Descrierea statistică a dezintegrărilor radioactive: distribuțiile statistice Poisson şi Gauss

Scopul lucrării: verificarea experimentală a distribuțiilor statistice Poisson şi Gauss - adică faptul că numărul de impulsuri înregistrate în intervale de timp identice de un contor Geiger-Müller aflat la o distanță fixată față de o sursă radioactivă cu timp de viață lung corespunde distribuției Poisson, care pentru un număr mare de dezintegrări se apropie de distribuția Gauss.

Subiecte conexe: mărime fluctuantă, valoare medie, dispersie, abatere standard, distribuția Poisson, distribuția Gauss, diverse simetrii ale distribuțiilor, interval de aşteptare (încredere), formula Stirling, teorema limitei centrale.

Principiul lucrării: Un şir de evenimente întâmplătoare şi independente este acela în care producerea oricărui eveniment nu are nici un efect asupra producerii oricărui alt eveniment din succesiunea de evenimente. Legea de variație a numărului acestor evenimente întâmplătoare constituie o *distribuție statistică*. *Evenimentele întâmplătoare* utilizate în această lucrare de laborator sunt *pulsurile electrice* obținute de la un detector cu scintilație expus radiațiilor ionizante emise de o sursă radioactivă (sursa radioactivă α #30, care conține ^{241}Am - Americiu, $\Lambda_0 = 37\,\mathrm{kBq}$). Rezultatele obținute vor fi comparate cu distribuțiile Poisson şi Gauss. O caracteristică specifică distribuției Poisson poate fi observată în cazul unui număr mic de impulsuri $n \le 10$: distribuția este asimetrică, iar maximumul se găseşte la un număr de pulsuri mai mic decît valoarea medie. Această situație se obține cînd intervalul de timp de numărare este mic sau distanța între sursă şi detector este mare. Nu doar distribuția Poisson, ci şi distribuția simetrică Gauss descrie statistica impulsurilor detectate, în cazul unui număr mare de impulsuri - intervalul de timp de numărare este mare sau distanța între sursă şi detector este mică.

Teoria lucrării: ***Distribuția Poisson*** este o distribuție pentru evenimente cu variație *discretă*, fiind caracterizată, conform teoriei probabilităților, de funcția de probabilitate:

$$P(n,a) = \mathrm{e}^{-a}\,\frac{a^n}{n!}$$

unde *a* este numit *parametrul distribuției Poisson*. Acesta are o dublă semnificație: 1) reprezintă *valoarea medie* a numărului de evenimente înregistrate în intervalul de timp ales $a = \langle n \rangle$; 2) reprezintă *dispersia* sau pătratul *deviației standard* a distribuției Poisson, astfel *deviația standard* - incertitudinea - distribuției Poisson este egală cu rădăcina pătrată a valorii medii, $\sigma = \sqrt{a}$, unde $\sigma^2 = \left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle = \langle n \rangle$. Pentru studiul distribuției Poisson, parametrul *a* are valori mici ($a \le 10$).

Distribuția Gauss este o distribuție pentru evenimente cu variație *continuă*; pentru valoarea medie a şi dispersia σ^2; ea este caracterizată de funcția de densitate de probabilitate:

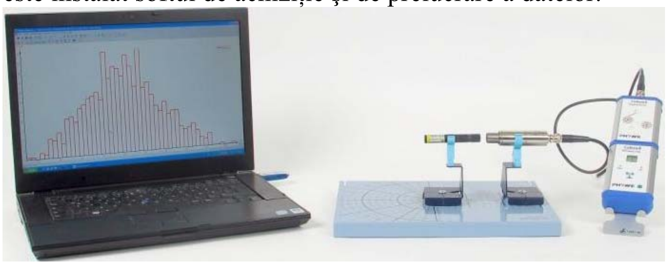
$$P_G(x;a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Cînd parametrul *a* al distribuției Poisson are valori mari, distribuția Poisson trece (folosind formula Stirling şi apoi o dezvoltare în serie Taylor) într-o distribuție (quasi)continuă, care este chiar distribuția Gauss de medie *a* şi deviație standard $\sigma = \sqrt{a}$ (altfel spus, pentru valori mari ale mediei *a*, distribuția Poisson - distribuție discretă şi asimetrică - tinde către o distribuție Gauss - distribuție continuă şi simetrică). Astfel, cele 2 distribuții au în final formele:

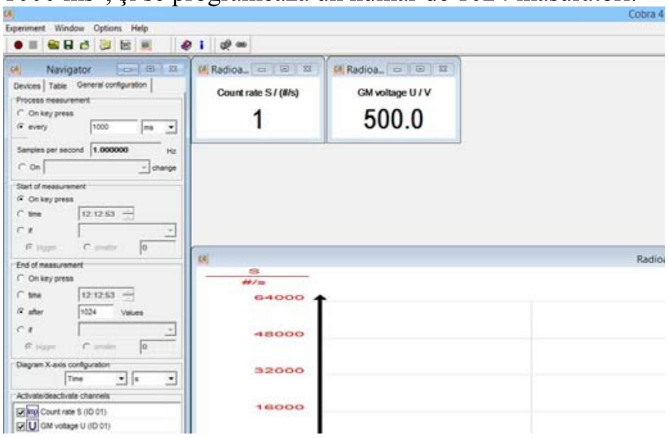
$$P(n) = \mathrm{e}^{-\langle n \rangle}\,\frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

$$P_G(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\langle n \rangle}}\exp\left[-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\langle n \rangle}\right]$$

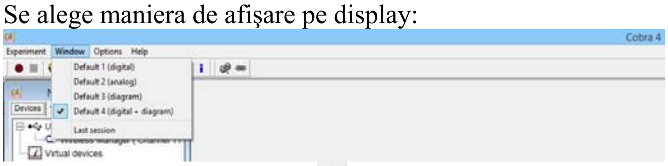
Dispozitivul experimental cuprinde sursa radioactivă, contorul Geiger-Müller, sursa de alimentare a contorului, sistemul wireless de trimitere a datelor la calculatorul pe care este instalat softul de achiziție şi de prelucrare a datelor.



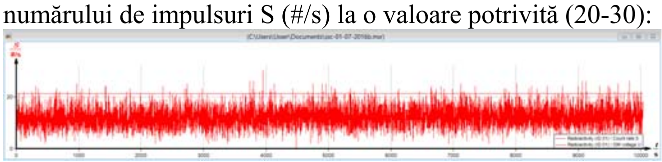
Mod de lucru - distribuția Poisson. Se porneşte programul phywe measure 4, şi se alege General configuration > "every 1000 ms", şi se programează un număr de 1024 măsurători:



Se alege maniera de afişare pe display:

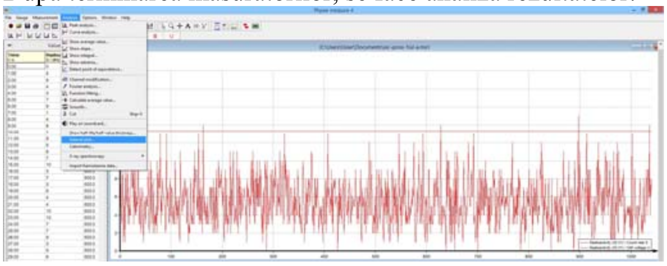


Se porneşte achiziția datelor ●, şi se urmăreşte înregistrarea acestora (după ce se schimbă maximul axei verticale a numărului de impulsuri S (#/s) la o valoare potrivită (20-30):

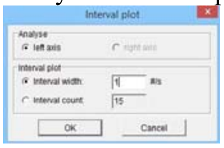


Pentru un timp de numărare de $1\,\mathrm{s}$, cînd sursa de ^{241}Am este la $2{,}0\,\mathrm{cm}$ de detectorul Geiger-Muller, numărul de particule α ce ajung într-un interval de timp dat la detector este mic (<10; se recomandă reglarea distanței pentru un număr mediu de impulsuri în intervalul $3-5$), iar distribuția este de tip Poisson. Se înregistrează măsurătorile numai după ce s-a obținut numărul (mediu) dorit de impulsuri ($3-5$).

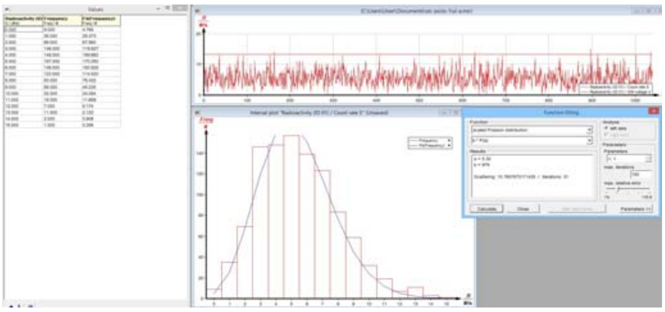
După terminarea măsurătorilor, se face analiza rezultatelor:



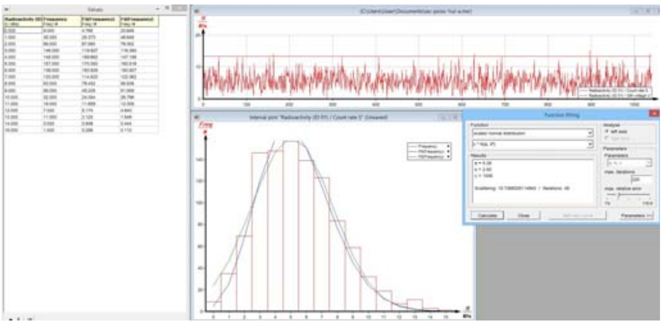
Analysis > Interval plot > interval width 1 #/s



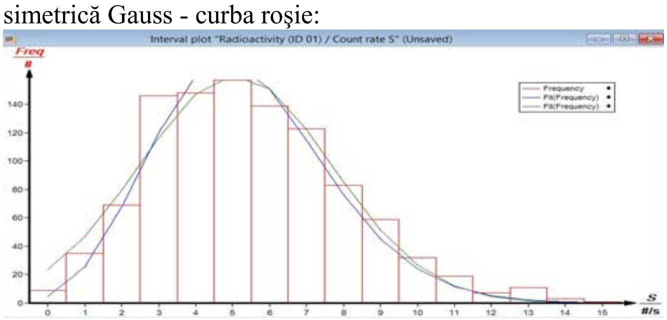
După afişarea frecvenţelor de apariţie: Measurement > Data Table, se merge în Analysis > Function Fitting > scaled Poisson distribution:



apoi Add new curve (se adaugă distribuţia teoretică Poisson; softul permite numai afişarea acesteia sub forma unei curbe), apoi iar în Analysis > Function Fitting > scaled normal distribution:



şi în sfîrşit se compară apariţiile experimentale cu distribuţia asimetrică Poisson - curba albastră, respectiv distribuţia simetrică Gauss - curba roşie:



Datele experimentale pot fi salvate: Measurement > Save data sau exportate Measurement > Export data, şi se poate continua prelucrarea lor. Pot fi trecute într-un tabel de forma:

Tabelul 1. Frecvenţele experimentale de apariţie a impulsurilor datorate sursei radioactive pentru un număr (mediu) mic de impulsuri - distribuţia Poisson

n	$k_{exp}(n)$	$nk_{exp}(n)$	$P(n)$	$k_{thP}(n)$	$P_G(n)$	$k_{thG}(n)$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
	N	Σ				

unde $N=\sum_i k_{i,\exp}$ şi $\Sigma=\sum_i n_i \cdot k_{i,\exp}(n_i)$.

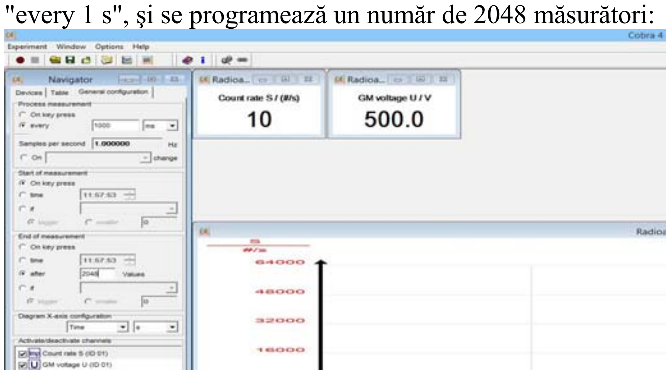
Parametrul distribuţiei Poisson poate fi estimat experimental prin $a=\Sigma/N$, astfel că se poate calcula probabilitatea de apariţie a unui eveniment oarecare n, folosind legile de distribuţie Poisson, respectiv Gauss.

Frecvenţa teoretică de apariţie a evenimentului n este: $k_{thP}(n)=N\cdot P(n)$ pentru o distribuţie Poisson şi $k_{thG}(n)=N\cdot P_G(n)$ pentru o distribuţie Gauss.

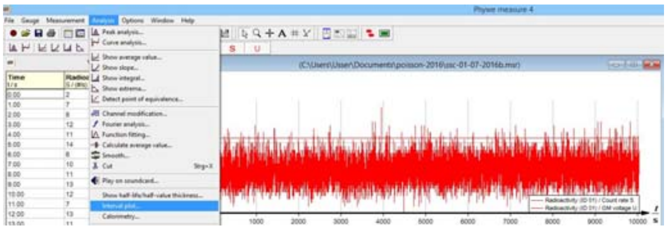
Observaţie: Pentru distribuţia Poisson, se poate demonstra uşor relaţia de recurenţă: $P(n+1)=P(n)\dfrac{a}{n+1}$, relaţie ce poate fi folosită pentru calculul probabilităţilor de apariţie a unui tip de eveniment. Se foloseşte şi $P(0)=\mathrm{e}^{-a}$.

Precizare: Se vor reprezenta pe acelaşi grafic histogramele (*grafice care reprezintă prin dreptunghiuri o distribuţie statistică*) $k_{\exp}(n), k_{thP}(n)$, $k_{thG}(n)$ (conform modelelor din Anexă, care prezintă diverse distribuţii teoretice, şi ca în modelele de mai sus, în care se înlocuiesc *curbele* Poisson şi Gauss cu *histograme*).

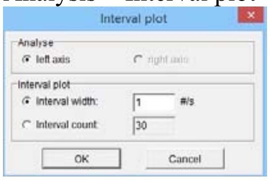
Mod de lucru - distribuţia Gauss. Programul phywe measure 4 fiind pornit, se alege General configuration > "every 1 s", şi se programează un număr de 2048 măsurători:



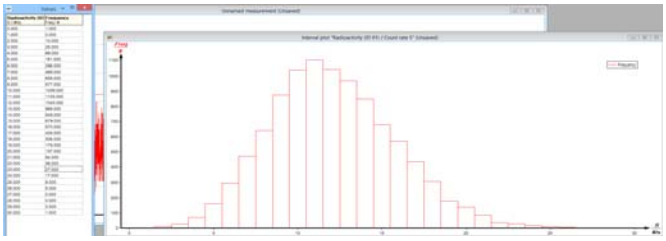
iar sursa se poziționează la $1{,}5\ \mathrm{cm}$ de detector, numărul de particule detectate este mare (>10; se recomandă reglarea distanței pentru un număr mediu de impulsuri în intervalul $12-18$) iar distribuția de tip Poisson tinde către o distribuție de tip Gauss. Se înregistrează măsurătorile numai după ce s-a obținut numărul (mediu) dorit de impulsuri ($12-18$). De aici procedura este identică cu cea de la distribuția Poisson.



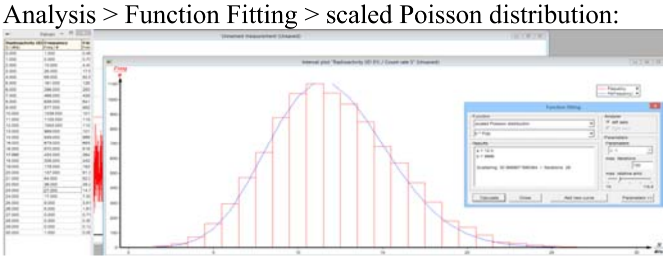
Analysis > Interval plot > interval width 1 #/s



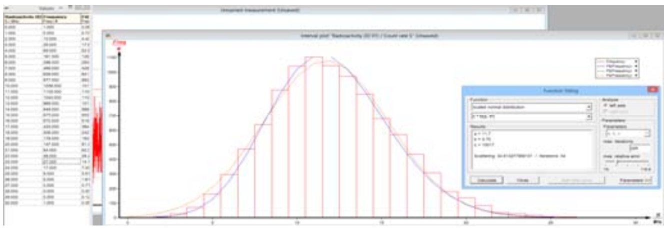
Measurement > Data Table:



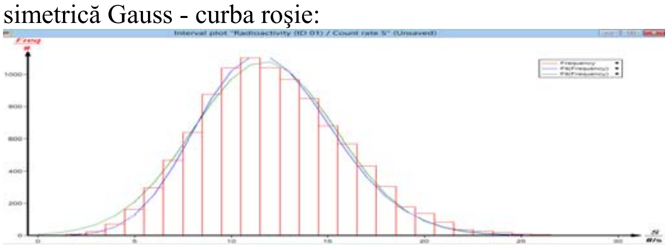
Analysis > Function Fitting > scaled Poisson distribution:



apoi Add new curve (se adaugă distribuția teoretică Poisson), apoi iar în Analysis > Function Fitting > scaled normal distribution:



şi în sfîrşit se compară aparițiile experimentale cu distribuția asimetrică Poisson - curba albastră, respectiv distribuția simetrică Gauss - curba roşie:



(Pentru figurile prezentate aici pentru distribuția Gauss, s-au făcut 10000 de măsurători.)

Tabelul 2. Frecvențele experimentale de apariție a impulsurilor datorate sursei radioactive pentru un număr (mediu) mare de impulsuri - distribuția Gauss

n	$k_{exp}(n)$	$nk_{exp}(n)$	$P(n)$	$k_{thP}(n)$	$P_G(n)$	$k_{thG}(n)$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						
	N	Σ				

unde $N=\sum_i k_{i,\exp}$, $\Sigma=\sum_i n_i\cdot k_{i,\exp}(n_i)$, $a=\Sigma/N$.

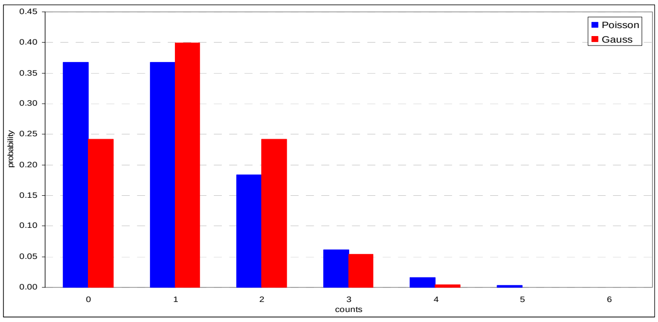
Reamintim că frecvența teoretică de apariție a evenimentului n este: $k_{thP}(n)=N\cdot P(n)$ pentru o distribuție Poisson şi $k_{thG}(n)=N\cdot P_G(n)$ pentru o distribuție Gauss.

Se vor reprezenta pe acelaşi grafic histogramele $k_{\exp}(n), k_{thP}(n), k_{thG}(n)$, ca în modelele din Anexă.

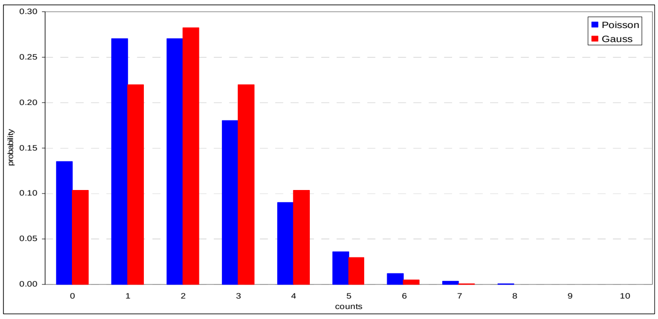
Anexă

Prezentăm cîteva distribuţii Poisson şi Gauss de aceeaşi medie *a* şi deviaţie standard $\sigma = \sqrt{a}$:

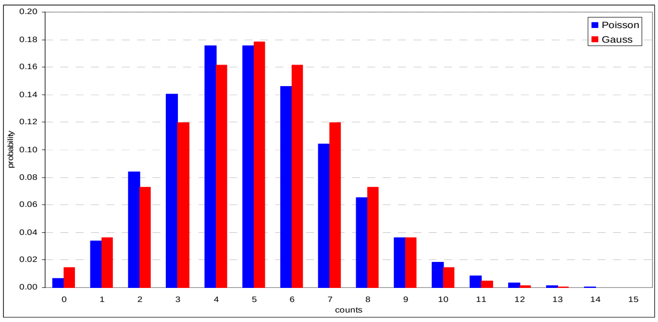
a=1



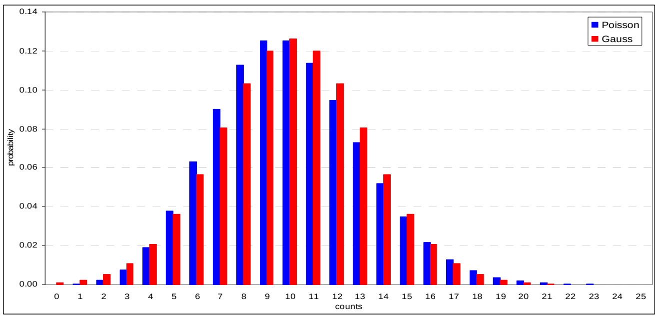
a=2



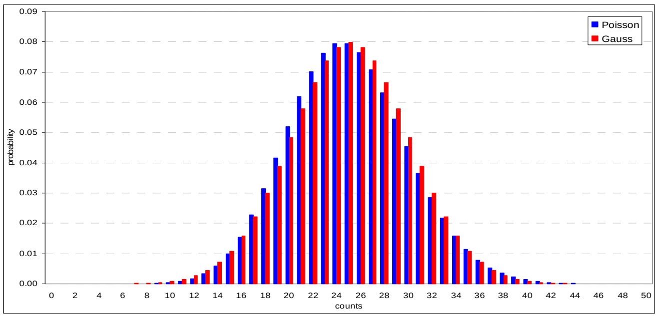
a=5



a=10

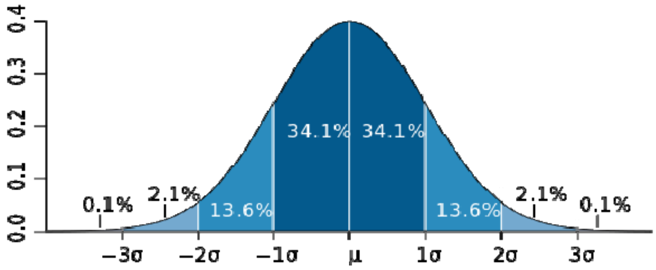


a=25



Pentru distribuţia normală (Gauss), valorile apar în jurul valorii medii cu următoarele probabilităţi:

intervalul	apariţii
$a-\sigma \div a+\sigma$	68.27%
$a-2\sigma \div a+2\sigma$	95.45%
$a-3\sigma \div a+3\sigma$	99.73%



Experimental, se poate calcula procentul din numărul N de măsurători care se găseşte în fiecare dintre intervalele precizate, iar rezultatele se scriu într-un tabel de forma:

intervalul	exact	stînga	dreapta	teoretic
$a-\sigma \div a+\sigma$				68.27%
$a-2\sigma \div a+2\sigma$				95.45%
$a-3\sigma \div a+3\sigma$				99.73%

unde "exact" inseamnă că se ia *exact* intervalul specificat, "stînga" înseamnă ca se ia intervalul puţin deplasat spre stînga, între valorile întregi ale limitelor specificate ale intervalului, iar "dreapta" înseamnă ca se ia intervalul puţin deplasat spre dreapta, între valorile rotunjite la întregul superior ale limitelor specificate ale intervalului (pentru o distribuţie Poisson de parametru mic, asta are o mai mare importanţă, pe cînd pentru una de parametru mare, care tinde către o distribuţie Gauss, aceste intervale deplasate faţă de intervalul exact au o mai mică importanţă).

Ca informaţie, pentru o distribuţie normală (Gauss) dăm şi probabilităţile ca valorile să fie în interiorul sau în afara intervalelor următoare:

intervalul	P teoretic	1-P teoretic
$a-4\sigma \div a+4\sigma$	0.999937	6.3E-05
$a-5\sigma \div a+5\sigma$	0.99999943	5.7E-07
$a-6\sigma \div a+6\sigma$	0.9999999980	2.0E-09

De asemenea, dacă se repetă de M ori înregistrarea în condiţii identice a distribuţiei de N măsurători şi se fac cele M medii corespunzătoare, se poate calcula procentul din numărul M de înregistrări pentru care media se găseşte în fiecare dintre intervalele:

$$\left(a_{MN} - \sigma_N \div a_{MN} + \sigma_N\right)$$
$$\left(a_{MN} - 2\sigma_N \div a_{MN} + 2\sigma_N\right)$$
$$\left(a_{MN} - 3\sigma_N \div a_{MN} + 3\sigma_N\right)$$

unde a_{MN} este media pe toate măsurătorile a numărului de impulsuri iar

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{a_{MN}}{N}} .$$