UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" BUCUREȘTI
CATEDRA DE FIZICĂ

LABORATORUL DE FIZICĂ ATOMICĂ Ş FIZICĂ NUCLEARĂ
BN - 030

STUDIUL DEZINTEGRĂRILOR RADIOACTIVE. VERIFICAREA DISTRIBUȚIEI POISSON

1997

STUDIUL DEZINTEGRĂRILOR RADIOACTIVE. VERIFICAREA DISTRIBUȚIEI POISSON

1. Scopul lucrării

Se verifică condițiile experimentale de realizare a distribuției Poisson, aflându-se estimatele parametrului acestei distribuții.

2. Teoria lucrării

Să considerăm un detector iradiat cu un fascicul de particule ionizate, ce sunt statistic independente una de alta, ca de exemplu un fascicul de raze cosmice sau din fondul natural de radiații. Ajungerea uneia din particule în detector constituie un fenomen întâmplător (aleatoriu). De aceea, în cursul diferitelor intervale de timp egale prin detector va trece un număr diferit de particule. Care este în aceste condiții probabilitatea $p_k(t)$ ca în cursul intervalului de timp t în detector să ajungă k particule ?

O astfel de problemă este tipică pentru un număr mare de fenomene ale fizicii nucleare, cele mai multe dintre ele deosebindu-se de cea prezentată numai prin aceea că în locul numărului de particule ce ajung în detector este luat în considerare numărul altor fenomene, ca de exemplu numărul de dezintegrări ale unei substanțe radioactive dintr-un anumit interval de timp, numărul de stele α pe o anumită suprafață dintr-o emulsie nucleară iradiată uniform, etc.

Pentru simplificare, în continuare se va vorbi numai despre numărul de evenimente ce au loc într-un interval de timp t.

Să considerăm un interval de timp dt foarte mic (la limită infinit mic) și să presupunem că probabilitatea realizării în cursul acestui interval de timp a unui singur eveniment $p_1(dt)$ este proporțională cu dt, adică:

$$p_1(dt) = n \cdot dt \tag{1}$$

în care mărimea n, de obicei, este denumită intensitate. În general intensitatea poate să depindă de timp, însă vom presupune că ea este constantă.

Pentru ca în timpul dt să aibă loc două evenimente, este necesar ca după primul eveniment, în cursul timpului care a mai rămas până la sfârșitul intervalului dt, să aibă loc cel de al doilea eveniment. Probabilitatea fiecăruia din aceste cazuri este dată de o relație de forma (1), fiind un infinit mic de ordinul întîi datorită lui dt. Având în vedere independența statistică a celor două evenimente, probabilitatea $p_2(dt)$ de realizare a celor două evenimente este egală cu produsul probabilităților lor, adică va fi un infinit mic de ordinul doi în raport cu dt. În mod analog ne convingem că probabilitățile $p_3(dt), p_4(dt), \ldots$ de realizare a 3,4, ... evenimente în cursul intervalului de timp dt sunt infiniți mici de ordinul trei, patru, ... De aceea, în egalitatea evidentă:

$$p_0(dt) + p_1(dt) + p_2(dt) + p_3(dt) + \ldots = 1,$$

care exprimă faptul că în intervalul de timp dt are loc cu certitudine un număr oarecare de evenimente, se pot neglija termenii de la ordinul doi în sus, rezultând că:

$$p_0(dt) = 1 - p_1(dt),$$

care împreună cu relația (1) dă:

$$p_0(dt) = 1 - n \cdot dt .$$

Din această relație rezultă că:

$$p_0(dt) = 1 \tag{2}$$

Condiția (2) exprimă faptul că în cursul unui interval de timp de mărime nulă nu poate avea loc nici un eveniment și deci:

$$p_0(0) = p_2(0) = \ldots.0 \tag{2'}$$

Pentru calcularea probabilității $p_k(t)$ vom începe cu cel mai simplu caz, cel al probabilității $p_0(t)$ ca în cursul intervalului de timp t să nu aibă loc nici un eveniment. Să considerăm pentru început un interval de timp $t+dt$ nu pre mare și să calculăm $p_0(t+dt)$.

Pentru ca în intervalul $t+dt$ să nu aibă loc nici un eveniment este necesar și suficient ca să nu existe nici un eveniment atât în intervalul t, cât și în intervalul dt. Datorită independenței statistice a evenimentelor ce au loc în intervale independente (nesuprapuse), probabilitatea realizării simultane a celor două cazuri este egală cu produsul probabilităților fiecărui caz în parte, deci:

$$p_0(t+dt) = p_0(t)\cdot p_0(dt) = p_0(t)\cdot(1-ndt).$$

Pe de altă parte, cu o precizie până la termenul de ordinul $(dt)^2$, avem că:

$$p_0(t+dt) = p_0(t) + \frac{dp_0(t)}{dt}dt.$$

Din cele două expresii ale lui $p_0(t+dt)$, după simplificările corespunzătoare, obținem ecuația diferențială:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + np_0 = 0 \tag{3}$$

pentru determinarea lui $p_0(t)$. Rezolvând ecuația (3) cu condiția inițială (2), obținem că:

$$p_0(t) = e^{-nt} \tag{4}$$

Să calculăm acum $p_k(t)$, presupunând $k \geq 1$. Ca și mai înainte, să calculăm pentru început $p_k(t+dt)$. Pentru ca în intervalul $t+dt$ să aibă loc k evenimente, este necesar și suficient să se realizeze unul din următoarele cazuri:

- în intervalul *t* au avut loc *k* evenimente, în *dt* nici unul;
- în intervalul *t* au avut loc $k-1$ evenimente, în *dt* un evenimente;
- în intervalul *t* au avut loc $k-2$ evenimente, în *dt* 2 evenimente;

....

- în intervalul *t* nu a avut loc nici un eveniment, în *dt* au avut loc *k* evenimente.

Datorită independenței statistice a evenimentelor ce au loc în intervalele nesuprapuse, rezultă că:

$$p_k(t+dt) = p_k(t)\cdot p_0(dt) + p_{k-1}(t)\cdot p_1(dt) + p_{k-2}(t)\cdot p_2(dt) + \\ +\ldots+ p_0(t)\cdot p_k(dt)$$

Neglijând infiniții mici de ordinul doi și mai mare, relația de mai sus devine:

$$p_k(t+dt) = p_k(t)\cdot p_0(dt) + p_{k-1}(t)\cdot p_1(dt),$$

adică:

$$p_k(t+dt) = p_k(t)(1-ndt) + p_{k-1}(t)\cdot n\cdot dt$$

Pe de lată parte:

$$p_k(t+dt) = p_k(t) + \frac{dp_k(t)}{dt}\cdot(dt).$$

Comparând cele două expresii ale lui $p_k(t+dt)$ după simplificările corespunzătoare, obținem ecuația diferențială:

$$\frac{dp_k}{dt} + np_k = np_{k-1} \tag{5}$$

pentru probabilitatea $p_k(t)$, care trebuie rezolvată impunând condițiile (2').

Înlocuind succesiv $k = 1,2,3,\ldots$ în ecuația (5) și ținând cont de relația (4), obținem probabilitățile $p_1(t), p_2(t)$, și așa mai departe. Se poate vefica că soluția sistemului de ecuații (5) și (3) este:

$$p_k(t) = \frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt} \tag{6}$$

Notând $nt = a$, care este o mărime constantă pentru un interval t fixat și o intensitate n constantă, relația (6) devine:

$$p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{7}$$

care reprezintă legea de distribuție Poisson.

Rezultatul obținut poate fi interpretat în două moduri. Considerând un număr foarte mare de instalații complet identice, compuse din surse de particule identice, în cursul unui interval de timp t primul detector înregistrează k_1 particule, al doilea k_2 particule și așa mai departe. Atunci valorile $k_1, k_2, \ldots$ sunt distribuite după legea Poisson (7). Considerând acum numai un singur detector și o singură sursă, detectorul va înregistra un număr $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de particule în cursul unui număr mare de intervale de timp egale între ele. Dacă intensitatea n este constantă, deci parametrul a este constant, valorile k_1 vor fi de asemenea distribuite după legea Poisson:

$$p(x) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{8}$$

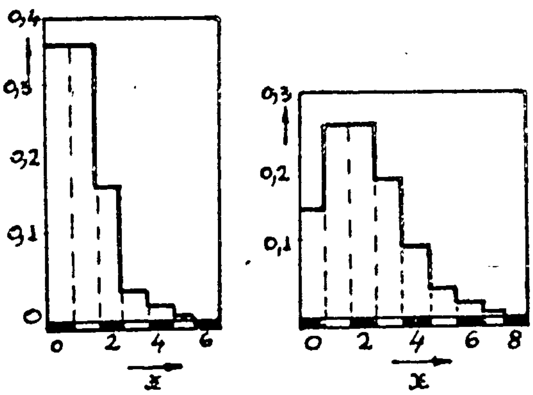

Fig. 1.

O mărime, care reprezintă un număr de evenimente (variabil în raport cu un anumit factor - timp, suprafață, volum, etc.), este distribuită Poisson dacă satisface condițiile:

a) este un număr întreg și pozitiv, inclusiv zero:

b) într-un interval foarte mic al domeniului de variație se poate produce sau un singur eveniment sau nici unul (probabilitatea producerii a două sau mai multe evenimente în acest interval este nulă);

c) probabilitatea producerii unui singur eveniment într-un asemenea interval foarte mic este proporțională cu mărimea intervalului.

De aici rezultă pentru dispersie:

$$\sigma^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2 = a^2 + a - a^2 = a \tag{9}$$

Deci parametrul a al distribuției Poisson reprezintă speranța matematică $\langle x \rangle$ a variabilei aleatorii, precum și dispersia σ^2.

Estimarea parametrului *a* al distribuției

Repetarea de n ori, în condiții identice, a măsurării directe a unei mărimi distribuită Poisson oferă un colectiv de valori numerice $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, evident unele valori putându-se repeta. Probabilitatea W a realizării simultane a tuturor celor n valori individuale este egală cu produsul probabilităților individuale:

$$W = e^{-a}\,\frac{a^{x_1}}{x_1\,!}\cdot e^{-a}\,\frac{a^{x_2}}{x_2\,!}\cdot\ldots\cdot e^{-a}\,\frac{a^{x_n}}{x_n\,!} = \prod_{i=1}^{n} e^{-a}\,\frac{a^{x_i}}{x_i\,!} \qquad (10)$$

a cărei valoare nu poate fi calculată datorită necunoașterii parametrului a.

În ipoteza plauzabilității maxime, drept estimat al parametrului a se consideră acea valoare pentru care funcția W își atinge maximul său, atunci estimatul parametrului a al distribuției se obține din condiția:

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a} = 0 \qquad (11)$$

Logaritmând relația (10), obținem:

$$\ln W = -na + \ln a \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\,!$$

și derivând în raport cu a:

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a} = -n + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,$$

astfel că din condiția (11) se obține estimatul:

$$a^{*} = est(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \qquad (12)$$

care este un estimat consistent și nedeplasat.

Deci, conform relației (10), estimatul parametrului a al distribuției Poisson este media aritmetică $\overline{x}$ a șirului de valori obținute experimentale.

Distribuția valorii medii

Valoarea medie $\overline{x}$ a șirului de valori experimentale este la rândul său o mărime fluctuantă. Pentru a stabili legea sa de distribuție, să calculăm funcția generatoare a distribuției. În conformitate cu "Teoria erorilor", funcția generatoare a distribuției medie este:

$$m_{\overline{x}}(\lambda) = \left[m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n .$$

Deoarece variabila x este distribuită Poisson, în conformitate cu relația (9), obținem că:

$$m_{\overline{x}}(\lambda) = e^{-a}\cdot e^{ae^{\frac{\lambda}{n}}} \qquad (13)$$

astfel că:

$$m_{\overline{x}}(\lambda) = e^{-na}\cdot e^{nae^{\frac{\lambda}{n}}} = e^{na\left(e^{\frac{\lambda}{n}}-1\right)} \qquad (14)$$

Derivatele acestei funcții generatoare sunt:

$$m'_{\overline{x}}(\lambda) = ae^{\frac{\lambda}{n}}\cdot e^{na} = e^{na\left(e^{\frac{\lambda}{n}}-1\right)}$$

$$m''_{\overline{x}}(\lambda) = ae^{\frac{\lambda}{n}}\cdot e^{na(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)}\cdot\frac{1}{n} + ae^{\frac{\lambda}{n}}$$

Pentru $\lambda = 0$ se obțin speranțele matematice:

$$\left\langle \bar{x} \right\rangle = a$$

$$\left\langle \bar{x}^2 \right\rangle = a\left(\frac{1}{n} + a\right) \qquad (15, 16)$$

astfel că dispersia este:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left\langle \bar{x}^2 \right\rangle - \left\langle \bar{x} \right\rangle^2 = a\left(\frac{1}{n} + a\right) - a^2 = \frac{a}{n} \qquad (17)$$

Deci media $\bar{x}$ a șirului de valori experimentale este o mărime distribuită Poisson cu speranța matematică *a* și dispersia $\frac{a}{n}$.

Estimatul disperisiei mediei este deci:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{est(a)}{n} = \frac{\bar{x}}{n} \qquad (18)$$

Numărul de particule care ajung într-un detector iradiat de o sursă radioactivă cu o intensitate constantă și deci cadența impulsurilor înregistrate de detector, adică numărul de impulsuri înregistrate în intervale de timp egale, prezintă fluctuații.

Pentru un număr infinit de înregistrări, presupunând că duratele acestora sunt riguros egale, numerele de impulsuri obținute sunt distribuite după legea Poisson:

$$P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!} \qquad (19)$$

unde $P(x)$ reprezintă probabilitatea ca la înregistrare să se obțină x impulsuri, iar *a* reprezintă media statistică (speranța matematică) a impulsurilor înregistrate:

$$a = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(x) \qquad (20)$$

Pentru un număr limitat *N* de înregistrări se poate presupune că formula (1) își păstrează valabilitatea doar dacă *N* este suficient de mare. În acest caz numărul de înregistrări în care se obține același număr *x* de impulsuri va fi:

$$K_c(x) = P(x) \cdot N \qquad (21)$$

unde indicele *c* are semnificația că această valoare se obține prin calcul. $K_c(x)$ este definit ca frecvența de apariția a fenomenului *x*, adică de câte ori în seria celor *N* înregistrări vor fi înregistrate *x* impulsuri.

În această lucrare se urmărește a se compara pentru un număr *N* mare de înregistrări, distribuția experimentală a valorilor *x* cu o distribuție Poisson calculată, adică compararea frecvențelor de apariție experimentale $K_e(x)$ cu frecvențele calculate $K_c(x)$.

Pentru determinarea probabilităților Poisson este necesară cunoașterea parametrului *a* al distribuției. Însă acesta este necunoscut, valoarea lui depinzând de intensitatea sursei radioactive (numărul de particule emise în unitatea de timp), tipul detectorului și tensiunea sa de funcționare, geometria înregistrării. Din această cauză parametrul *a* va fi înlocuit cu estimatul său, care s-a demonstrat a fi valoarea medie aritmetică a șirului de valori x_i experimentale:

$$est\ a = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i)}{\sum_{i=1}^{n'} K_e(x_i)} \qquad (22)$$

în care n' reprezintă numărul de valori *x* diferite obținute.

În scopul înlesnirii calculelor, valorile probabilităților Poisson se găsesc într-un tabel din anexa lucrării, pentru valori ale parametrului a între 7,0 și 15,0 în pas de 0,1.

Pentru compararea distribuțiilor experimentală și calculată, se utilizează testul χ^2 (Pearson). În acest scop se calculează mărimea χ^2, definită ca:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n'} \frac{\left[K_e(x_i) - K_c(x_i)\right]^2}{K_c(x_i)} \tag{23}$$

χ^2 este, la rândul său, o mărime fluctuantă, prezentând o distribuție cu un număr $n = n' - 1$ grade de libertate, întrucât distribuției Poisson teoretică i s-a impus condiția de a avea aceiași valoare medie cu distribuția experimentală.

Probabilitatea de realizare a unei valori mai mari decât o anumită valoare χ^2, pentru un număr n de grade de libertate, este:

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int_{\chi^2}^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} dy$$

Valorile $P(\chi^2, n)$ sunt date într-un tabel din anexa lucrării pentru valori $\chi^2 \in [1,30]$ și $n \in [6,15]$.

Se consideră că distribuția experimentală a valorilor x concordă cu o distribuție Poisson dacă $P(\chi^2, n)$ are o valoare cuprinsă între 5% - 95%.

$P(x^2, n)$ reprezintă probabilitatea ca un alt ansamblu de determinări experimentale să prezinte o abatere față de distribuția Poisson calculată mai mare sau cel puțin egală.

3. Dispozitivul experimental

Montajul cuprinde un detector cu scintilație conectat la un numărător electronic NUMEPORT 537A

4. Instrucțiuni de utilizare a numărătorului electronic

Pe panoul frontal sunt patru comutatoare:
ALIMENTARE, IMPULSURI, CICLU UNIC, STOP.

Se trece comutatorul de STOP pe *T*, timp, comutatorul de CICLU UNIC pe cifra 2, care corespunde la o pauză de 2 sec între înregistrări consecutive, comutatorul de IMPULSURI pe cifra 2 care marchează numărul de secunde în care se face înregistrarea de impulsuri. Se alimentează numărătorul de la rețeaua de curent și se trece comutatorul de ALIMENTARE pe poziția LUCRU.

Numărul de impulsuri este afișat electronic în caseta IMPULSURI iar timpul corespunzător în caseta SECUNDE. În aceste condiții numărătorul înregistreză timp de două secunde numărul de impulsuri detectate și becul START este apris după care afișează timp de 2 secunde (becul START este stins), șterge înregistrarea anterioară și pornește automat o nouă înregistrare.

5. Modul de lucru

Se întocmeşte un tabel în care pe linie se consideră numărul x_i de impulsuri afişate după 2 secunde, iar pe verticală se marchează apariţia numărului de impulsuri afişat corespunzător la fiecare înregistrare consecutivă. Se recomandă ca valorile afişate x_i să fie cuprinse între 0 şi 20.

Dacă numărul de impulsuri înregistrate depăşesc 20 de impulsuri se măreşte pragul de sensibilitate al numărătorului.

6. Prelucrarea datelor experimentale

Se întocmeşte un tabel ca acesta:

x_i	$K_e(x_i)$	$x_i K_e(x_i)$	$P(x_i)$	$K_c(x_i)$	$K_e(x_i)$ - $K_c(x_i)$	$\frac{[K_e(x_i) - K_c(x_i)]^2}{K_c(x_i)}$
x_i ... $x_{n'}$	....	....	....	....	....	....
Suma	N	$\sum$				χ^2

Pe prima coloană sunt trecute numerele de impulsuri *x* diferite obţinute, iar pe cea de a doua coloană sunt trecute frecvenţele de apariţie experimentale $K_e(x_i)$ care se socotesc cu ajutorul datelor înscrise în primul tabel. Suma valorilor $K_e(x_i)$ reprezintă numărul total *N* de măsurători înregistrate.

Suma $\sum$ a valorilor $x_i K_e(x_i)$ din cea de a treia coloană serveşte la determinarea estimatului parametrului a cu (22). Pe cea de a patra coloană se trec valorile probabilităţilor Poisson $P(x_i)$ calculate după relaţia (19) în care parametrul a este înlocuit cu estimatul său $\bar{x}$. Aceste valori se extrag din tabelul cu probabilităţi Poisson din anexa lucrării.

Următoarea coloană cuprinde frecvenţele de apariţie $K_c(x_i)$ calculate cu ajutorul relaţiei (21) cu o precizie de o singură zecimală şi se aproximează cu valoarea înreagă, prin rotunjirea corespunzătoare.

În scopul calculării mărimii χ^2 se completează ultimele două coloane, suma valorilor cuprinse în ultima coloană reprezentând valoarea χ^2.

Cu valoarea χ^2 obţinută şi numărul $n = n' - 1$ se determină din tabelul de valori ale probabilităţilor $P(\chi^2, n)$ din anexa lucrării valoarea probabilităţii $P(\chi^2, n)$.

Se construiesc apoi pe hârtie milimetrică histograma teoretică şi histograma experimentală, pe acelaşi grafic, eventual cu culori diferite; pe abscisă se consideră numărul de impulsuri x_i, iar în ordonată frecvenţele de apariţie calculate $K_c(x_i)$, respectiv experimentele $K_e(x_i)$.

Referatul asupra lucrării va cuprinde un rezumat al teoriei, cel de al doilea tabel, graficul cu cele două histograme şi valoarea probabilităţii $P(\chi^2, n)$.

7. Utilitatea lucrării; aplicaţii în economie

Obişnuirea studenţilor cu aplicarea metodelor statistice în prelucrarea evenimentelor aleatoare şi a lanţurilor stochastice.

8. Întrebări preliminare

1) Ce este distribuția statistică ?
2) Care este parametrul distribuției Poisson ?
3) Care sunt condițiile de valabilitate a distribuției Poisson ?
4) În ce constă metoda maximei plauzibilități ?
5) Care sunt estimatele de maximă plauzibilitate pentru distribuția Poisson ?
6) Ce este funcția generatoare a unei distribuții ?
7) În ce constă testul χ^2 ?
8) Imaginați o organigramă pentru prelucrarea la calculator a datelor experimentale.
9) Care este montajul utilizat în cadrul lucrării
10) Ce legătură cunoașteți între distribuția Poisson, Gauss și binomială.

9. Observații

Testul χ^2 este o metodă statistică principală de verificare a faptului dacă o distribuție este de tip Poisson, întrucât acest test este rapid aplicabil, și ușor de modelat în calculele executate automat.

Deoarece între distribuțiile Poisson, Gauss și Bernoulli există relații de legătură imediate, obținute pe baza formulei lui Sticlang, se pot elabora metode statistice de verificare a unor astfel de distribuții, prin extinderea rezultatelor prezentei lucrări.

Aceste distribuții, fiind cele mai des întâlnite în informatică, statistică matematică, modelarea procedeelor din economie și tehnică, importanță acestei lucrări se extinde în afara studiilor din cadrul laboratoarelor de fizică.