

**UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN BUCURESTI
CATEDRA DE FIZICĂ**

LABORATORUL ELECTRICITATE SI MAGNETISM

BN – 119

**STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE SIMPLE
ALIMENTATE CU TENSIUNE ALTERNATIVĂ
SINUSOIDALĂ**

2007

Studiul circuitelor electrice simple alimentate cu tensiune alternativă sinusoidală

1. Scopul lucrării constă în studiul fenomenelor ce apar în circuitele electrice simple alimentate cu o tensiune sinusoidală.

2. Teoria lucrării

Vom considera pe rând circuitul RL -serie, format dintr-un rezistor cu rezistența electrică R și o bobină ideală de inductanță L , circuitul RC -serie, format dintr-un rezistor cu rezistența electrică R și un condensator cu capacitatea C și circuitul RLC -serie, format dintr-un rezistor cu rezistența electrică R , o bobină ideală de inductanță L și un condensator cu capacitatea C , legate în serie și alimentate cu o tensiune care variază sinusoidal în timp.

2.1. Circuitul RL -serie

Considerăm un circuit (fig.1) format dintr-o sursă de tensiune alternativă sinusoidală, un rezistor de rezistență electrică R , o bobină ideală de inductanță L și întrerupătorul K . Tensiunea aplicată variază în timp conform relației

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (1)$$

unde U este tensiunea electrică efectivă.

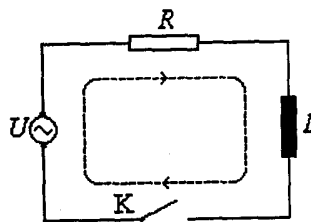


Fig. 1 Circuitul RL -serie

După închiderea întrerupătorului K , datorită prezentei sursei, prin circuit va trece, la momentul t , un curent electric de intensitate $i(t)$. Variația intensității curentului prin circuit generează un flux magnetic variabil care străbate spirele bobinei și, conform legii inducției electromagnetice a lui Faraday, în bobină apare o t.e.m. autoindusă

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

care se opune cauzei care l-a produs, L fiind inductanța bobinei.

Pentru stabilirea valorilor mărimilor electrice la aplicarea tensiunii (1), scriem teorema lui Kirchhoff

$$Ri = u + e_L \quad (3)$$

Înlocuind (1) și (2) în (3) obținem ecuația diferențială de ordinul întâi neomogenă

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (4)$$

Soluția acestei ecuații este egală cu suma a doi termeni: soluția generală a ecuației omogene atașată ecuației (4) și o soluție particulară a ecuației neomogene. Primul termen reprezintă intensitatea curentului în regim tranzitoriu și acest regim este studiat separat, iar al doilea termen este intensitatea curentului în regim permanent.

Căutăm o soluție particulară de forma

$$i_p = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

unde φ este faza inițială.

Soluția (5) verifică ecuația (4) pentru următoarele valori ale lui I și φ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega L}{R} \quad (6)$$

Așadar intensitatea curentului în circuit este alternativ sinusoidală, de aceeași pulsație cu tensiunea aplicată și defazată în urma acesteia cu φ . Valoarea efectivă a intensității curentului este proporțională cu cea a tensiunii aplicate.

Tensiunile instantanee pe rezistor și bobină sunt

$$u_R = iR = IR\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

în fază cu intensitatea curentului și respectiv

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \omega LI\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (8)$$

defazată cu $\pi/2$ înaintea intensității curentului.

Mărimea $X_L = \omega L$ se numește *reactanța inductivă* a bobinei și se măsoară în ohmi (Ω). Valorile efective ale acestor tensiuni depind de frecvența tensiunii aplicate după cum urmează

$$U_R = IR = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} U, \quad (9)$$

$$U_L = IX_L = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} U. \quad (10)$$

Dacă tensiunea aplicată prezintă numai proprietatea de periodicitate, fără a fi sinusoidală, aceasta poate fi înlocuită cu o suprapunere de semnale sinusoidale de frecvențe multipli întregi ai frecvenței corespunzătoare perioadei semnalului.

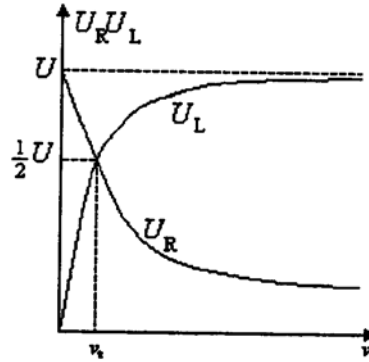


Fig. 2 Dependența de frecvență a tensiunilor efective pe rezistor și pe bobină.

Ecuția (4) fiind liniară, răspunsul circuitului (I , u_R sau u_L) este dat de superpoziția răspunsurilor la semnale sinusoidale componente. Dependența tensiunilor u_R și u_L de frecvență (fig. 2) arată posibilitatea folosirii circuitului RL -serie pentru obținerea unui *filtru trece-jos* sau a unui *filtru trece-sus*, după cum semnalul de ieșire este semnalul pe rezistor sau pe bobină. Definim frecvența de tăiere v_t a filtrului ca acea valoare a frecvenței pentru care răspunsul scade la $1/\sqrt{2}$ din valoarea maximă. (v. fig. 2), adică

$$U_R = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{R_{\max}} \text{ pentru } v = v_t, \text{ de unde } v_t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R}{L}. \quad (11)$$

2.2. Circuitul RC -serie (fig. 3)

Notăm cu q sarcina electrică de pe armătura superioară a condensatorului de capacitate C . Prin definiție, legătura între intensitatea curentului electric I din circuit și sarcina electrică q este:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (12)$$

La aplicarea tensiunii (1), teorema a doua a lui Kirchhoff se scrie

$$Ri + \frac{1}{C}q = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (13)$$

Derivând în raport cu t și folosind ecuația (12), intensitatea curentului verifică ecuația diferențială

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \omega U\sqrt{2} \cos \omega t. \quad (14)$$

pentru care căutăm o soluție particulară de forma (5) și obținem

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \text{ iar } \varphi = \arctg \frac{1}{\omega RC}. \quad (15)$$

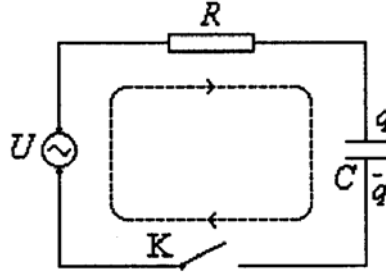


Fig. 3 Circuitul RC-serie

Mărimea $X_c = \frac{1}{\omega C}$ se numește *reactanța capacitivă* a condensatorului și se măsoară în ohmi (Ω).

Curentul în circuit este alternativ sinusoidal, de aceeași pulsație cu tensiunea aplicată, defazat înaintea acesteia și de valoare efectivă proporțională cu cea a tensiunii aplicate.

Tensiunile instantanee pe rezistor și condensator sunt

$$u_R = iR = IR\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (16)$$

în fază cu curentul și respectiv

$$\begin{aligned} u_C &= U\sqrt{2} \sin \omega t - u_R = U\sqrt{2} \left[\sin \omega t - \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \varphi) \right] = \\ &= U\sqrt{2} \left[\sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \sin(\omega t + \varphi) \right] = U\sqrt{2} \{ \sin[(\omega t + \varphi) - \varphi] - \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi \} = \\ &= -U\sqrt{2} \sin \varphi \cos(\omega t + \varphi) = -U\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cdot \frac{1}{\omega C} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= IX_c \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (17)$$

defazată cu $\pi/2$ în urma curentului.

Valorile efective ale acestor tensiuni depind de frecvența tensiunii aplicate după cum urmează

$$U_R = IR = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} U, \quad (18)$$

și
$$U_C = IX_C = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} U. \quad (19)$$

Reprezentările grafice sunt date în fig. 4. Considerând ca semnal de ieșire tensiunea pe rezistor, circuitul are o comportare de *filtru trece-sus*, iar dacă se consideră tensiunea pe condensator ca tensiune de ieșire, obținem un *filtru trece-jos*.

Determinăm frecvența de tăiere ν_t din condiția

$$U_R = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{R_{\max}} \text{ de unde } \nu = \nu_t \Rightarrow \nu_t = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (20)$$

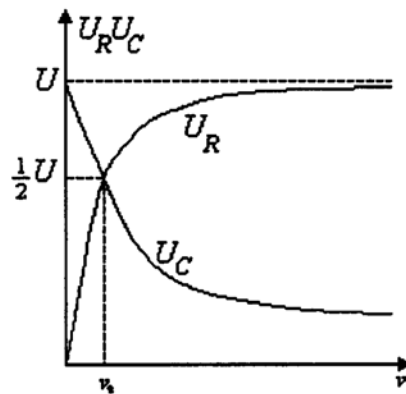


Fig. 4 Dependența de frecvență a tensiunilor efective pe rezistor și condensator.

2.3. Circuitul *RLC*-serie (fig. 5)

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitului se scrie:

$$Ri + \frac{1}{C} q = u + e_L, \quad (21)$$

în care $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, $i = \frac{dq}{dt}$, $e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$. Făcând înlocuirile în ecuația (21) derivată în raport cu t , ecuația curentului din circuit devine

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega U \sqrt{2} \cos \omega t. \quad (22)$$

Soluția particulară de forma (5) conduce, în acest caz la următoarele expresii pentru I și φ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{ și } \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (23)$$

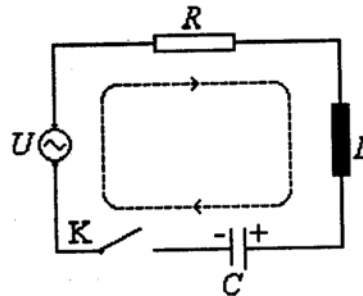


Fig.5 Circuitul RLC -serie

Mărimile:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (24)$$

măsurată în ohmi, se numește *impedanța circuitului*. Prima relație (23) reprezintă legea Ohm pentru circuitul RLC serie în curent alternativ sinusoidal.

Tensiunile pe cele trei elemente de circuite sunt

$$u_R = Ri = IR\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = IX_L \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (26)$$

$$u_C = u + e_L - Ri = IX_C \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (27)$$

Puterea disipată în circuit este

$$p = ui = 2UI \sin(\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

și are valoarea medie

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R \quad (28)$$

Ne ocupăm în continuare de comportarea circuitului pentru diferite valori ale frecvenței tensiunii aplicate. Intensitatea curentului prezintă un maxim pentru

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \text{ adică } \nu_0 = \frac{\omega}{2\pi_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (29)$$

de valoare

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (30)$$

În această situație $X_L = X_C$, $u_L + u_C = 0$, astfel comportarea circuitului este pur rezistivă. Sursa nu mai face schimb de energie cu bobina și cu condensatorul (puterea instantanee corespunzătoare este $(u_L + u_C)i = 0$), oscilațiile din circuit efectuându-se cu frecvența ν_0 egală cu cea a oscilațiilor libere din circuitul LC . Spunem că în circuit are loc fenomenul de *rezonanță*. Fig. 6 prezintă dependența $I = I(\nu)$. Cu cât rezistența circuitului este mai mică cu atât curba devine mai ascuțită și fenomenul de rezonanță este mai pronunțat. Un rezultat mai exact va fi prezentat în continuare.

Notăm cu ω_1 și ω_2 pulsațiile la care intensitatea curentului electric scade la valoarea $I_0/\sqrt{2}$, sau echivalent, puterea activă a circuitului scade la jumătate din valoarea sa de rezonanță (fig. 6b).

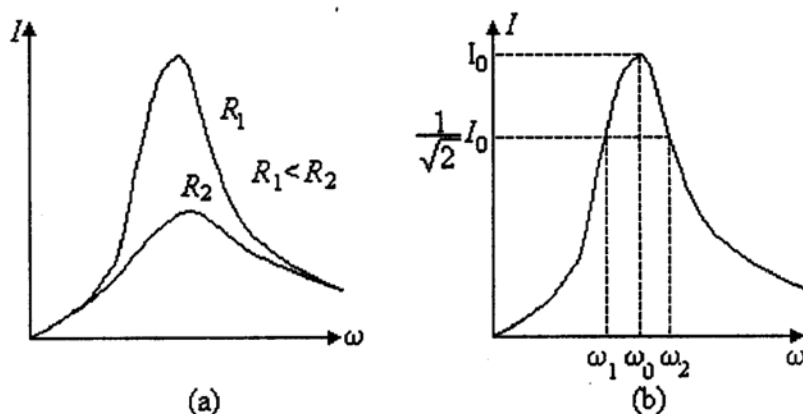


Fig. 6 Dependența intensității din circuitul RLC -serie de frecvență pentru două valori $R_1 < R_2$ ale rezistenței circuitului (a) și curba de rezonanță cu specificarea elementelor necesare caracterizării acesteia (b).

Condiția

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U}{R}$$

conduce la valorile

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \pm \frac{R}{2L}, \quad (31)$$

astfel încât lărgimea liniei de rezonanță este $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L$, adică inversul constantei de timp τ a oscilațiilor libere din circuit. Relația demonstrată

$$\Delta\omega \cdot \tau = 1 \quad (32)$$

stabilește legătura dintre lărgimea curbei de rezonanță (a oscilațiilor forțate) și constanta de timp a oscilațiilor libere.

Fenomenul de rezonanță din circuit este măsurat cu ajutorul raportului $\omega_0 / \Delta\omega$ egal cu

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{R/L} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q, \quad (33)$$

în care Q reprezintă *factorul de calitate al circuitului*.

Mărimea Q poartă numele și de *factor de supratensiune*, deoarece, la rezonanță, raportul

$$\frac{U_L}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q \text{ și asemănător, } \frac{U_C}{U} = \frac{1}{\omega_0 C R} = Q. \quad (34)$$

În cazurile practice $Q \gg 1$, astfel încât tensiunile electrice pe elementele reactive ale circuitului sunt mult mai mari decât tensiunea aplicată circuitului și această proprietate trebuie avută în vedere la proiectarea circuitului.

Comportarea prezentată a circuitului RLC -serie determină utilizarea acestuia la frecvențe apropiate frecvenței de rezonanță. Circuitul constituie un *filtru-trece-bandă*, banda de trecere fiind cuprinsă în intervalul $\nu_1 \div \nu_2$. Un circuit cu factor de calitate de ordinul sutelor este folosit pentru recepționarea semnalelor unei stații radio de emisie și, totodată, eliminarea semnalelor de altă frecvență.

3. Montajul experimental este format din:

- sursa de tensiune alternativă sinusoidală VERSATESTER; variația frecvenței tensiunii și a valorii sale efective se face prin reglaj brut și fin pentru fiecare domeniu de variație al acestora;

- elementele de circuit legate ca în fig.7;

- osciloscop cu posibilitatea de a vizualiza simultan două semnale:

- canalul 1: tensiunea aplicată circuitului;

- canalul 2: tensiunea la bornele unui element de circuit.

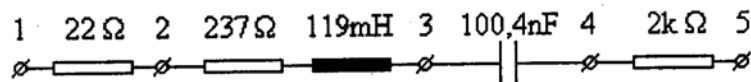


Fig. 7 Elementele de circuit.

4. Modul de lucru și prelucrarea datelor experimentale

Indicații generale

1. La efectuarea legăturilor pentru vizualizarea semnalelor se va acorda atenție polarității tensiunilor electrice. Punctul de „masă” este firul exterior al cablului coaxial.

2. Tensiunile electrice aplicate circuitului vor fi alese în jurul valorii de 1 V și se citesc pe osciloscop. Studiul comportării în frecvență se face menținând constantă tensiunea electrică aplicată. La variația frecvenței este posibil ca la aceeași tensiune electrică citită pe VERSATESTER, tensiunea electrică de la bornele circuitului să se modifice puțin. În această situație, se reglează tensiunea furnizată de sursă astfel încât să se obțină la bornele circuitului valoarea dorită.

3. Pe osciloscop se citesc valorile maxime ale tensiunilor electrice. Nu este necesară trecerea la valori efective.

4. Pentru măsurarea în grade a defazajului φ dintre tensiunile electrice citite pe osciloscop (vezi figura 8) se citește numărul de diviziuni n de pe ecran dintre două treceri prin valoarea zero a tensiunilor și numărul de diviziuni N ce corespund perioadei de variație a tensiunii. Între aceste mărimi există relația

$$\frac{n}{N} = \frac{\varphi}{360^\circ}, \text{ de unde } \varphi = 360 \frac{n}{N}.$$

În cazul prezentat în figura 8, tensiunea u_1 este defazată înaintea tensiunii u_2 cu $\frac{0,6}{7} \cdot 360^\circ \cong 31^\circ$.

Fig. 8. Măsurarea cu ajutorul osciloscopului a defazajului a două mărimi alternative sinusoidale cu aceeași frecvență

4.1. Circuitul *RL*-serie

Conectați sursa de tensiune la bornele 1 și 3 din figura 7. Deși bobina are un circuit echivalent *RL*, este necesară introducerea în circuit a unui rezistor pentru a putea măsura pe canalul 2 tensiunea electrică de pe acesta, care este proporțională cu intensitatea curentului din circuit.

Variind frecvența în domeniul 100 Hz – 1 kHz în trepte de 100 Hz, urmăriți pe osciloscop variația amplitudinii tensiunii electrice pe rezistor și defazajul acesteia față de tensiunea electrică aplicată.

Reprezentați pe același grafic rezultatele obținute. Utilizați hârtie milimetrică.

Determinați pe cale grafică frecvența de tăiere din condiția $|\varphi(\nu_t)| = 45^\circ$.

Comparați rezultatul obținut cu cel teoretic calculat cu relația (11) în care R este rezistența totală a rezistorului și bobinei.

4.2. Circuitul RC-serie

Conectați sursa de tensiune la bornele 3 și 5 din figura 7. Pe canalul 2 se culege tensiunea electrică de pe rezistor, care este proporțională cu intensitatea curentului din circuit.

Variind frecvența în domeniul 100 Hz – 1 kHz în trepte de 100 Hz, urmăriți pe osciloscop variația amplitudinii tensiunii electrice pe rezistor și defazajul acesteia față de tensiunea electrică aplicată.

Reprezentați pe același grafic rezultatele obținute. Utilizați hârtie milimetrică.

Determinați pe cale grafică frecvența de tăiere din condiția $|\varphi(v_r)| = 45^\circ$.

Comparați rezultatul obținut cu cel teoretic calculat cu relația (11) în care R este rezistența totală a rezistorului și bobinei.

4.3. Circuitul RLC-serie

Conectați sursa de tensiune la bornele 1 și 4 din figura 7. Pe canalul 2 se culege tensiunea electrică de pe rezistor, care este proporțională cu intensitatea curentului din circuit. Deși bobina are rezistență electrică se mai introduce în circuit un rezistor pentru a putea obține o rezistență variabilă.

Variind frecvența în domeniul 1 kHz – 10 kHz, urmăriți pe osciloscop variația amplitudinii tensiunii electrice pe rezistor, obținerea rezonanței și defazajul acesteia față de tensiunea electrică aplicată la rezonanță.

Pentru determinarea frecvenței de rezonanță cu o precizie bună, rotiți comutatorul timp/div de pe panoul frontal al osciloscopului pe poziția X-Y. În această situație cele două tensiuni electrice sunt aplicate plăcilor de deflexie orizontală și respectiv verticală. Compunerea celor două semnale (oscilații perpendiculare cu aceeași frecvență) dă naștere unei elipse. Aceasta se deformează cu variația frecvenței și se reduce la un segment de dreaptă când se atinge rezonanța.

Efectuați măsurători ale tensiunii pe rezistor pentru frecvențe ale tensiunii aplicate cuprinse în domeniul de la 1 kHz la 2,2 kHz, cu un pas de 0,1 kHz.

Reprezentați grafic curba de rezonanță.

Comparați valoarea frecvenței de rezonanță experimentală cu cea calculată cu relația (29).

Determinați valoarea maximă a tensiunii electrice pe rezistor și comparați-o cu valoarea calculată cu relația

$$U_{mR} = \frac{U_m}{R + R_L} R,$$

unde R și R_L sunt rezistențele electrice ale rezistorului și respectiv bobinei.

Din reprezentarea grafică determinați banda de trecere și calculați factorul de calitate experimental

$$Q_{\text{exp}} = \frac{v_{0,\text{exp}}}{(\Delta v)_{\text{exp}}}.$$

Comparați rezultatul cu valoarea calculată cu relațiile (33) și (29):

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Calculați constanta de timp a circuitului cu relația (32),

$$\tau_{\text{exp}} = \frac{1}{2\pi(\Delta v)_{\text{exp}}}.$$

Refaceți legăturile electrice pentru vizualizarea tensiunii electrice de pe condensator pe canalul 2.

Măsurați factorul de supratensiune $\frac{U_{mC}}{U_m}$ a frecvența de rezonanță și comparați valoarea obținută cu cea a factorului de calitate determinat anterior.