

## Studiul câmpului magnetic produs de o bobină. Verificarea legii lui Biot și Savart

### Scopul lucrării

Măsurarea inducției câmpului magnetic ( $\vec{B}$ ) de-a lungul axei unei bobine.

### Teoria lucrării

Bobina este o înfășurare lungă de formă elicoidală a unui fir conductor, ca în figura 1, prin care trece un curent electric. Dacă spirele înfășurării sunt apropiate iar lungimea acestuia este mult mai mare decât diametrul său, liniile de câmp magnetic din interiorul bobinei sunt distribuite aproape uniform (sunt aproape echidistante). Prin urmare, o *bobină ideală* este cea a cărei lungime este infinită. Liniile de câmp ale bobinei ideale sunt echidistante și paralele cu axa sa în interior și nule în exteriorul acesteia.

Într-o bobină cu lungimea finită liniile de câmp magnetic sunt reprezentate în figura 1. Acestea sunt linii închise conform legii lui Gauss pentru câmp magnetic care stabilește că

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1)$$

În figura 1a și b sunt reprezentate liniile de câmp magnetic pentru o bobină cu lungimea finită, în cele două cazuri, spirele aflându-se la distanțe diferite între ele.

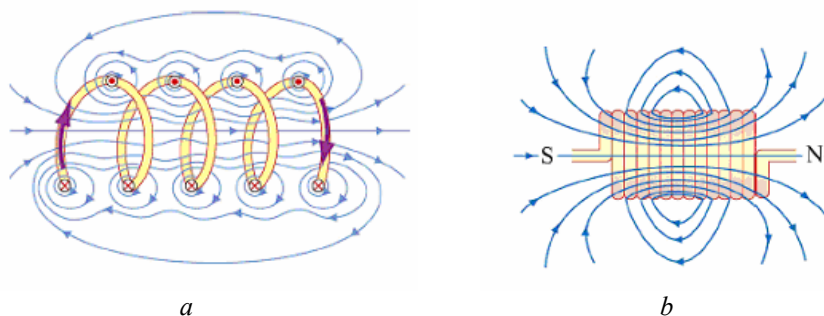


Fig. 1

Pentru început vom calcula inducția câmpului magnetic generat de un curent electric circular (o spirală). Alegem o spirală circulară de rază  $R$  prin care circulă un curent electric de intensitate  $I$ , ca în figura 2. Așezăm spira în planul  $xOy$  cu centrul în originea axelor de coordonate și calculăm inducția magnetică  $\vec{B}$  în punctul  $P$  aflat pe axa spirei la distanța  $z$  de centrul acesteia.

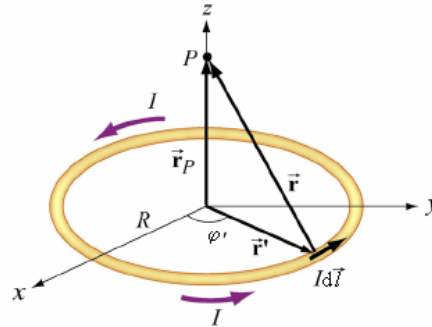


Fig. 2

Utilizăm formula lui Biot și Savart, adică

$$\vec{B} = \int_{\text{lungimea conductorului}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

unde

$$Id\vec{l} = I \frac{d\vec{r}'}{d\varphi'} d\varphi' = IR d\varphi' (-\sin \varphi' \vec{i} + \cos \varphi' \vec{j}), \quad (3)$$

deoarece  $\vec{r}' = R(\cos \varphi' \vec{i} + \sin \varphi' \vec{j})$ , conform figurii 2.

Vectorul de poziție al punctului P este  $\vec{r}_p = z\vec{k}$ , iar vectorul de poziție al elementului de curent  $Id\vec{l}$  în raport cu punctul P este

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}' = -R(\cos \varphi' \vec{i} + \sin \varphi' \vec{j}) + z\vec{k}, \quad (4)$$

cu modulul

$$r = \sqrt{(-R \cos \varphi')^2 + (-R \sin \varphi')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}.$$

Calculăm produsul vectorial,

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times (\vec{r}_p - \vec{r}') &= Rd\varphi' (-\sin \varphi' \vec{i} + \cos \varphi' \vec{j}) \times [-R(\cos \varphi' \vec{i} + \sin \varphi' \vec{j}) + z\vec{k}] = \\ &= Rd\varphi' (z \cos \varphi' \vec{i} + z \sin \varphi' \vec{j} + R\vec{k}) \end{aligned}$$

și apoi contribuția elementului de curent  $Id\vec{l}$  la valoarea vectorului inducție magnetică din punctul P,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_p - \vec{r}')}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 IR (z \cos \varphi' \vec{i} + z \sin \varphi' \vec{j} + R\vec{k})}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi'.$$

Vectorul inducție magnetică în punctul P este egal cu suma contribuțiilor tuturor elementelor de curent, adică

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \varphi' \vec{i} + z \sin \varphi' \vec{j} + R\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi', \quad (5)$$

iar componentele acestuia sunt,

$$B_x = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \sin \varphi' \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad (6)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = -\frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \cos \varphi' \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (7)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{2\pi\mu_0 IR^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8)$$

și vectorial

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}. \quad (9)$$

Am obținut că singura componentă nenulă a vectorului inducție magnetică generat de un curent circular este cea de-a lungul axei de simetrie Oz a spirei  $l$ .

Valoarea vectorului inducție magnetică în centrul spirei circulare se obține înlocuind în relația (9) valoarea  $z = 0$ , adică

$$\vec{B}_{spiră} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{k}. \quad (10)$$

Bobina este formată dintr-un număr foarte mare de spire circulare paralele, așezate foarte aproape unele de altele, ca în figura 3.

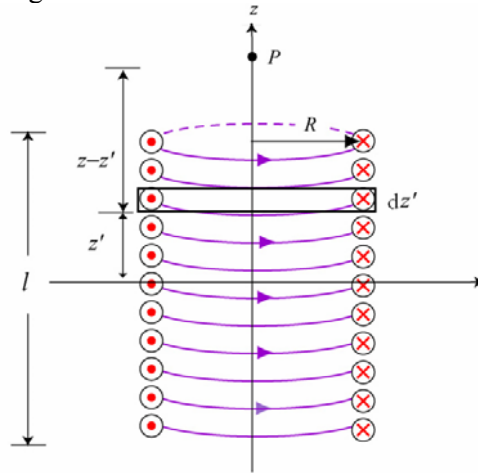


Fig. 3

Alegem un element din lungimea bobinei de grosime  $dz'$  aflat la distanța  $z'$  de mijlocul bobinei.

Prin acest element de bobină circulă curentul electric:

$$dI = Indz' = I \frac{N}{l} dz',$$

unde  $n = \frac{N}{l}$  este numărul de spire pe unitatea de lungime a bobinei,  $N$  fiind numărul total de spire, iar  $l$  lungimea bobinei.

Contribuția la inducția câmpului magnetic din punctul P a acestui element de curent electric este egală cu

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2}{2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dI = \frac{\mu_0 R^2}{2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} nI dz' . \quad (11)$$

Adunăm contribuțiile tuturor elementelor de curent, adică integrăm pe toată lungimea bobinei relația (11) și obținem modulul vectorului inducție magnetică pe axa bobinei,

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \cdot \frac{z' - z}{R^2 \sqrt{R^2 + (z - z')^2}} = \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{\left(z - \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} \right) . \end{aligned} \quad (12)$$

Am obținut expresia inducției magnetice a câmpului generat de curentul electric ce parcurge o bobină finită într-un punct de pe axa acesteia aflat la distanța  $z$  de centrul acesteia.

În cazul unei bobine considerată infinită,  $l \rightarrow \infty$  și  $\frac{z}{l} \rightarrow 0$ , iar

$$B_z = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{l} . \quad (13)$$

### Dispozitivul experimental

Inducția câmpului magnetic în interiorul bobinei se măsoară cu ajutorul unei sonde Hall care este sensibilă pe direcția axei acesteia și se verifică relația între inducția câmpului magnetic  $\vec{B}$  de-a lungul axei bobinei, în interiorul acesteia și intensitatea curentului  $I$ , lungimea bobinei  $L$  și numărul de spire  $N$  dată de expresia (13).

Dispozitivul experimental utilizat este prezentat în figura 4.

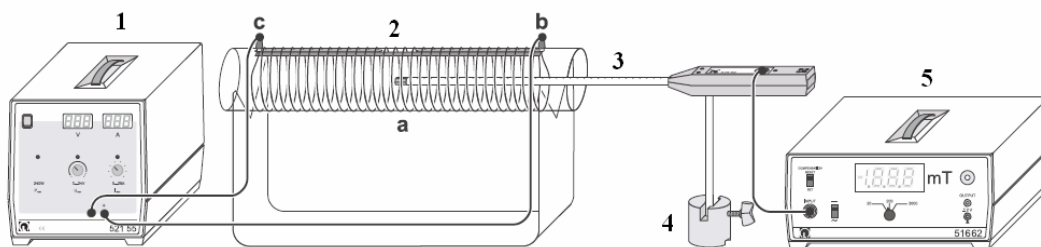


Fig. 4. 1 Sursă de tensiune electrică; 2 bobină cu număr variabil de spire pe unitatea de lungime; 3 sondă Hall; 4 stativ pentru fixarea sondei Hall; 5 teslametru

**Modul de lucru**

- Așezați bobina cu un număr variabil de spire pe unitatea de lungime pe suportul pentru bobine și legați-o la sursa de tensiune electrică.

- Legați sonda axială pentru măsurarea inducției magnetice la teslametru cu ajutorul cablului coaxial, fixați-o de stativ și aliniați-o astfel încât senzorul Hall să se afle pe axa corpului de plastic al bobinei în mijloc.

**a). Măsurarea inducției magnetice  $\vec{B}$  în funcție de intensitatea curentului  $I$** 

- Alegeți pentru teslametru domeniul de măsură 0 – 20 mT și calibrați valoarea zero cu ajutorul comutatorului COMPENSATION.

- Fixați conectorii **b** și **c** în poziții simetrice astfel încât lungimea bobinei să fie egală cu 15 cm (fixați pe **b** la 12,5 cm și pe **c** la 27,5 cm).

- Creșteți valoarea intensității curentului cu câte 2 A și măsurați valoarea inducției magnetice. Înainte de fiecare măsurătoare reduceți valoarea intensității curentului la 0 A și verificați zero-ul teslametrului. Notați valorile obținute în tabelul 1.

Tabelul 1

$I$ (A)	$B$ (mT)
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	

**b) Măsurarea inducției magnetice  $\vec{B}$  în funcție de lungimea bobinei  $l$ .**

- Aplicați un curent de intensitate  $I = 20$  A.

- Fixați conectorii **b** și **c** în poziții simetrice diferite astfel încât lungimea bobinei să aibă valori diferite și măsurați valoarea inducției magnetice. Înainte de fiecare măsurătoare reduceți valoarea intensității curentului la 0 A și verificați zero-ul teslametrului. Notați valorile obținute în tabelul 2.

Tabelul 2

$l$ (cm)	$1/l$ (cm <sup>-1</sup> )	$B$ (mT)
8		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		

**Prelucrarea datelor experimentale**

a). **Măsurarea inducției magnetice  $\vec{B}$  în funcție de intensitatea curentului  $I$ , ( $B = f(I)$ )**

Reprezentați grafic valorile obținute pentru inducția magnetică în mT în funcție de valorile intensității curentului în A, utilizând datele din tabelul 1.

Calculați panta dreptei obținute cu ajutorul relației (13). Determinați permeabilitatea magnetică a aerului.

Comparați rezultatul cu valoarea teoretică  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.

Numărul de spire al bobinei se determină prin numărare.

b) **Măsurarea inducției magnetice  $\vec{B}$  în funcție de inversul lungimii bobinei  $l$ ,  $B = f(1/l)$ .**

Reprezentați grafic valorile obținute pentru inducția magnetică în mT în funcție de  $1/l$  în  $\text{cm}^{-1}$ , utilizând datele din tabelul 2. Pentru lungimile bobinei de 8 și 10 cm explicați de ce valorile obținute nu se așează pe o dreaptă împreună cu valorile de la lungimi mai mari.

Folosind valorile obținute la lungimi ale bobinei mai mari sau egale cu 15 cm, fițați datele experimentale cu o dreaptă, determinați panta și valoarea curentului ce trece prin bobină. Comparați rezultatul obținut cu valoarea stabilită experimental.