UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN BUCURESTI
CATEDRA DE FIZICĂ

LABORATORUL ELECTRICITATE SI MAGNETISM

BN – 119

STUDIUL REGIMULUITRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE

2007

STUDIUL REGIMULUITRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE

1. Scopul lucrării constă în studiul funcționării circuitelor electrice compuse din rezistență, inductanță şi condensatori la conectarea la sursa de tensiune, respectiv la deconectarea acesteia. Regimul tranzitoriu apare în intervalul de timp scurs de la conectarea circuitului la sursa de tensiune până când intensitatea curentului din circuit atinge valoarea de regim constantă şi respectiv, în intervalul de timp în care, la deconectarea circuitului de la sursa de tensiune, intensitatea curentului scade la zero. Vom considera acest regim, pe rând, în circuitele RL-serie, RC-serie şi respectiv RLC-serie.

2. Teoria lucrării

2.1.Regimul tranzitoriu în circuitul RL-serie

Considerăm un circuit (fig. 1) format din sursa de tensiune având sursa continuă constantă U, un rezistor de rezistentă electrică R, o bobină ideală de inductantă L si comuatorul K.

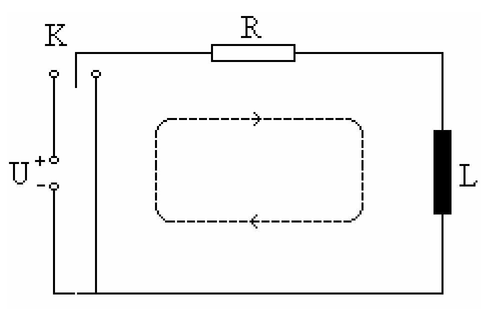

Fig. 1. Schema electrică folosită pentru studiul regimului tranzitoriu în circuitul RL-serie si sensul de parcurgere ales în vederea teoremei a doua a lui Kirchhoff.

a) Circuitul RL cu sursă de tensiune

Punând comutatorul K pe pozitia 1 la momentul de timp ales $t=0$, prin circuit va trece un curent de intensitate $i(t)$ la momentul $t\geq 0$, sensul curentului fiind determinat de polaritatea sursei de tensiune. Cresterea curentului în circuit, de la valoarea initială $i(0)=0$, determinînd un flux magnetic variabil care străbate spirele bobinei. Conform legii autoinductiei apare o t.e.m. autoindusă

$$e_L = -L\frac{di}{dt} \ , \qquad (1)$$

aici negativă, care se opune cresterii intensitătii curentului. În regim stationar, pe inductanta ideală nu există tensiune si $i=U/R$.

Pentru stabilirea valorilor mărimilor electruce în regimul tranzitoriu, aplicăm teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$Ri = U + e_L . \qquad (2)$$

Folosind (1) si (2) obtinem

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U \,, \tag{3a}$$

adică o ecuatie diferentială de ordinul întâi neomogenă. Aceasta trebuie rezolvată cu conditia initială

$$i(0)=0. \tag{3b}$$

Pentru rezolvarea ecuația (3a) scriem ecuația omogenă,

$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$ sau $\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$, care după integrare devine

$$i = C\exp\left[-\frac{R}{L}t\right], \tag{3c}$$

unde C este constanta de integrare, a cărei valoare rezultă din condiția inițială (3b). Pentru soluția particulară alegem $I = U/R$. Astfel, soluția ecuației neomogene (3a) devine

$$i = C\exp\left[-\frac{R}{L}t\right] + \frac{U}{R}. \tag{3d}$$

Introducem condiția inițială (3b) în soluția (3d) şi rezultă $C = -U/R$.

Astfel, solutia ecuației (3a) este

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{4}$$

În fig. 2 este reprezentată grafic dependenta dfe timp a intensitătii curentului din circuit. Intensitatea curentului tinde exponential la valoarea asimptotică i(∞)=*U/R*.

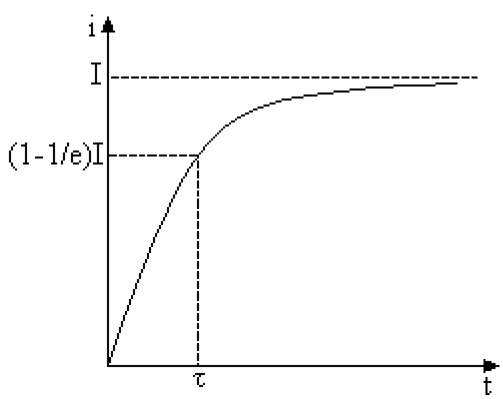

Fig.2.

Observăm că $\tau = L/R$ are dimensiunea unui timp. Aceasta poartă numele de constanta de timp a circuitului RL şi reprezintă intervalul de timp măsurat de la conectarea sursei de tensiune electrică, după scurgerea căreia variația intensității curentului până la valoarea sa de regim permanent va fi de *e* ori mai mică decât variatia totală, adică:

$$i(\infty) - i(\tau) = \frac{1}{e}(i(\infty) - i(0)) \,. \tag{5}$$

sau

$$I - I(1 - e^{-\frac{\tau}{L/R}}) = \frac{1}{e}I ; \tau = \frac{L}{R}. \tag{6}$$

b) Circuitul RL fără sursă de tensiune

La conectarea comutatorului K (Fig.1) pe pozitia 2, după ce regimul pemanent a fost stabilit, curentul în circuit va fi fortat să se anuleze. Scăderea intenitătii curentului determină aparitia unei teniuni de autoinductie în bobină care, opunându-se variatiei curentului în circuit, va micsora viteza de scădere a acestuia. Pentru a obtine legea de variatie a intensitătii in regimul tranzitoriu aplică legea lui Kirchhoff şi rezultă ecuatia diferentială:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0\,,. \qquad (7a)$$

cu condiția inițială

$$i(0)=I+\frac{U}{R}\,. \qquad (7b)$$

În acest caz, solutia problemei este

$$i=I\exp\left[-\frac{R}{L}t\right]. \qquad (8)$$

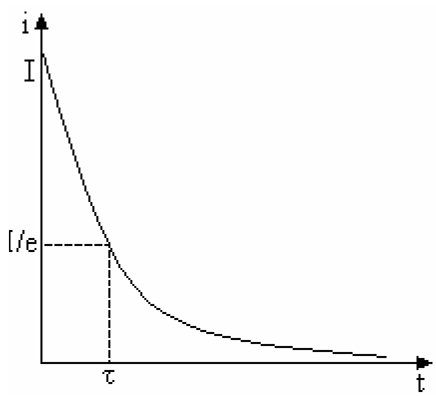

Fig. 3.

Scăderea intensitătii curentului în timp este exponentială cu constanta $\tau=L/R$. În Fig. 3 este reprezentată această variatie precum si semnificatia constantei de tinp.

2.2. Regimul tranzitoriu în circuitul RC serie

a) Încărcarea condensatorului

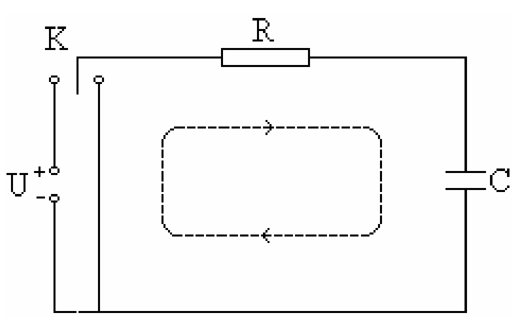

Fig. 4.

Considerăm circuitul din fig.4 în care la momentul ales ca inițial, t=0 condensatorul de capacitate C este complet descărcat, iar comutatorul K este trecut pe pozitia 1. Aplicând teorema lui Kirchhoff

$$Ri+\frac{1}{C}q=U\,, \qquad (9)$$

în care q este sarcina electrică acumulată pe plăcile condensatorului la momentul t.
Întrucât

$$i=\frac{dq}{dt}, \qquad (10)$$

obtinem ecuatia diferentială neomogenă

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=U\,, \qquad (11a)$$

cu condiţia iniţială

$$q(0) = 0\,. \tag{11b}$$

Solutia acestei probleme este

$$q = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,, \tag{12}$$

adică încărcarea condensatorului este exponentială cu constanta de timp

$$\tau = RC \tag{13}$$

Tensiunea pe condensator este dată de

$$u_C = \frac{1}{C}q = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \tag{14}$$

iar intensitate curentului de încărcare a condensatorului este

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = Ie^{-\frac{t}{RC}}. \tag{15}$$

Reprezentările grafice ale intensitătii curentului în circuit si respectiv a tensiunii electrice de pe condensator în timpul încărcării acestuia sunt date în fig. 5.

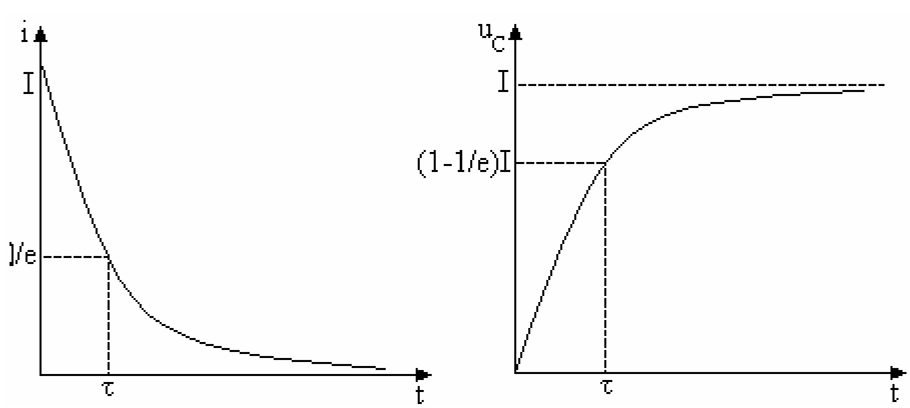

Fig.5.

b) Descărcarea condensatorului

Condensatorul fiind încărcat se trece comutatorul K (fig. 4) pe pozitia 2. Scriem teorema lui Kirchhoff pentru regimul tranzitoriu în care are loc descărcarea condensatorului şi obţinem ecuatia diferenţială:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0\,, \qquad . \tag{16a}$$

cu condiţia iniţială: $q(0) = CU$. (16b)

Utilizând aceeaşi metodă de rezolvare a ecuaţiei diferenţiale obtinem soluţia:

$$q = CUe^{-\frac{t}{RC}}. \tag{17}$$

Tensiunea pe armăturile condensator si intensitatea curentului în circuit sunt

$$u_C = \frac{1}{C}q = Ue^{-\frac{t}{RC}}\,, \tag{18}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{19}$$

Semnul minus din relația de definiție a intensității curentului electric ține cont de faptul că sarcina electrică de pe armăturile condensatorului scade în timp.

Reprezentările grafice ale intensitătii curentului în circuit si a tensiunii pe armăturile condensatorului în timpul descărcării acestuia sunt date în fig. 6.

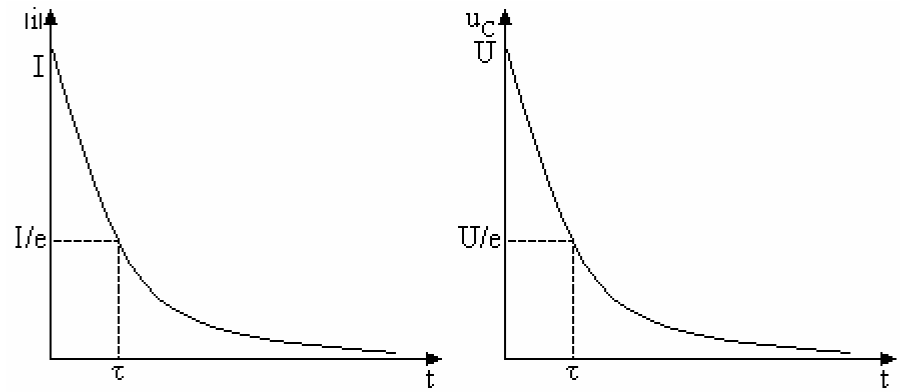

Fig. 6.

2.3. Regimul tranzitoriu în circuitul RLC-serie

a) Circuitul cu sursă

Considerăm un circuit format dintr-o sursă de curent continuu, un rezistor R, o inductanță ideală L şi un condensator C, ca cel din figura 7.

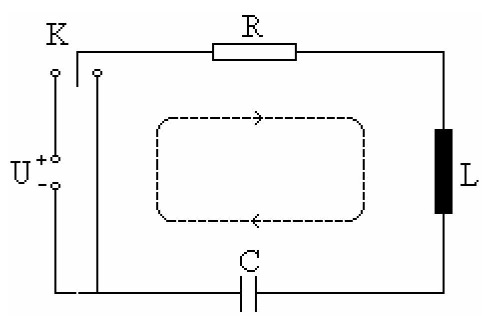

Fig. 7.

După trecerea comutatorului K (Fig. 7) pe pozitia 1, condensatorul se încarcă prin bobină si rezistor. Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitului conduce la ecuatia

$$Ri + \frac{1}{C} q = U + e_L \tag{19}$$

în care

$$i = dq/dt, e_L = -Ldi/dt = -Ld^2q/dt^2. \tag{20}$$

Înlocuind (20) în (19) rezultă ecuația diferențială

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U \tag{21}$$

Împărtind prin *L* si, făcând notatiile

$$\delta = \frac{R}{2L}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{22}$$

ecuatia (21) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \delta\frac{dq}{dt} + \varpi_0^2 q = \frac{U}{L} = \omega_0^2 CU. \tag{23a}$$

Mărimea δ se numeste *coeficient de amortizare*, iar ω_0 *pulsatie proprie* a circuitului. Ecuatia diferentială de ordinul doi liniară (23a) trebuie rezolvată cu conditiile inițiale de tip Cauchy

$$q(0) = 0, \frac{dq}{dt}(0) = 0. \tag{23b}$$

Pentru rezolvarea problemei (23), se rezolvă mai întâi ecuatia omogenă

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \tag{24}$$

Ecuatia caracteristică corespunzătoare este

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \varpi_0^2 = 0.$$

Natura rădăcinii acestei ecuatii este dependentă de semnul mărimii $\delta^2 - \omega_0^2$ după cum urmează:

a1) Regimul tranzitoriu cvasiperiodic

Dacă $\delta < \omega_0$, atunci rădăcinile ecuatiei caracteristice sunt complexe nereale, $\lambda_{12} = -\delta \pm i\omega$, în care

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{25}$$

Ecuatia (24) admite solutia generală

$$q' = e^{-\delta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t), \tag{26}$$

în care A si B sunt constante. Cum solutia particulară a ecuatiei (23a) este

$$q_\infty = CU, \tag{27}$$

solutia generală a ecuatiei neomogene (23a) se scrie

$$q = q' + q_\infty = e^{-\delta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + CU. \tag{28}$$

Constantele A si B se determină din conditiile initiale (23b). Calculul conduce la valorile A = - (δ/ω)CU, B = - CU. Înlocuind în (28), obtinem sarcina de pe armăturile condensatorului la *t>0*:

$$q = CU[1 - e^{-\delta t}(\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t)]. \tag{29}$$

Intensitatea curentului în circuit este

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega_0^2}{\omega}CUe^{-\delta t}\sin\omega t = \frac{U}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t. \tag{30}$$

Variatia în timp a curentului din circuit si tensiunii de pe condensator este reprezentată în fig. 8. Curentul prezintă oscilatii amortizate caracterizate prin pulsatia $\omega < \omega_0$ si factorul de amortizare δ. În regm tranzitoriu permanent condensatorul este încărcat cu sarcina $q_\infty = CU$ (sub diferenta de potential U).

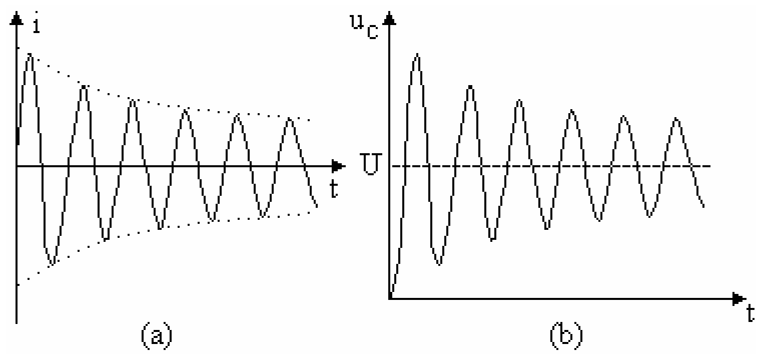

Fig. 8.

Observatie. Folosind relatiile (22), conditia $\delta < \omega_0$ poate fi adiusă la forma $R < 2\sqrt{L/C}$.

a2. Regimul amortizat periodic

Dacă $\delta < \omega_0$, atunci rădăcinile ecuatiei caracteristice sunt reale negative, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Ecuatia (21) admite solutia generală

$$q' = e^{-\delta t}[Ash(\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2 t}) + Bch(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t})], \tag{31}$$

în care A si B sunt constante, care se determină din condițiile inițiale (23b). Astfel, solutia generală a ecuatiei neomogene (23a) cu conditiile initiale (23b) se obtine de forma:

$$q = CU\{1 - e^{-\delta t}[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t}} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t}) + ch(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t})]\}. \tag{32}$$

Intensitatea curentului prin circuit este

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{U}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 L}} e^{-\delta t} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t). \tag{33}$$

Reprezentările grafice al curentului din circuit si a tensiunii pe condensator sunt date în fig. 9.

Observatie. Conditia $\delta > \omega_0$, poate fi adusă la forma $R < 2\sqrt{L/C}$.

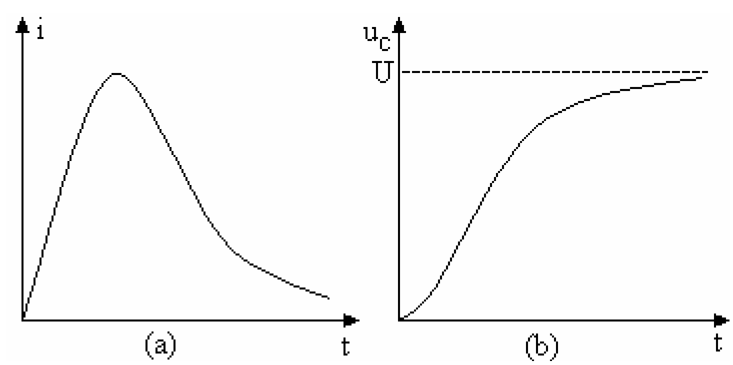

Fig. 9.

a3. Regimul amortizat critic

Dacă $\delta = \omega_0$, atunci rădăcinile ecuatiei caracteristice sunt reale şi egale, $\lambda_{1,2} = -\delta$.
În acest caz ecuația (24) admite solutia generală:

$$q' = (A + Bt)e^{-\delta t},$$

iar soluția particulară rămâne $q_\infty = CU$, adică

$$q = (A + B)e^{-\delta t} + CU\,. \tag{34}$$

Constantele A şi B se deduc din condițiile inițiale (23b) aplicate soluției (33) după care se obtine

$$q = CU[1 - (1 + \delta t)e^{-\delta t}]. \tag{35}$$

Intensitatea curentului din circuit este

$$i = \frac{dq}{dt} = \delta^2 CUte^{-\delta t} = \frac{U}{L}te^{-\delta t}. \tag{36}$$

Reprezentările grafice ale mărimilor i si u_C sunt asemănătoare cu cele din fig. 9.

Observatie. Conditia $\delta = \omega_0$, poate fi adusă la forma $R = 2\sqrt{L/C}$.

b) Circuitul fără sursă

După un interval de timp suficient de mare în comparatie cu $1/\delta$, de la închiderea circuitului, condensatorul este încărcat cu sarcina CU si prin circuit nu mai trece curent electic. În această situație, trecem comutatorul K pe pozitia 2. Ca rezultat are loc descarea condensatorului, energia înmagazinată în dielectricul acestuia cu (1/2)CU ^{2}, fiind disipată prin efect Joule în decursul regimului tranzitoriu. Sarcina de pe armăturile condensatorului la momentul t ($t=0$ este momentul trecerii comutatorului pe pozitia 2) se obtine prin rezolvarea ecuației:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, q(0) = CU, \tag{37a}$$

cu condiția la limită $q(0) = CU$ si $\frac{dq}{dt}(0) = 0$. (37b)

Intensitatea curentului se calculeaza cu relația de definiție i = dq/dt. Rezultatele sunt prezentate mai jos.

b1. Regimul tranzitoriu amortizat cvasiperiodic

$$q = CUe^{-\delta t}(\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t), \tag{38}$$

$$i = -\frac{U}{\omega L}e^{-\delta}\sin\omega t. \tag{39}$$

b2. Regimul amortizat aperiodic

$$q = CUe^{-\delta t}\left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t}) + ch(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 t})\right], \tag{40}$$

$$i = -\frac{U}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 L}} e^{-\delta t} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t). \tag{41}$$

b3. Regimul mortizat critic

$$q = CU[1 - (1 + \delta t)e^{-\delta t}], \tag{42}$$

$$i = -\frac{U}{L} te^{-\delta t}. \tag{43}$$

3. Montajul experimental

Ca sursă de tensiune se utilizează un semnal dreptunghiular ca cel din figura 10. Acest semnal permite studiul regimului tranzitoriu în punctele de salt ale tensiunii electrice. Semnalul va fi luat de la o sursă VERSATESTER. Aceasta permite variaţia perioadei (frecvenţei) şi înălţimea semnalului prin reglaj brut şi fin.

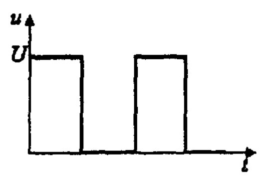

Fig. 10

În figura 11 sunt prezentate elementele de circuit disponibile şi legăturile electrice dintre acestea. Observaţi că bobina folosită are o rezistenţă electrică importantă. Celelalte elemente de circuit pot fi considerate ideale.

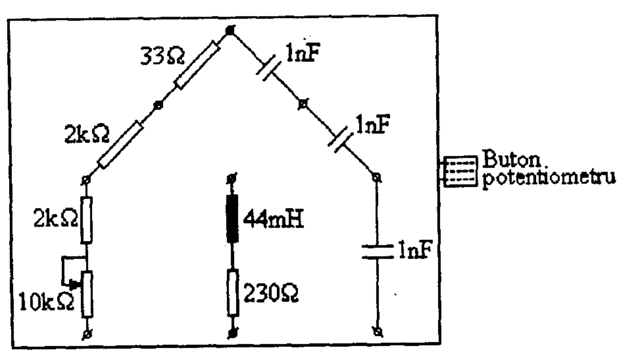

Fig. 11

Comportarea circuitelor electrice se poate urmări pe un osciloscop care permite vizualizarea simultană a două tensiuni: pe canalul 1 tensiunea aplicată circuitului, iar pe canalul 2 o tensiune de la bornele unui element de circuit.

4. Modul de lucru prelucrarea datelor experimentale

Indicații generale

1. Acordați atenție polarității tensiunilor electrice la realizarea legăturilor pentru vizualizarea semnalelor. Punctul de „masă" este firul exterior al cablului coaxial.

2. Alegeți înălțimea semnalului dreptunghiular egală cu 1V. Alegeți perioada de repetiție astfel încât regimul tranzitoriu să fie practic încheiat la schimbarea palierului tensiunii.

3. Întrucât este dificil de apreciat pe ecran o scădere de e ori, se recomandă determinarea scăderii la jumătate a semnalului în intervalul de timp $t_{1/2}$. Pentru creşterea preciziei citirilor se vor determina şi intervalele de timp $2t_{1/2}$ şi respectiv $3t_{1/2}$, ce corespund unei scăderi a semnalului la $\frac{1}{2^2}$ şi respectiv la $\frac{1}{2^3}$ din valoarea maximă a acestuia.

4.1. Circuitul *RL*-serie

Conectați la sursa de tensiune, în serie, rezistorul de 2 kΩ şi bobina. Pe canalul 1 veți culege tensiunea electrică de pe rezistor, care este proporțională cu intensitatea curentului din circuit.

Alimentați circuitul la tensiunea electrică. Reglați valoarea şi frecvența tensiunii electrice pe VERSATESTER şi amplificarea tensiunii de pe canalul 1, amplificarea tensiunii de pe canalul 2 şi comutatorul timp/div la osciloscop, astfel încât vizualizarea celor două tensiuni electrice să fie optimă.

Verificați dependența $i = i(t)$ şi comparați valoarea calculată $t_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{L}{R_t} \ln 2$ (obținută cu ajutorul relației (4) după înlocuirea lui $i = \frac{I}{2}$ şi logaritmare) cu valoarea experimentală. R_t este rezistența totală a circuitului.

Înlocuiți rezistorul de 2 kΩ cu alte rezistoare şi studiați calitativ influența rezistenței electrice a circuitului asupra regimului tranzitoriu.

4.2. Circuitul *RC*-serie

Procedați asemănător înlocuind legătura la bobină cu legătura pe condensator. Tensiunea pe rezistor se vizualizează pe canalul 2.

Aveți posibilitatea de a studia calitativ influența asupra regimului tranzitoriu atât a variației rezistenței electrice cât şi a variației capacității condensatorului.

Verificați relațiile (15) şi (19) comparând valoarea calculată $t_{1/2} = \tau \ln 2 = RC \ln 2$ cu cea determinată experimental. Alegeți singuri valorile lui R şi C.

Refaceți legăturile pentru vizualizarea tensiunii de pe condensator pe canalul 2.

4.3. **Circuitul *RLC*-serie**

Realizați circuitul *RLC*-serie utilizând rezistorul de 33 Ω, bobina și condensatorul. Pe canalul 2 veți vizualiza tensiunea electrică pe rezistor.

Măsurați perioada oscilațiilor amortizate și comparați cu valoarea calculată cu relațiile (22) și (25), unde *R* este rezistența totală a circuitului.

Măsurați intervalul de timp după care amplitudinea tensiunii electrice pe rezistor scade la jumătate și comparați cu valoarea calculată $t_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{2L}{R_t} \ln 2$ (conform relațiilor (22) și (30)).

Cu ajutorul unui potențiometru (rezistența electrică crește în sensul de rotație orar) creșteți rezistența electrică din circuit și urmăriți calitativ trecerea regimului tranzitoriu din unui cuasiperiodic în unul aperiodic.

Verificați condiția pentru regimul tranzitoriu critic, $\delta = \omega_0$. Pentru aceasta țineți cont că (conform relațiilor (36) sau (43)) intensitatea curentului în regimul critic are un punct de extrem la momentul $t_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC}$. Comparați valoarea calculată cu cea determinată experimental prin citirea pe osciloscop.