofrecvența	pseudoperioada	decrementul de amortizare	coeficientul de amortizare	pulsăția proprie calculată
$I_1 =$					
$I_2 =$					

6.2. Va fi observată legea de mișcare în regim tranzitoriu, la începutul fiecărei mișcări forțate. Pentru cazul oscilațiilor forțate în regim permanent, se completează următorul tabel, pentru aceleași valori ale curentului prin electromagnet (de la 6.1). La fiecare

valoare a curentului, se măsoară pentru cel puțin **10 frecvențe** diferite ale motorului, mai dese în vecinătatea rezonanței de amplitudine. Se vor compara pulsațiile proprii cu cele determinate la 6.1.

$I(A)$	$\nu(Hz)$	$T(s)$	$B(u.a.)$	$\nu_r(Hz)$	$\gamma(s^{-1})$	$\omega_0(rad \cdot s^{-1})$	Q
curentul prin electromagnet	frecvența oscilațiilor întreținute	perioada oscilațiilor întreținute	amplitudinea în regim permanent	frecvența de rezonanță	coeficientul de amortizare (calculat la 6.1)	pulsația proprie calculată	factorul de calitate
I_1							
I_2							

Notă: Pentru determinarea frecvenței de rezonanță se va reprezenta grafic amplitudinea în regim permanent, în unități arbitrare (u.a.), ca funcție de frecvența oscilațiilor întreținute (turația motorului). Se vor utiliza hârtie milimetrică sau un software de tipul Origin, Matlab, etc.

Referatul lucrării va conține:

Scopul lucrării, teoria lucrării (rezumat 1-2 pag.), tabelele 6.1 și 6.2 completate, graficul curbelor de amplitudine.