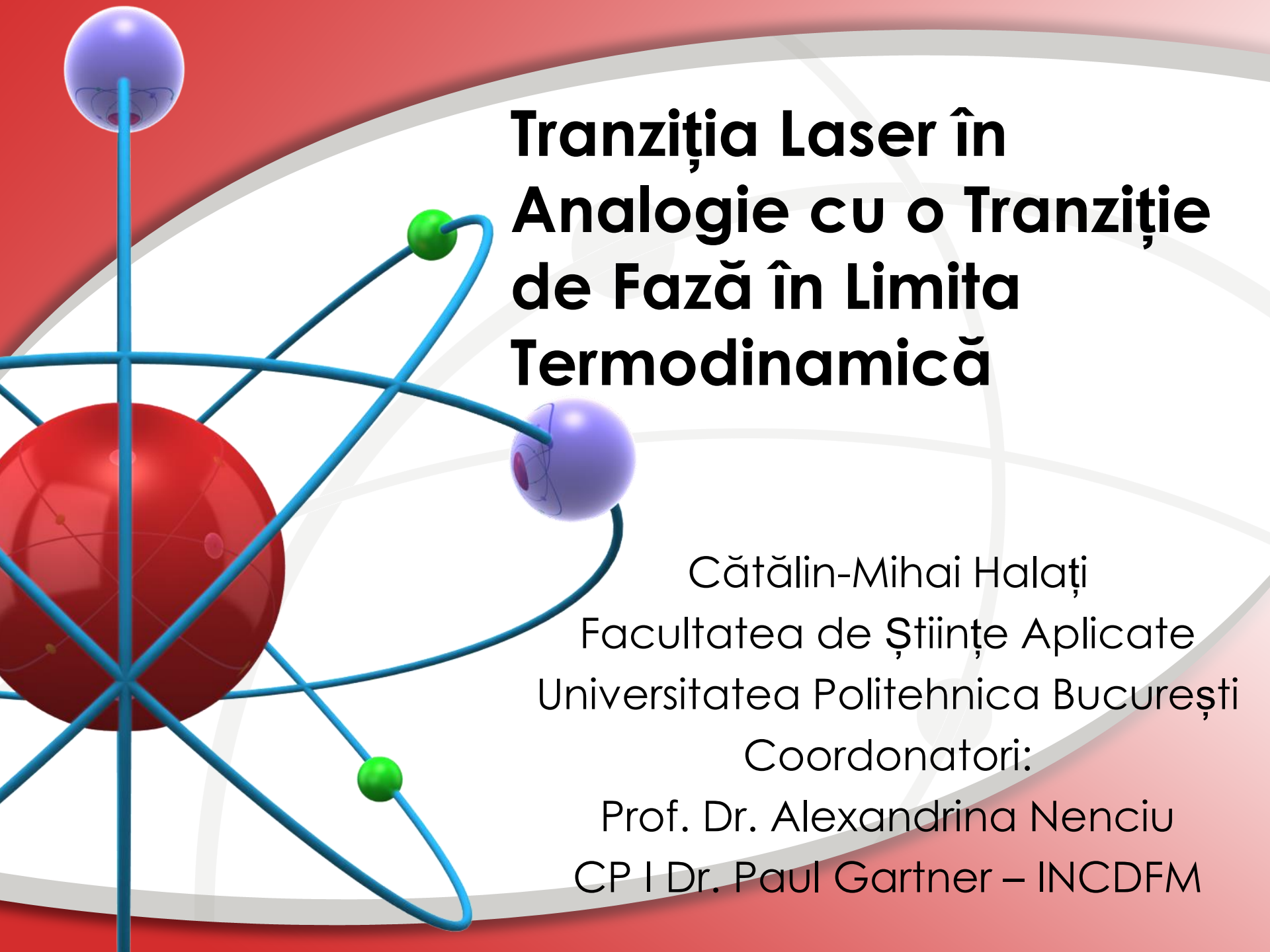




Tranziția Laser în Analogie cu o Tranziție de Fază în Limita Termodinamică

Cătălin-Mihai Halați

Facultatea de Științe Aplicate
Universitatea Politehnica București

Coordonatori:

Prof. Dr. Alexandrina Nenciu
CP I Dr. Paul Gartner – INCDFM

Motivație

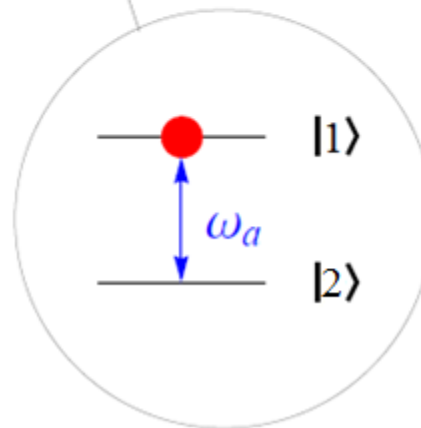
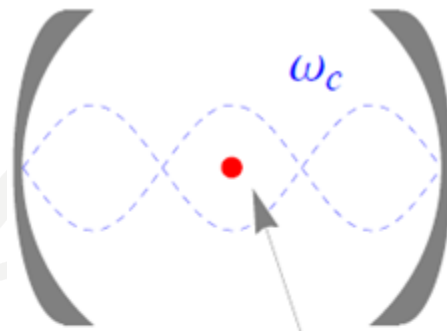
- Problema pragului laser – obținerea unui **criteriu** potrivit pentru a distinge când sistemul se află în starea laser și calculul valorii de prag exacte;

O problemă clasică [1], [2], dar încă dezbătută [3]:

- [1] V. DeGiorgio and M. O. Scully, *Analogy between the **Laser Threshold Region** and a Second-Order Phase Transition*, Phys. Rev. A **2**, 1170 (1970);
- [2] P. R. Rice and H. J. Carmichael, *Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the **laser – phase-transition analogy***, Phys. Rev. A **50**, 4318 (1994);
- [5] C. Z. Ning, *What is **Laser Threshold**?*, Quantum Electronics, IEEE **19**, 1503604 (2013);
- Starea laser de **neechilibru** ca analog al unei tranziții de fază;

Imaginea Fizică

- Un sistem de N atomi identici în interacție rezonantă cu un mod al cavității;



$$\delta = \omega_c - \omega_a = 0$$

Cadrul Matematic

Modelul de Interacție Jaynes-Cummings

Describe sistemul atomic cu 2 nivele în interacție cu un mod cuantificat al cavității optice:

$$H = H_0 + H_{JC} = \varepsilon_1 \sigma_+ \sigma_- + \varepsilon_2 \sigma_- \sigma_+ + \omega_c a^\dagger a + g a^\dagger \sigma_- + g^* a \sigma_+$$

Cadrul Matematic

Modelul de Interacție Jaynes-Cummings

Describe sistemul atomic cu 2 nivele în interacție cu un mod cuantificat al cavității optice:

$$H = H_0 + H_{JC} = \underbrace{\varepsilon_1 \sigma_+ \sigma_- + \varepsilon_2 \sigma_- \sigma_+}_{\text{Hamiltonianul atomic}} + \underbrace{\omega_c a^\dagger a}_{\text{Hamiltonianul câmpului liber}} + \underbrace{ga^\dagger \sigma_- + g^* a \sigma_+}_{\text{Hamiltonianul de interacție}}$$

Hamiltonianul atomic

Hamiltonianul câmpului
liber

Hamiltonianul de
interacție

$$\sigma_+ = |1\rangle\langle 2|$$

$$\sigma_- = |2\rangle\langle 1|$$

$$\omega_a = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

g – constanta de cuplaj

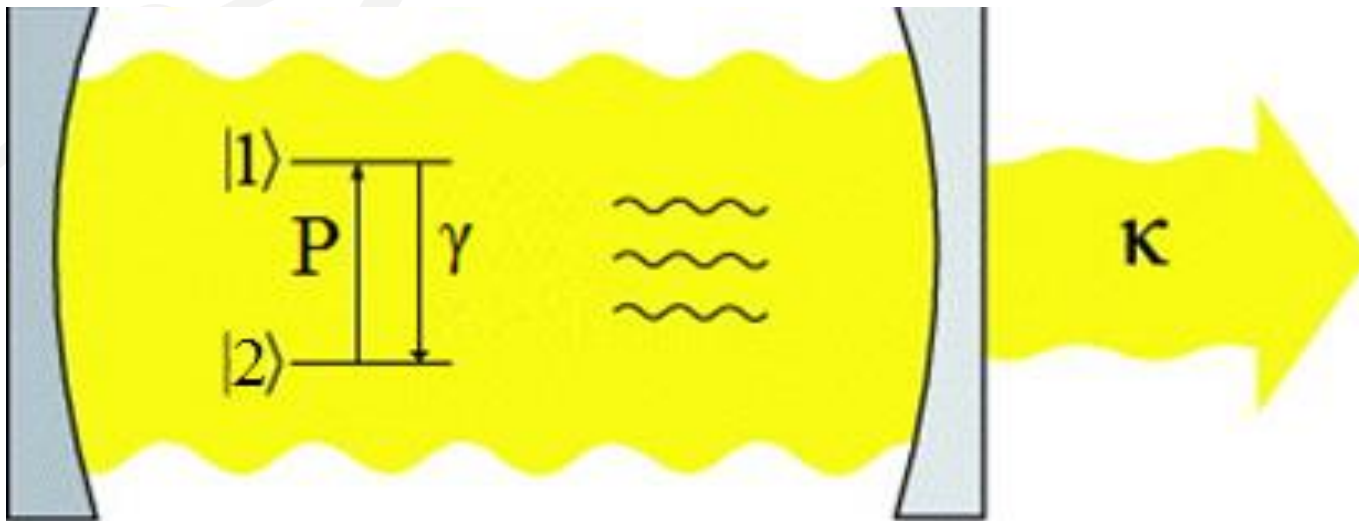
Cadrul Matematic

Ecuția von Neumann – Lindblad

Ecuția von Neumann-Lindblad pentru operatorul de densitate $\rho(t)$, scrisă în sistemul de referință rotațional al lui H_0 are forma:

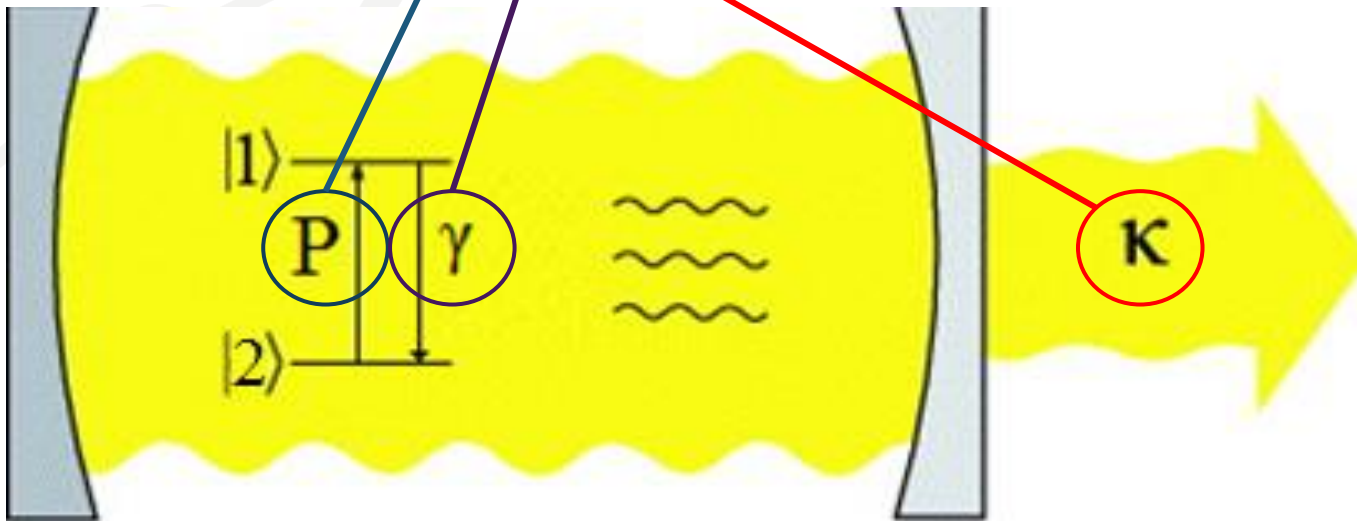
Ecuția von Neumann – Lindblad

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -i[H_{JC}, \rho] \\ & + \frac{P}{2} [2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+] \\ & + \frac{\gamma}{2} [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-] \\ & + \frac{\kappa}{2} [2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] \end{aligned}$$



Ecuția von Neumann – Lindblad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -i[H_{JC}, \rho] + \frac{P}{2} [2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+] + \frac{\gamma}{2} [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-] + \frac{\kappa}{2} [2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a]$$



Ecuția Master

Ecuția Master– dedusă din ecuația von Neumann-Lindblad în anumite aproximații, pentru **elementele diagonale** ale operatorului de densitate $\rho(t)$:

$$p(n, N_1) = \langle n, N_1 | \rho | n, N_1 \rangle$$

→ **probabilitatea** de a avea o stare cu n fotoni în cavitate și N_1 atomi pe nivelul excitat.

Ecuția Master

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1) &= R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 &+ Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 &+ \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 &+ P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 &+ \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

$N = N_1 + N_2$ – *numărul total de atomi = constant*

$R = \frac{4g^2}{\kappa + \gamma + P}$ – *rata emisiei spontane*

Ecuția Master

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 &+ Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 &+ \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 &+ P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 &+ \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

→ Absorbție

Ecuția Master

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 &+ Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 &+ \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 &+ P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 &+ \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

→ Absorbție

→ Emisie stimulată și spontană

Ecuția Master

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 &+ Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 &+ \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 &+ P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 &+ \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

→ Absorbție

→ Emisie stimulată și spontană

→ Procese neradiative induse de rezervor

Ecuția Master

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1)$$

$$\begin{aligned}
 = & R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 & + Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 & + \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 & + P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 & + \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

→ Absorbție

→ Emisie stimulată și spontană

→ Procese neradiative induse de rezervor

→ Pompaj incoerent

Ecuția Master

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, N_1)$$

$$\begin{aligned}
 = & R(n+1)(N_2+1)p(n+1, N_1-1) - RnN_2p(n, N_1) \\
 & + Rn(N_1+1)p(n-1, N_1+1) - R(n+1)N_1p(n, N_1) \\
 & + \gamma[(N_1+1)p(n, N_1+1) - N_1p(n, N_1)] \\
 & + P[(N_2+1)p(n, N_1-1) - N_2p(n, N_1)] \\
 & + \kappa[(n+1)p(n+1, N_1) - np(n, N_1)]
 \end{aligned}$$

→ Absorbție

→ Emisie stimulată și spontană

→ Procese neradiative induse de rezervor

→ Pompaj incoerent

→ Pierderile cavității

Valori medii

Numărul de fotoni din cavitate = $\langle n \rangle$

$$\langle a^\dagger a \rangle = \text{Tr}[a^\dagger a \rho]$$

Inversia de populație = $\langle N_1 - N_2 \rangle = \langle \sigma_z \rangle$

$$\langle \sigma_z \rangle = \text{Tr}[\sigma_z \rho] = \text{Tr}[(\sigma_+ \sigma_- - \sigma_- \sigma_+) \rho]$$

Ecuatii de rată

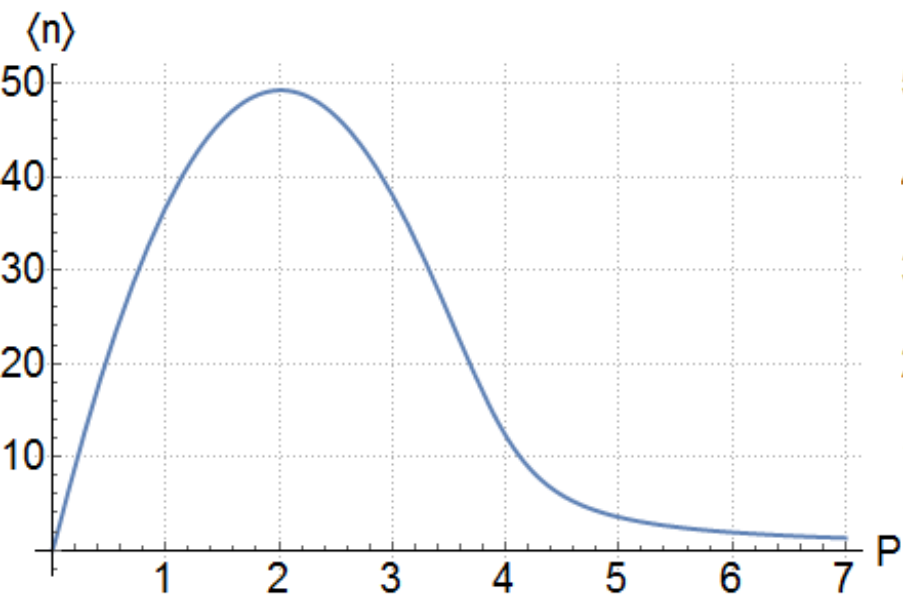
Deduse din ecuația Master într-o aproximație de tip Mean field:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle = R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle - R \langle n \rangle (N - \langle N_1 \rangle) - \kappa \langle n \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle N_1 \rangle = -R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + R \langle n \rangle (N - \langle N_1 \rangle) - \gamma \langle N_1 \rangle + P(N - \langle N_1 \rangle) \end{cases}$$

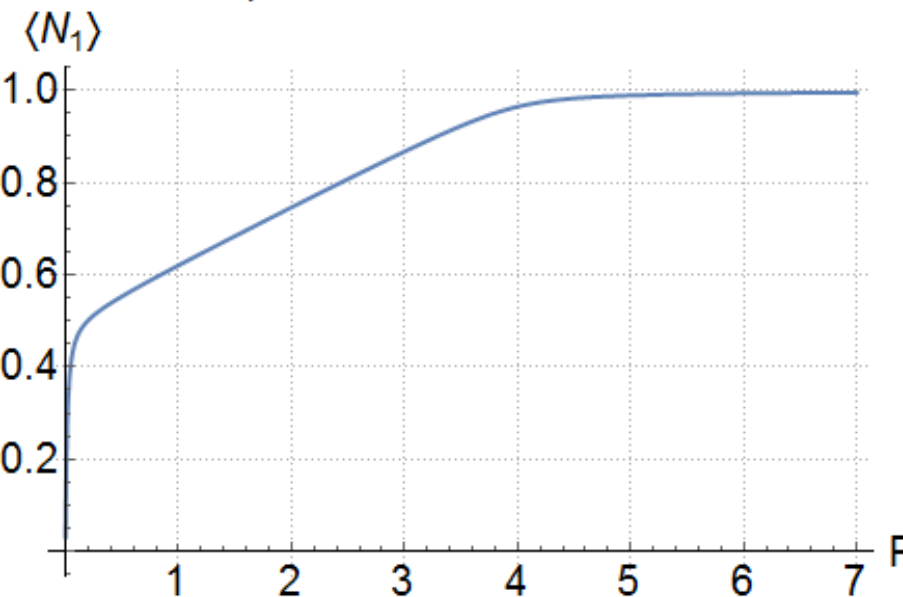
În starea staționară:

$$\begin{cases} R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle - R \langle n \rangle (N - \langle N_1 \rangle) - \kappa \langle n \rangle = 0 \\ -R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + R \langle n \rangle (N - \langle N_1 \rangle) - \gamma \langle N_1 \rangle + P(N - \langle N_1 \rangle) = 0 \end{cases}$$

Numărul mediu de fotoni



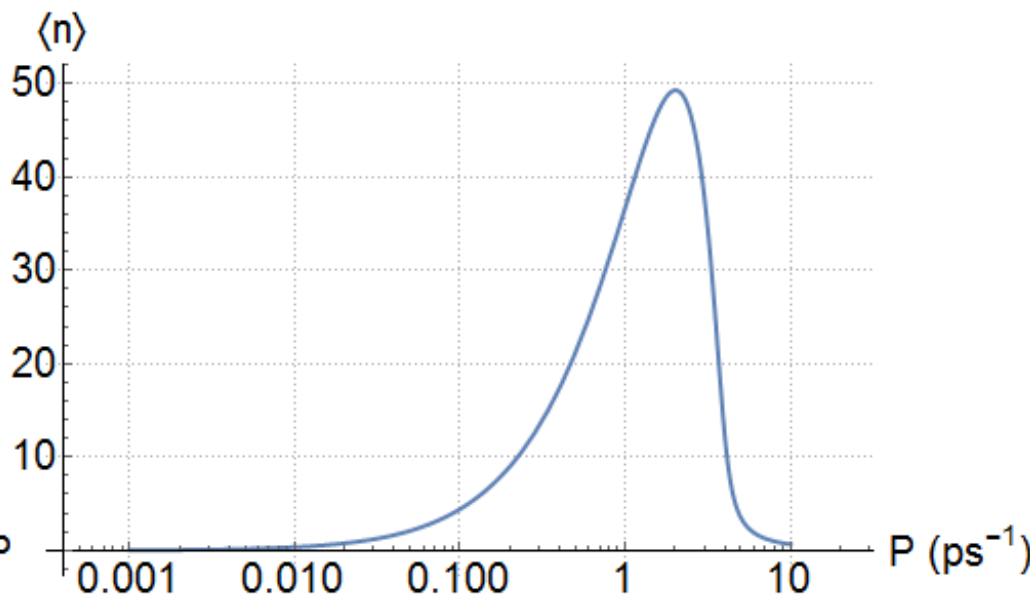
Populatia medie a nivelului excitat



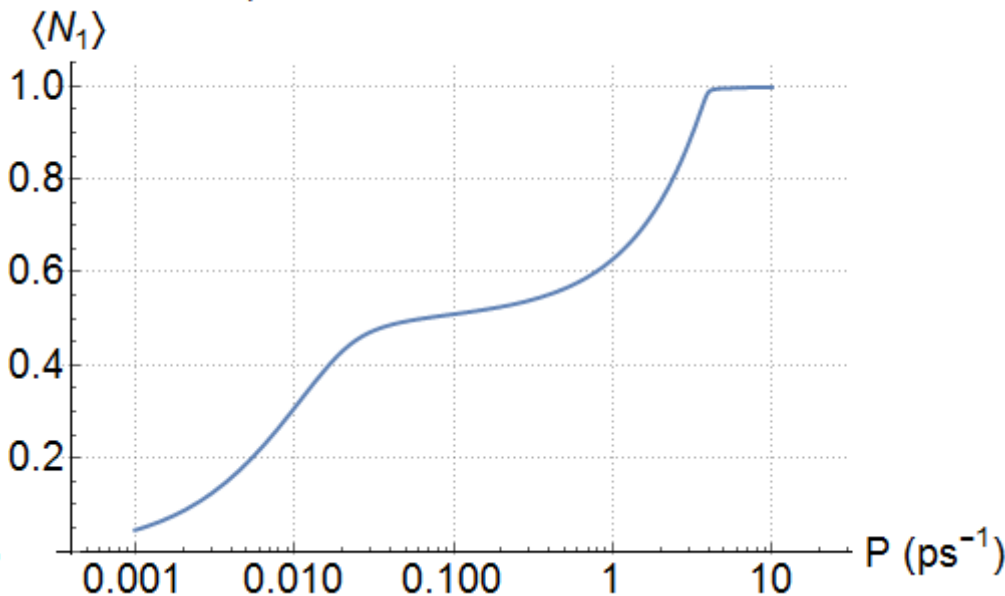
$$N = 1$$

$$\kappa = 0.01 \text{ ps}^{-1}$$

Numărul mediu de fotoni



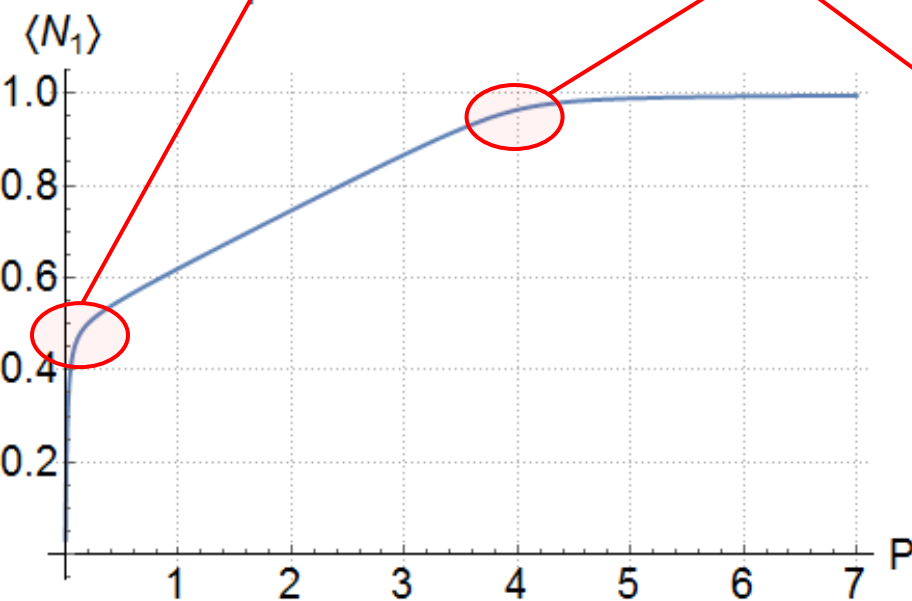
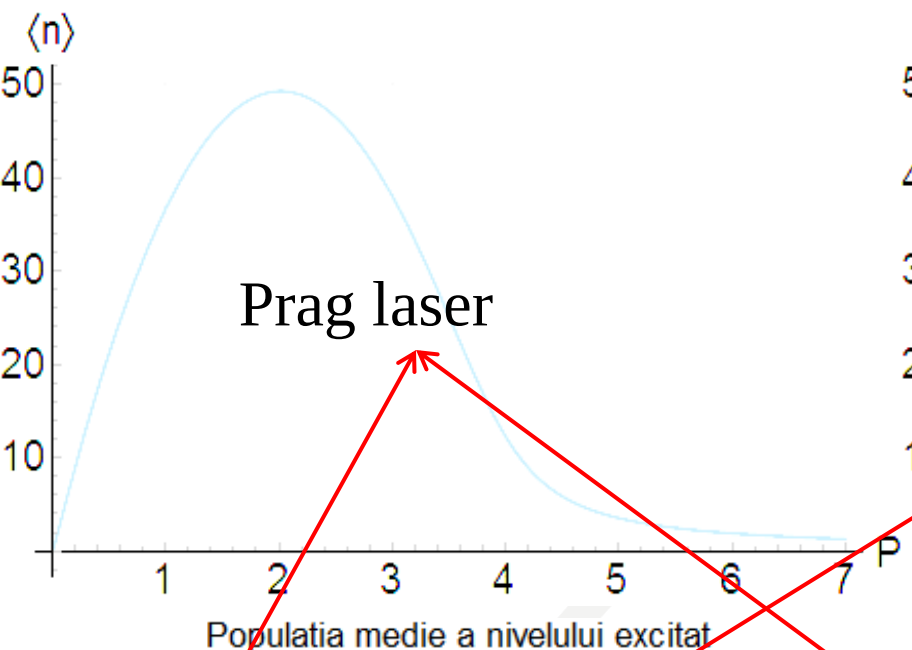
Populatia medie a nivelului excitat



$$g = 0.1 \text{ ps}^{-1}$$

$$\gamma = 0.02 \text{ ps}^{-1}$$

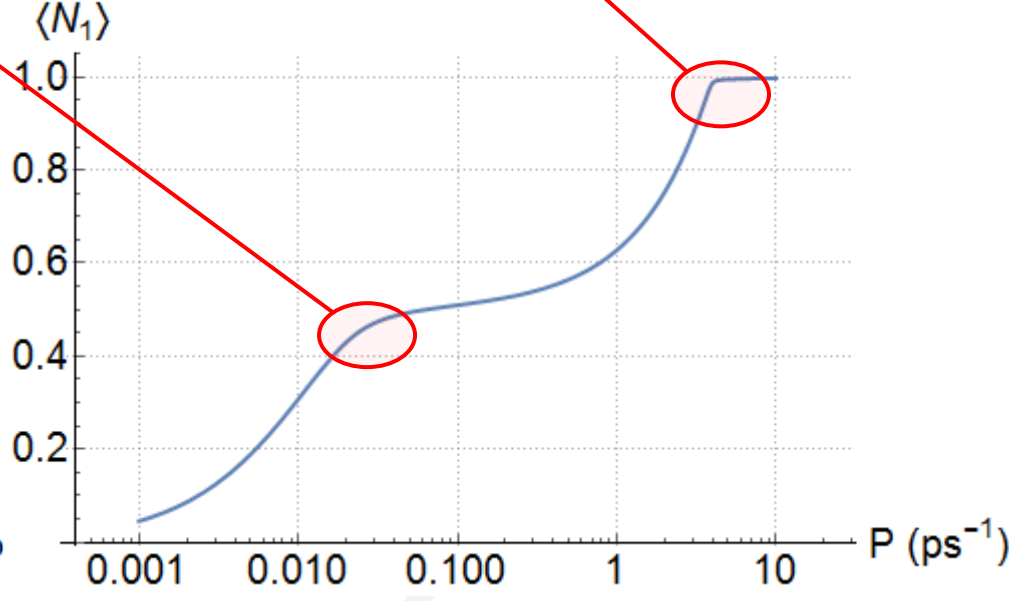
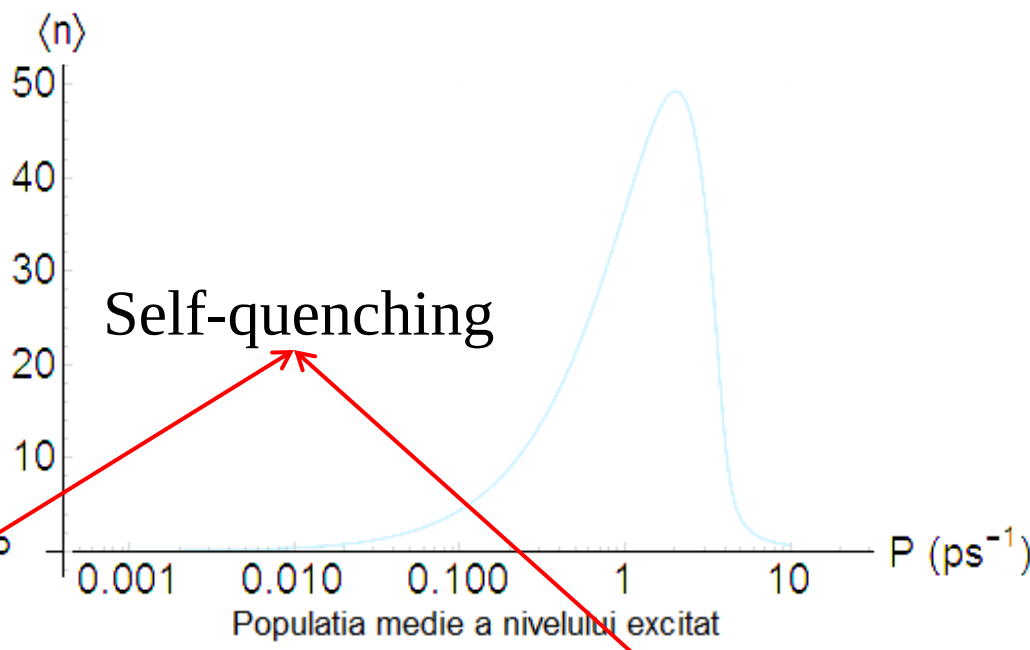
Numărul mediu de fotoni



$$N = 1$$

$$\kappa = 0.01 \text{ ps}^{-1}$$

Numărul mediu de fotoni



$$g = 0.1 \text{ ps}^{-1}$$

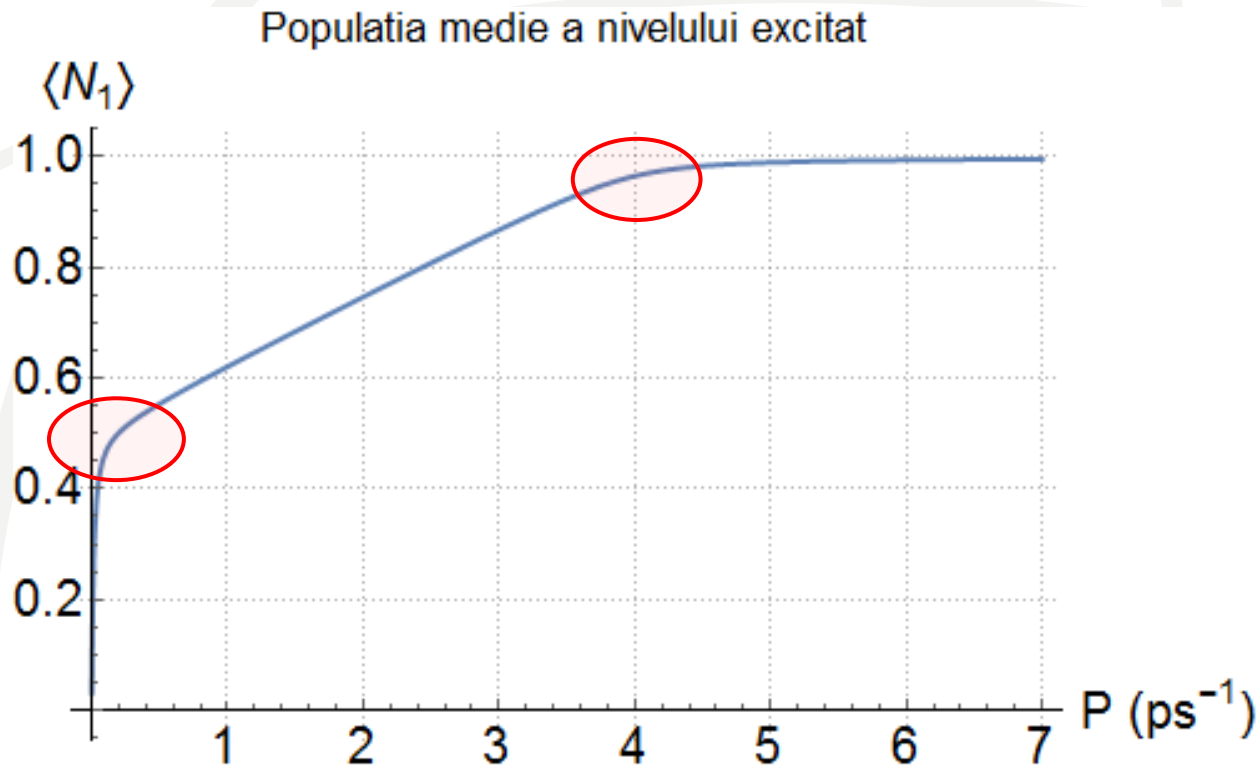
$$\gamma = 0.02 \text{ ps}^{-1}$$

Tranziți de Fază în Limita Termodinamică

Tranzițiile de fază sunt marcate de **schimbări abrupte** în una sau mai multe mărimi ce caracterizează sistemul, la o **variație mică** a unui parametru de control.

Tranziții de Fază în Limita Termodinamică

Tranzițiile de fază sunt marcate de **schimbări abrupte** în una sau mai multe mărimi ce caracterizează sistemul, la o **variație mică** a unui parametru de control.



Limita termodinamică:

$$V \rightarrow \infty$$

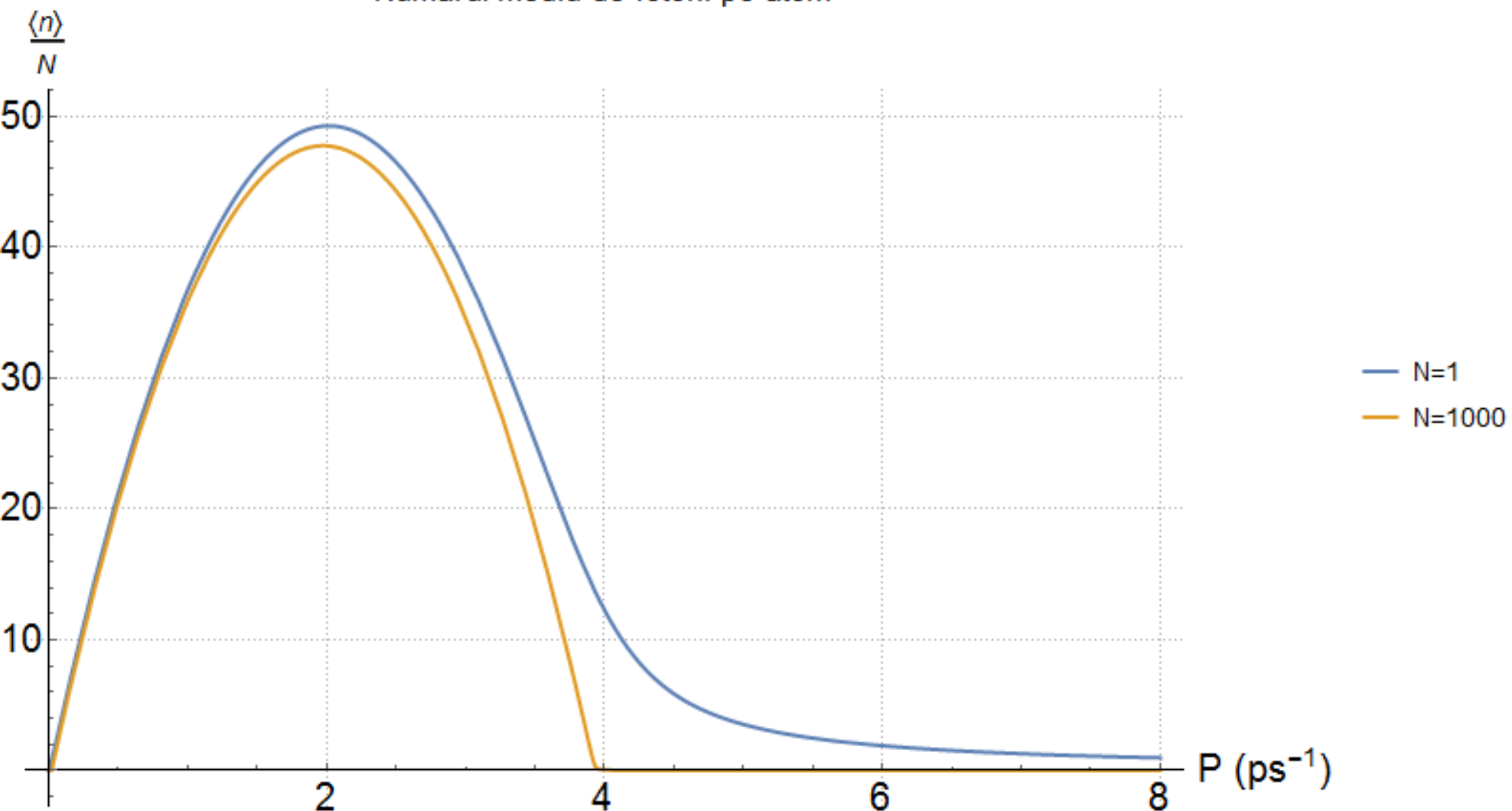
$$N \rightarrow \infty$$

$$V/N = \textit{const.}$$

Constanta de cuplaj este proporțională cu $V^{-1/2}$ [13]:

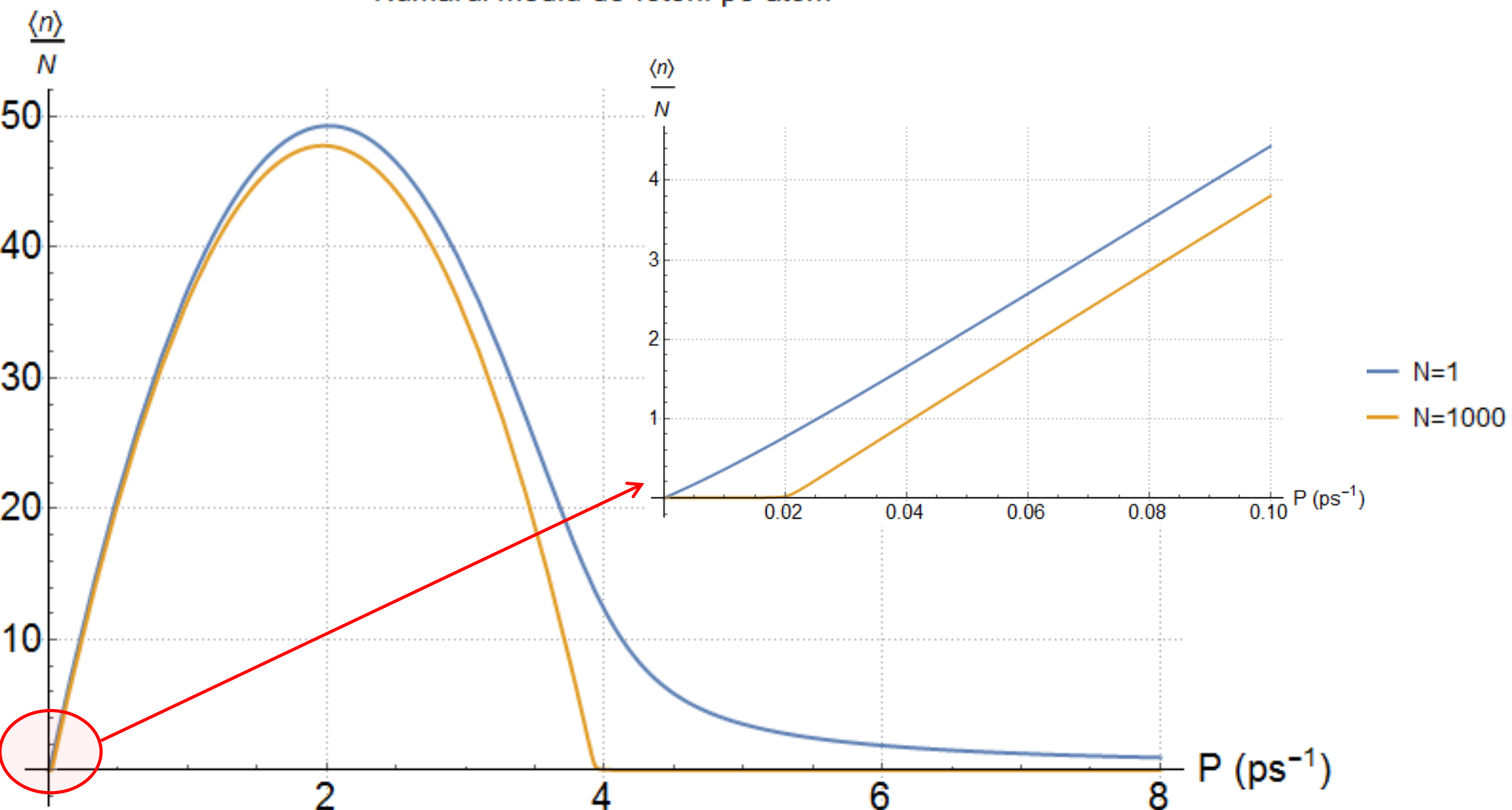
$$g^2 \sim \frac{1}{V} \sim \frac{1}{N}$$

Numărul mediu de fotoni pe atom



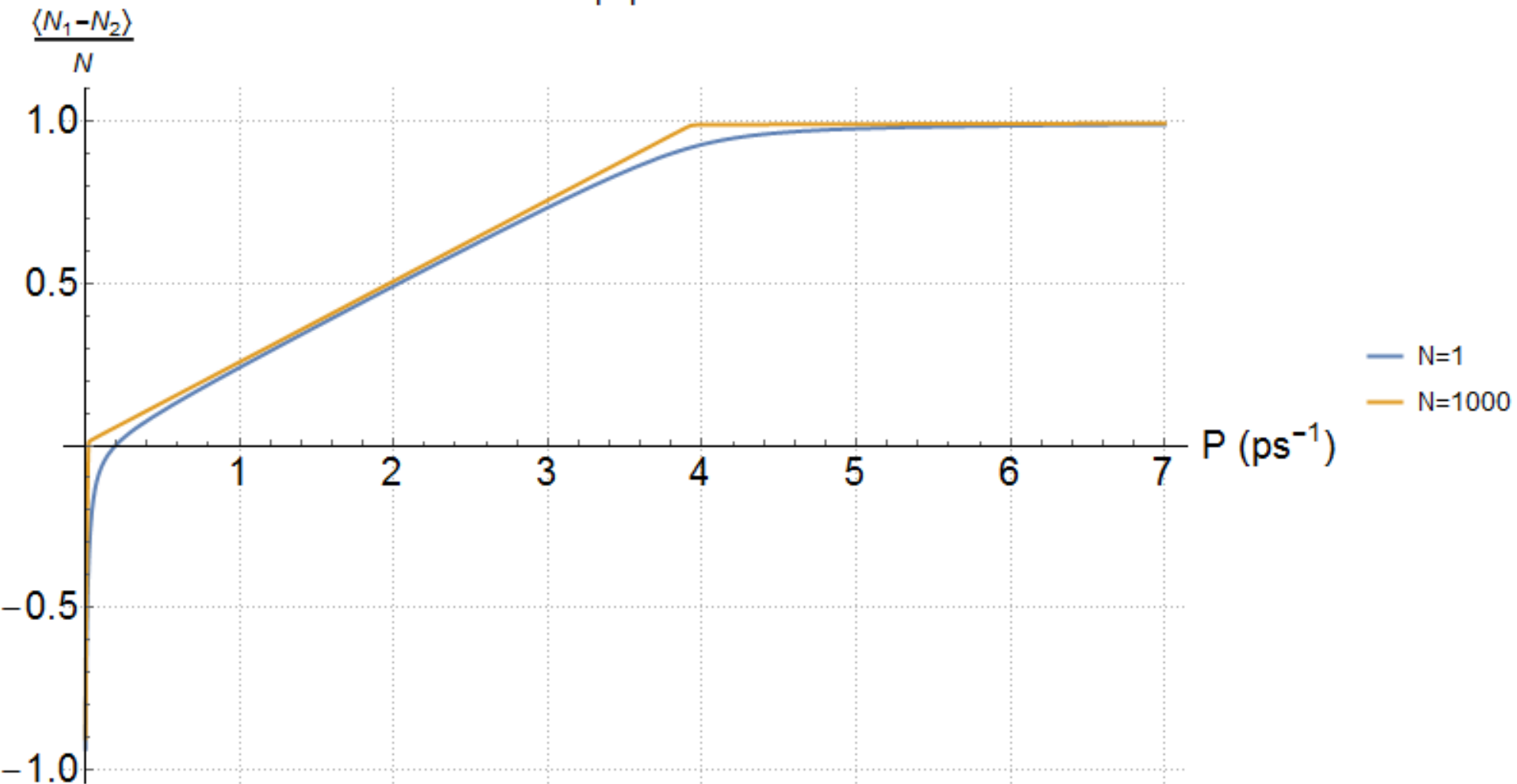
$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Numărul mediu de fotoni pe atom



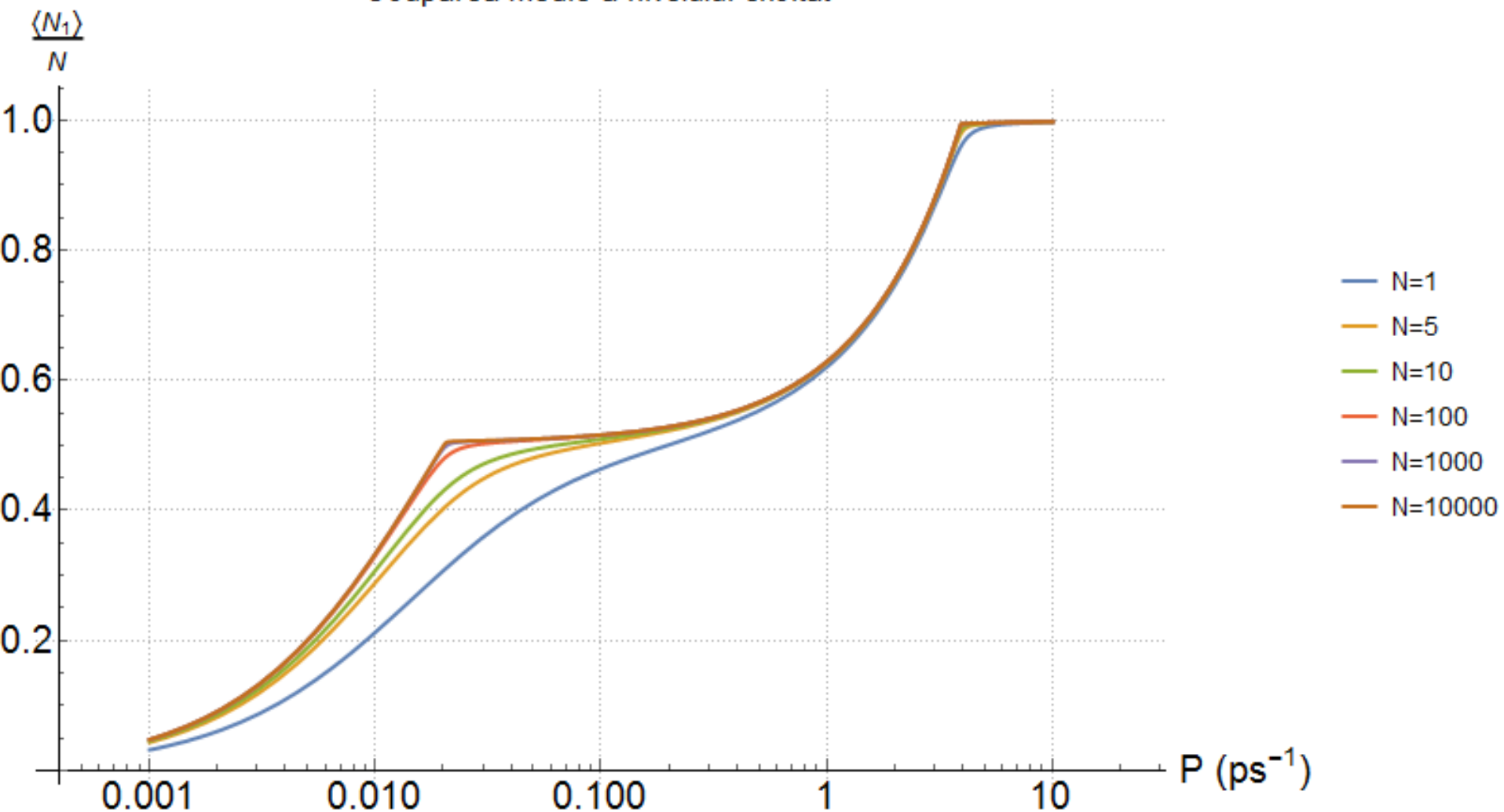
$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Inversia de populatie medie



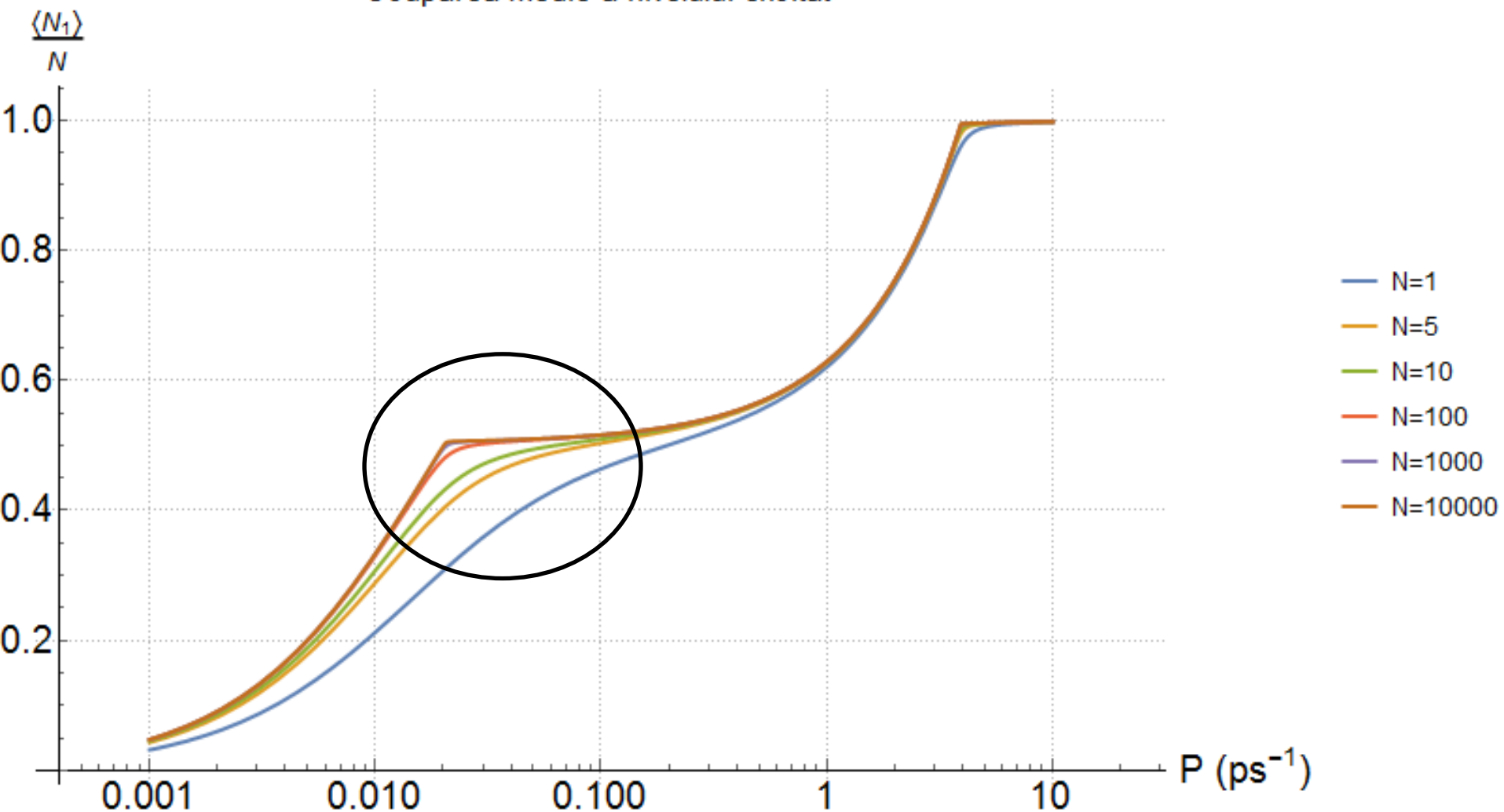
$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Ocuparea medie a nivelului excitat



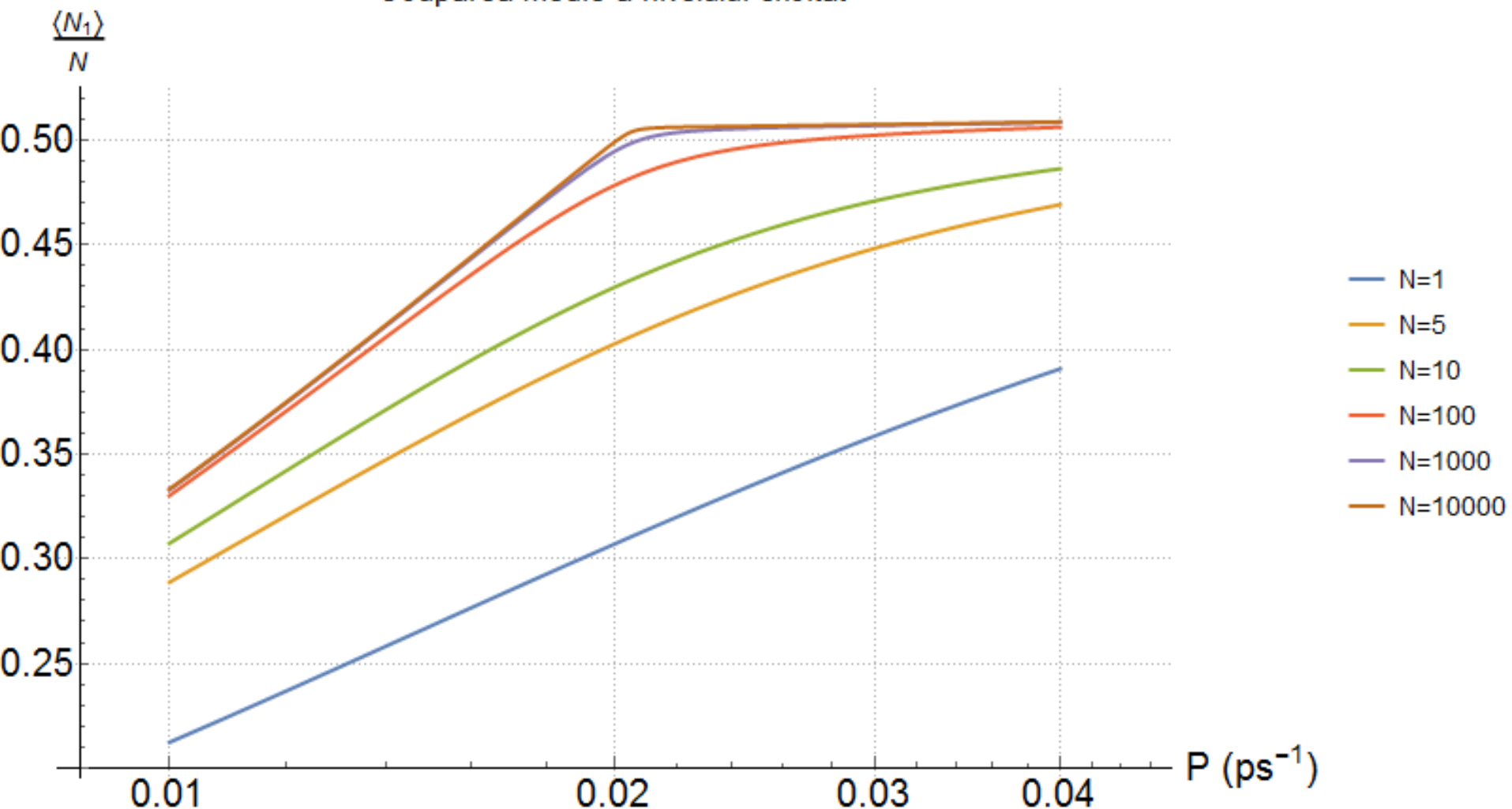
$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Ocuparea medie a nivelului excitat



$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Ocuparea medie a nivelului excitat



$$N \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad g^2 N = \text{const}$$

Analiza ecuației Master

În limita termodinamică ecuația Master devine:

$$N^2 p(N\eta, Nx) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho(\eta, x)$$

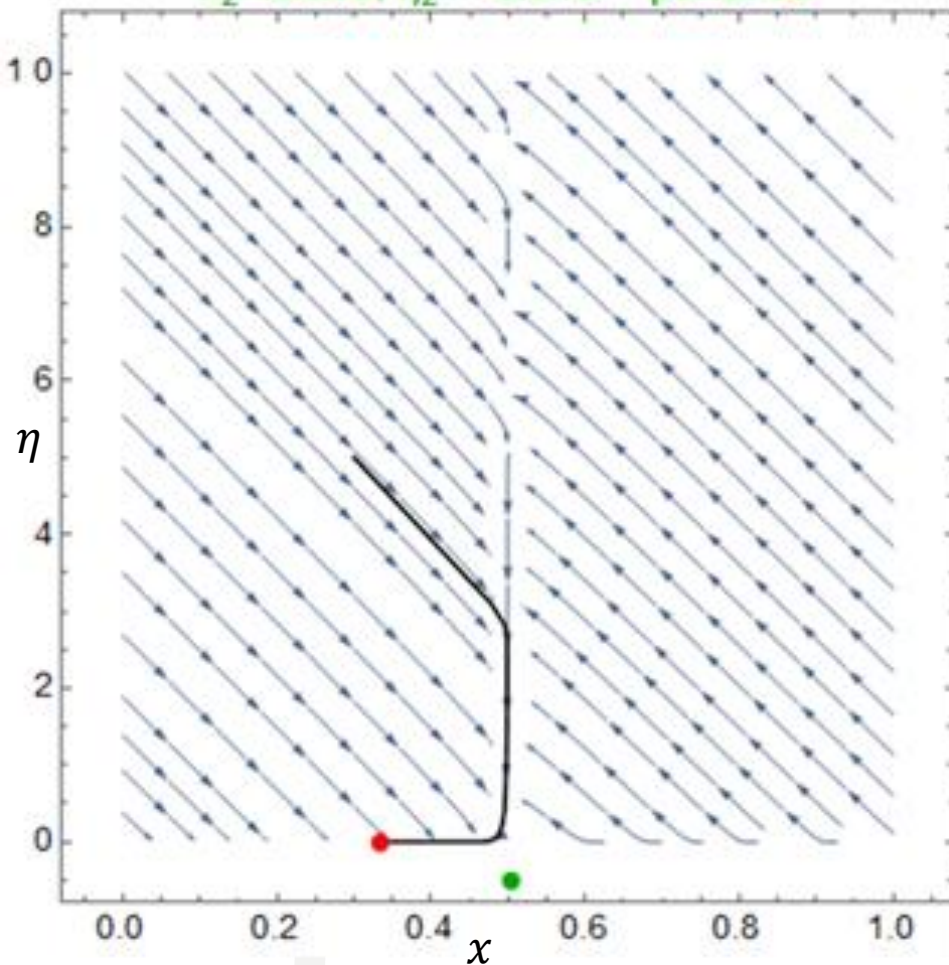
$$\eta = \frac{n}{N} \in [0, \infty)$$

$$x = \frac{N_1}{N} \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & \kappa \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta \rho] - P \frac{\partial}{\partial x} [(1-x)\rho] + \gamma \frac{\partial}{\partial x} [x\rho] + \tilde{R} \frac{\partial}{\partial x} [\eta x \rho] \\ & - \tilde{R} \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta x \rho] - \tilde{R} \frac{\partial}{\partial x} [\eta(1-x)\rho] \\ & + \tilde{R} \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta(1-x)\rho] \end{aligned}$$

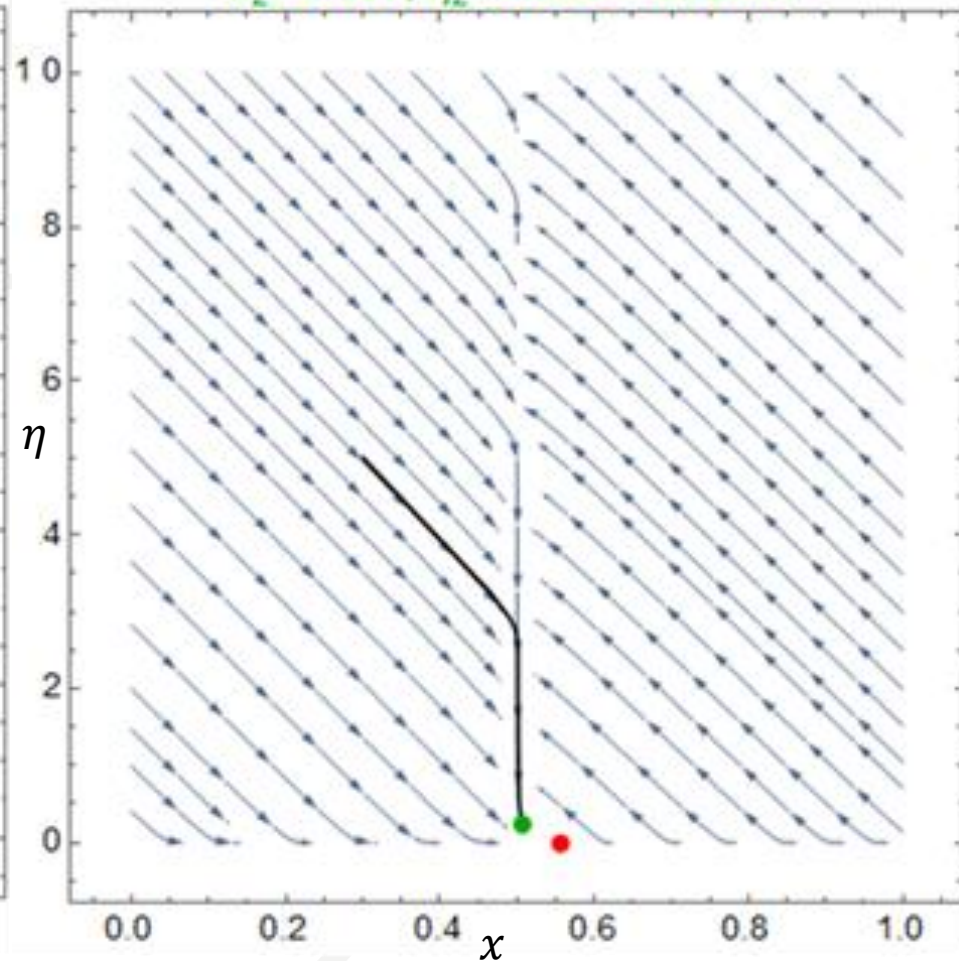
Analiza ecuației Master

$x_1=0.333, \eta_1=0$ – atractor
 $x_2=0.505, \eta_2=-0.515$ – punct sa



$\log(P) = -2$

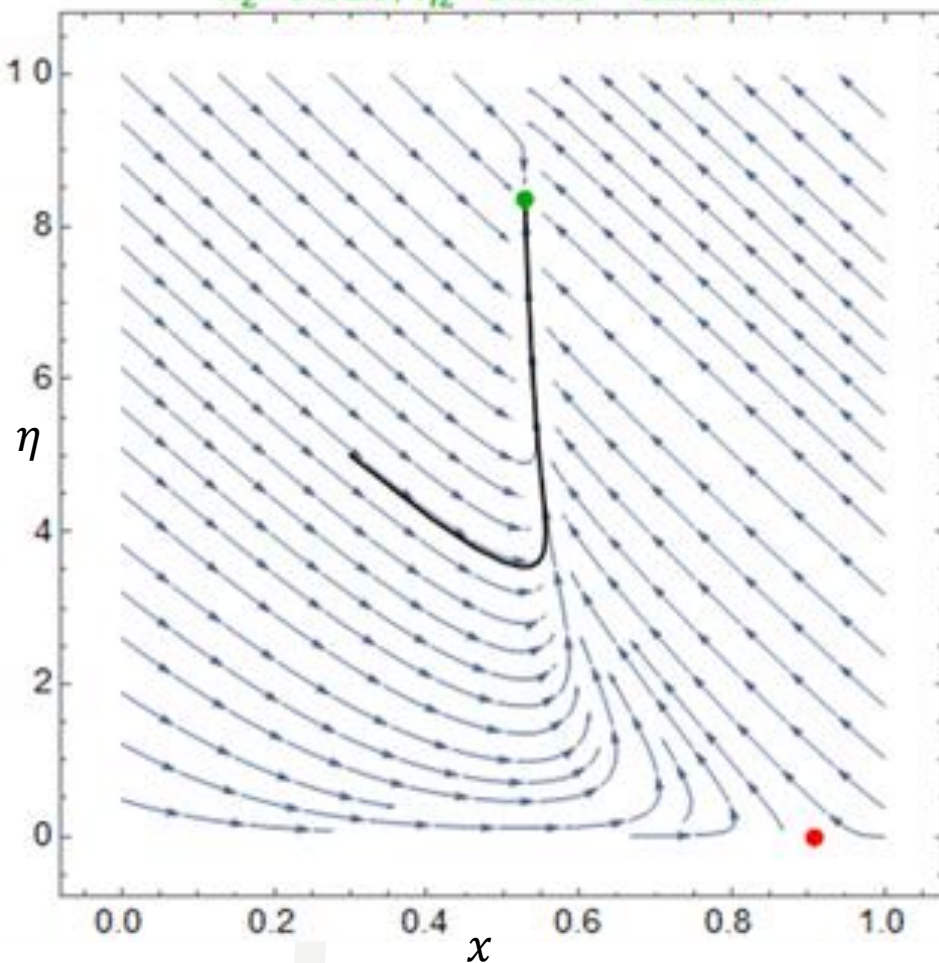
$x_1=0.557, \eta_1=0$ – punct sa
 $x_2=0.507, \eta_2=0.225$ – atractor



$\log(P) = -1.6$

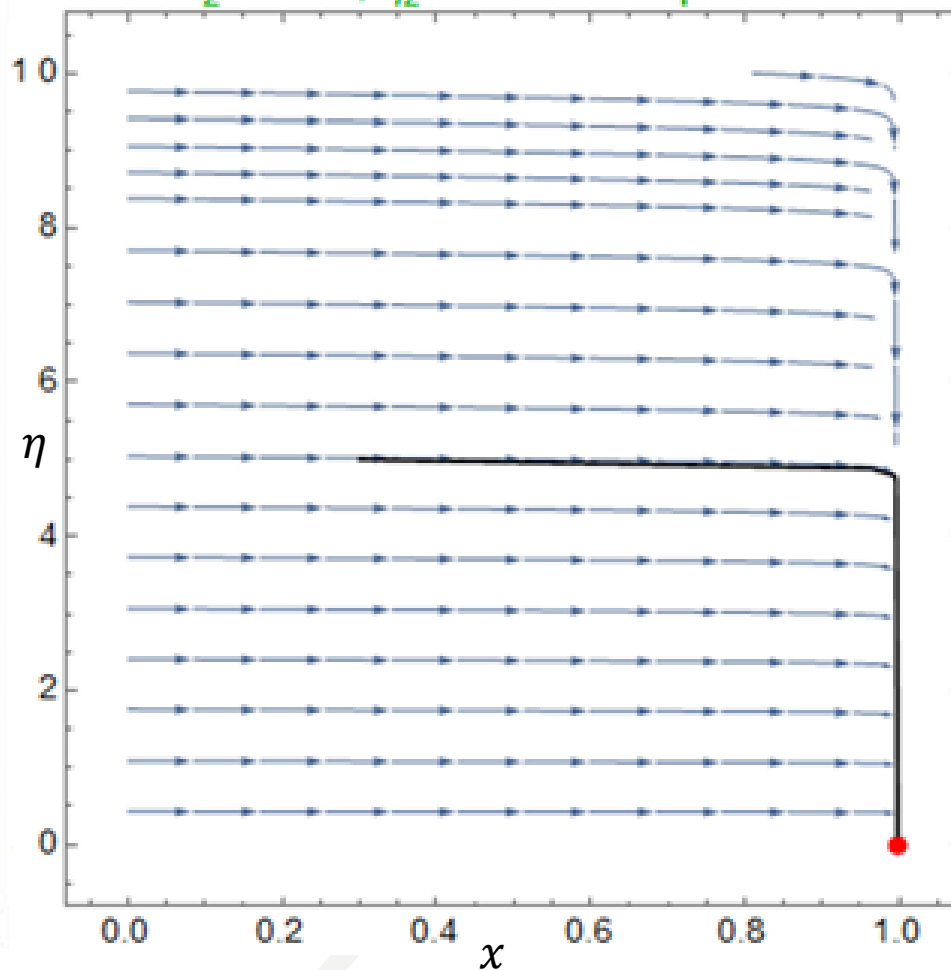
Analiza ecuației Master

$x_1=0.909, \eta_1=0$ – punct sa
 $x_2=0.529, \eta_2=8.346$ – atractor



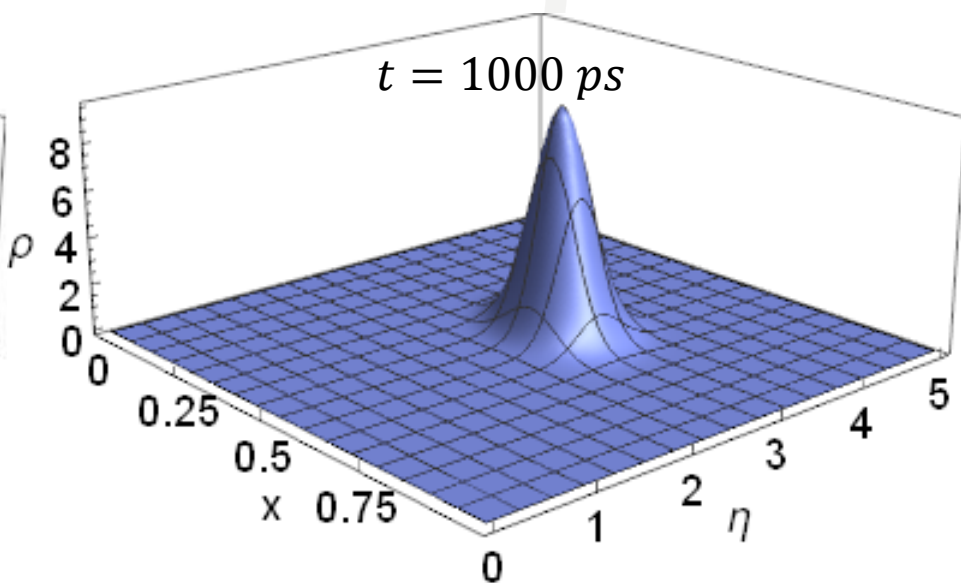
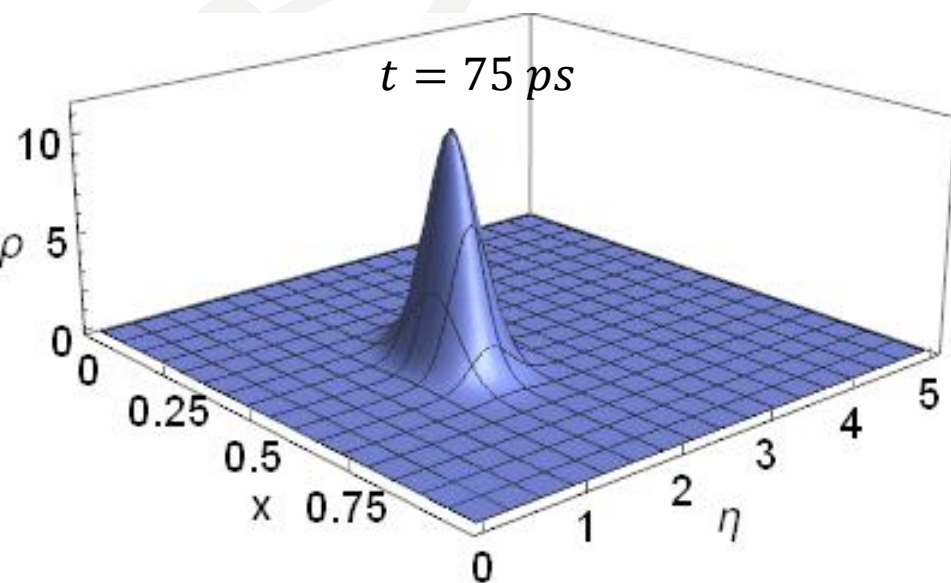
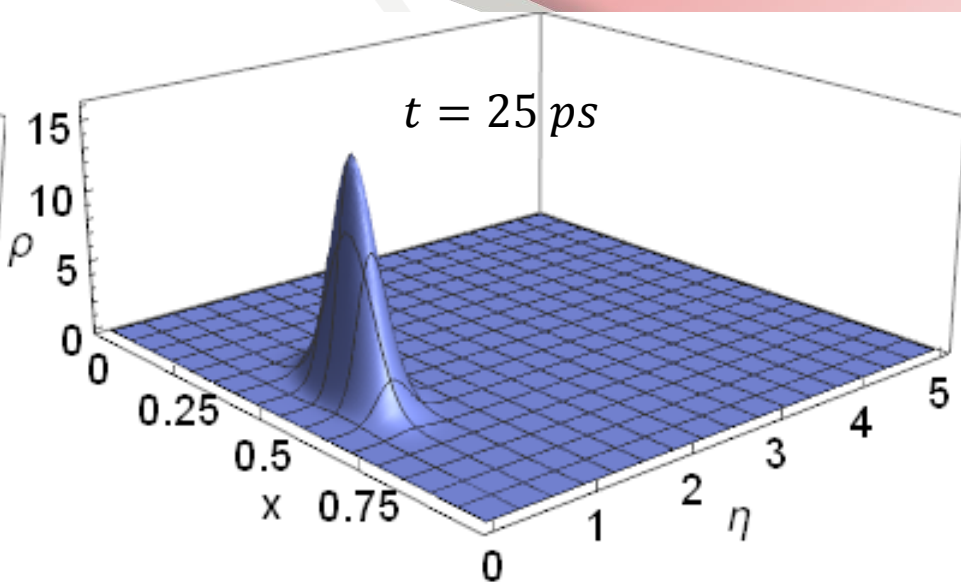
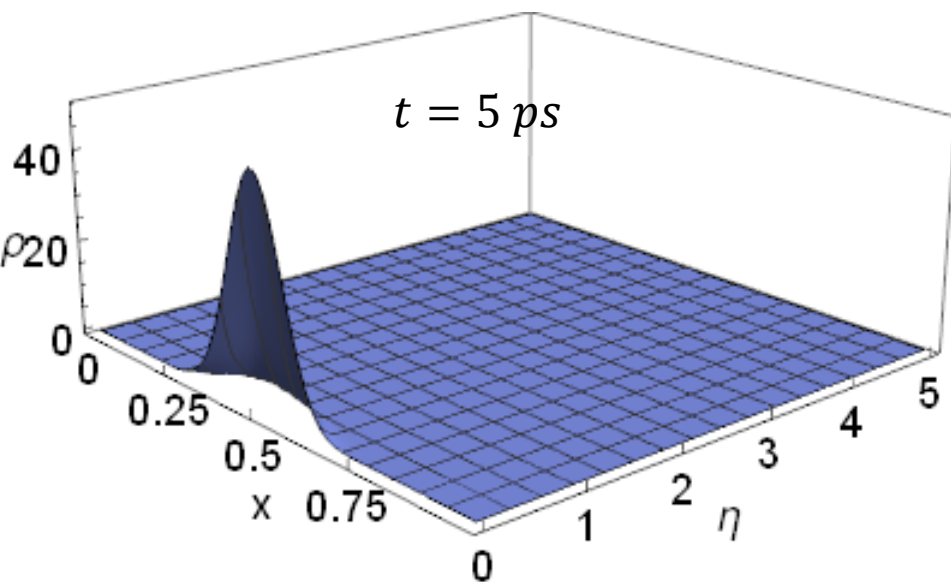
$\log(P) = -0.7$

$x_1=0.998, \eta_1=0$ – atractor
 $x_2=1.754, \eta_2=-757.257$ – punct sa

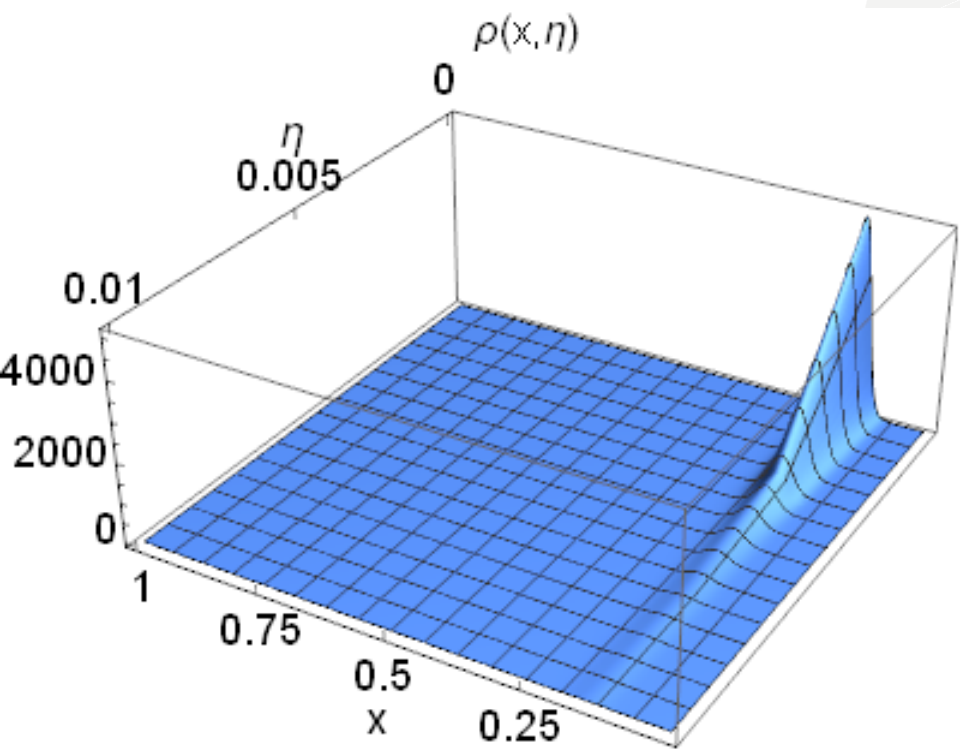


$\log(P) = 1$

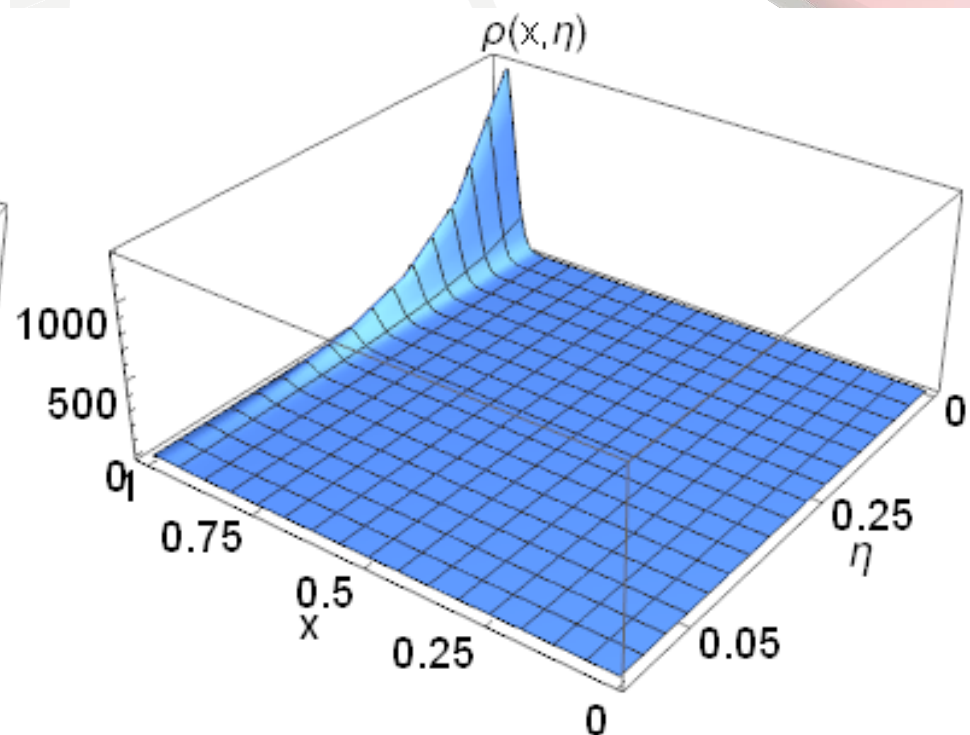
Rezolvarea numerică a EDP – stare laser



Rezolvarea numerică a EDP – stare normală



-înainte de pragul laser;



-după self-quenching;

Concluzii

- Schimbare abruptă în comportamentul **atât a numărului de fotoni** din cavitate **cât și a inversiei de populație** – prag laser;
- În **limita termodinamică** $V \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, $V/N = \text{const.}$, intervalul de tranziție dintre stări tinde la un **punct** – în analogie cu tranzițiile de fază de echilibru;

- Criteriu pentru a distinge **starea laser**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n \rangle}{N} > 0 - \textit{stare laser}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n \rangle}{N} = 0 - \textit{stare normală}$$

- Aceleași concluzii sunt obținute și cu **ecuația Master**;

Bibliografie

- [1] V. DeGiorgio, M. O. Scully, *Analogy between the Laser Threshold Region and a Second-Order Phase Transition*, Phys. Rev. A **2**, 1170 (1970);
- [2] P. R. Rice, H. J. Carmichael, *Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser – phase-transition analogy*, Phys. Rev. A **50**, 4318 (1994);
- [3] G. Björk, A. Karlsson, Y. Yamamoto, *Definition of a laser threshold*, Phys. Rev. A **50(2)**, 1675 (1994);
- [4] C. Z. Ning, *What is Laser Threshold?*, Quantum Electronics, IEEE **19**, 1503604 (2013);
- [5] Paul Gartner, *The two-level atom laser: analytical results and the laser transition.*, Phys. Rev. A **84**, 053804 (2011);
- [6] W. W. Chow, F. Jahnke, C. Gies, *Emission properties of nanolasers during the transition to lasing*, Light: Science & Applications **3**, e201 (2014);
- [7] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, Springer (1999);
- [8] B. H. Bransden, C. J. Joachain, *Introducere în Mecanica Cuantică*, Ed. Tehnică (1995);
- [9] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Appendix A, ec. (A.19), (1998);
- [10] J. N. Franklin, *Matrix Theory*, Dover Publications, Inc (2000);
- [11] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (2001);
- [12] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2010);
- [13] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light, Third Edition*, Oxford University Press (2001);
- [14] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51** (1): 89–109 (1963);
- [15] F.W. Cummings, *"Stimulated emission of radiation in a single mode"*, Phys. Rev. **140** (4A): A1051–A1056 (1965);
- [16] Yi Mu, C. M. Savage, *One-atom lasers*, Phys. Rev. A **46**, 5944 (1992);
- [17] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, AMS Chelsea Publishing (1977);
- [18] M. J. Stevens, B. Baek, E. A. Dauler, A. J. Kerman, R. J. Molnar, S. A. Hamilton, K. K. Berggren, R.P. Mirin, S. W. Nam, *High-order temporal coherences of chaotic and laser light*, Opt. Express **18**, 1430-1437 (2010);
- [19] K. Huang, *Statistical Mechanics, 2nd Ed.*, John Wiley & Sons (1987);
- [20] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (2008);
- [21] T. Köhler, *Bose-Einstein condensation of an ideal gas*, Cold gases Talk (2009);
- [22] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume II*, Wiley-Interscience (1962);
- [23] R. F. Martin, *Nonlinear Dynamics for Undergraduates*, Physics Department, Illinois State University, (2013);
- [24] F. Jahnke, *Quantum optics with semiconductor nanostructures*, Woodhead Publishing Limited (2012);
- [25] P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer (2007);
- [26] S. M. Barnett, P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum optics*, Clarendon Press (1997);
- [27] M. Orszag, *Quantum Optics 2nd ed.*, Springer, Berlin Heidelberg (2008);
- [28] H. P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2003);

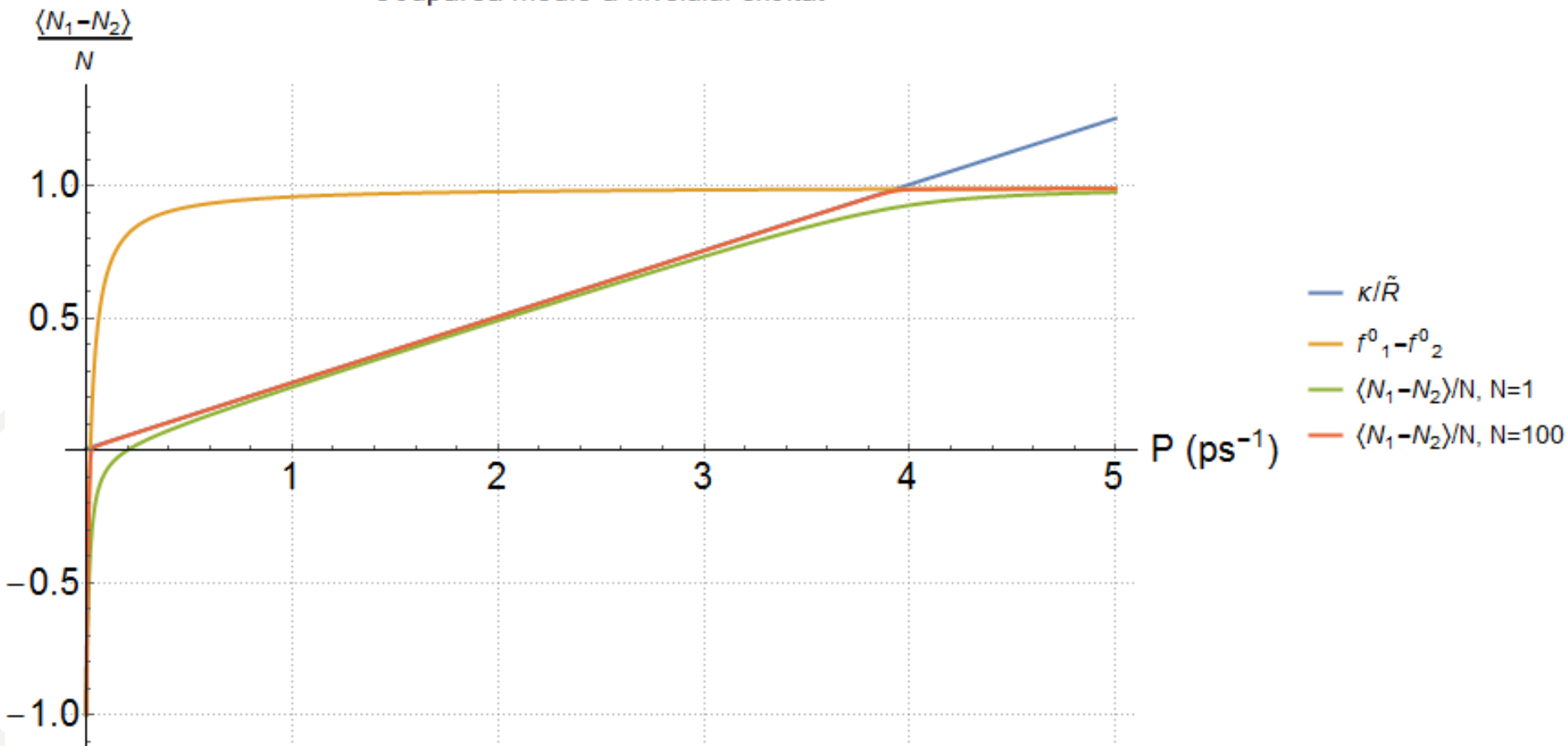
Anexă – Determinarea valorii pragului laser

$$Rn\left((f_1 - f_2) - \frac{\kappa}{\tilde{R}}\right) \cong 0$$

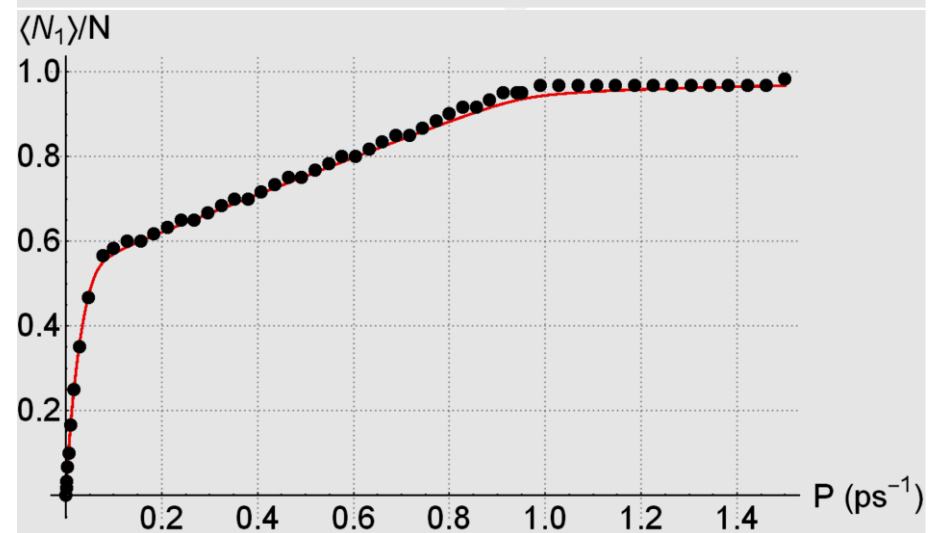
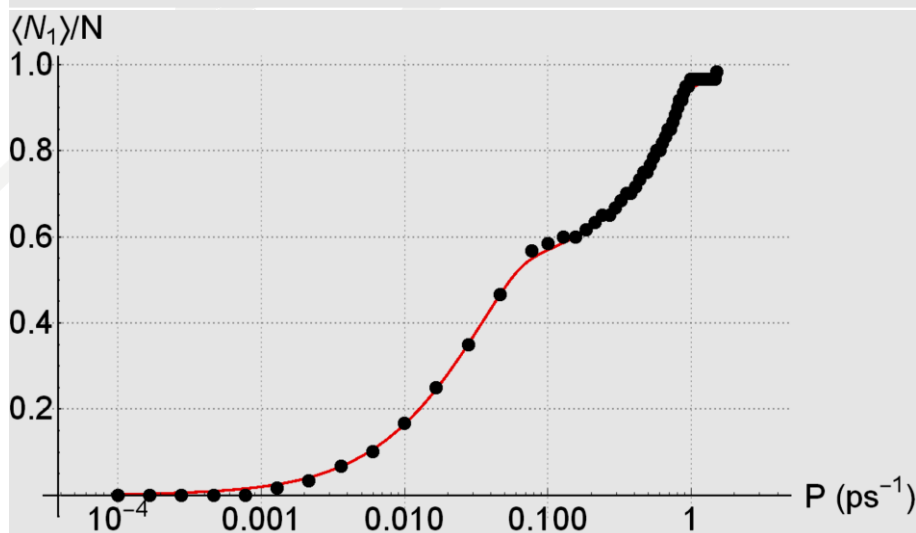
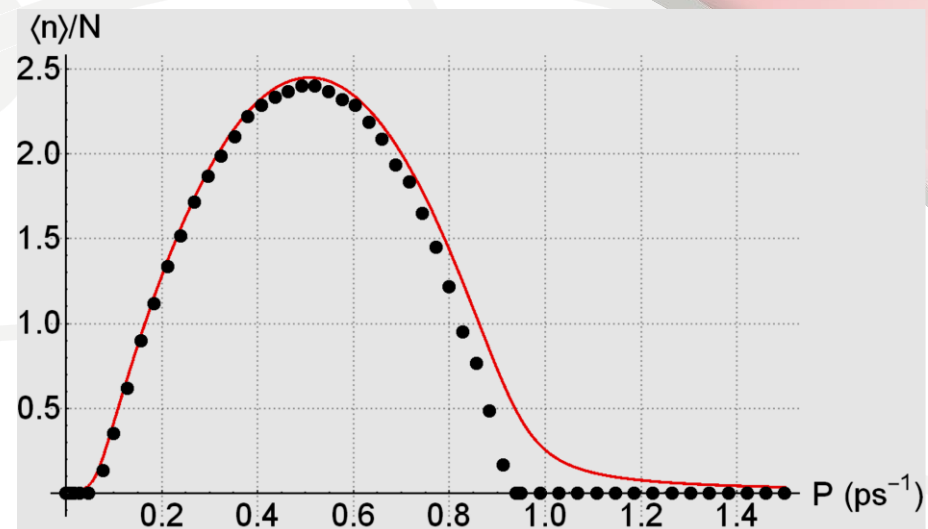
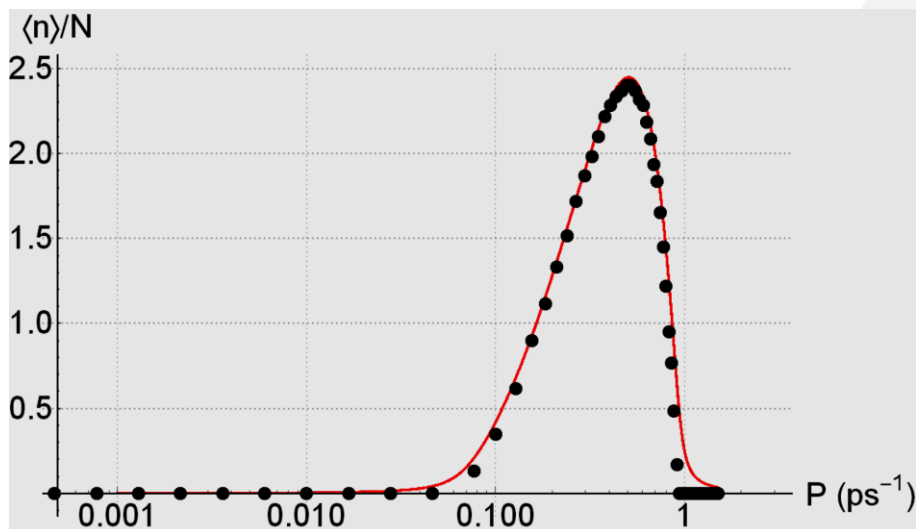
Din ecuațiile de rate avem:

$$f_1 - f_2 \leq \text{Min}\left(f_1^0 - f_2^0, \frac{\kappa}{\tilde{R}}\right)$$

Ocuparea medie a nivelului excitat

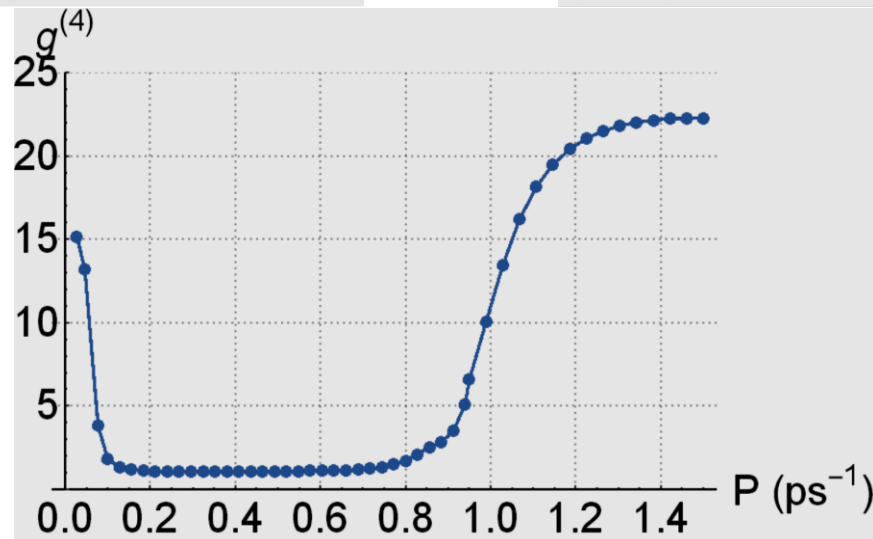
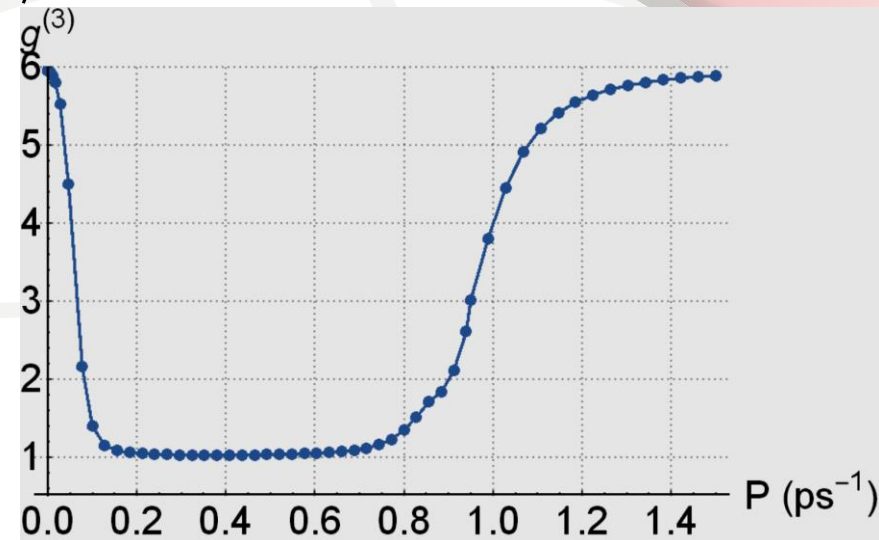
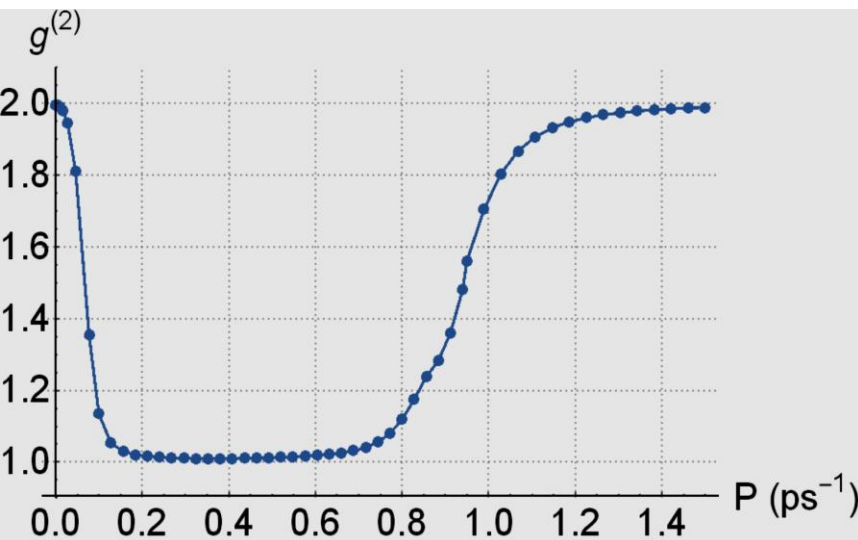


Anexă – Comparație între ecuația Master și ecuațiile de rată



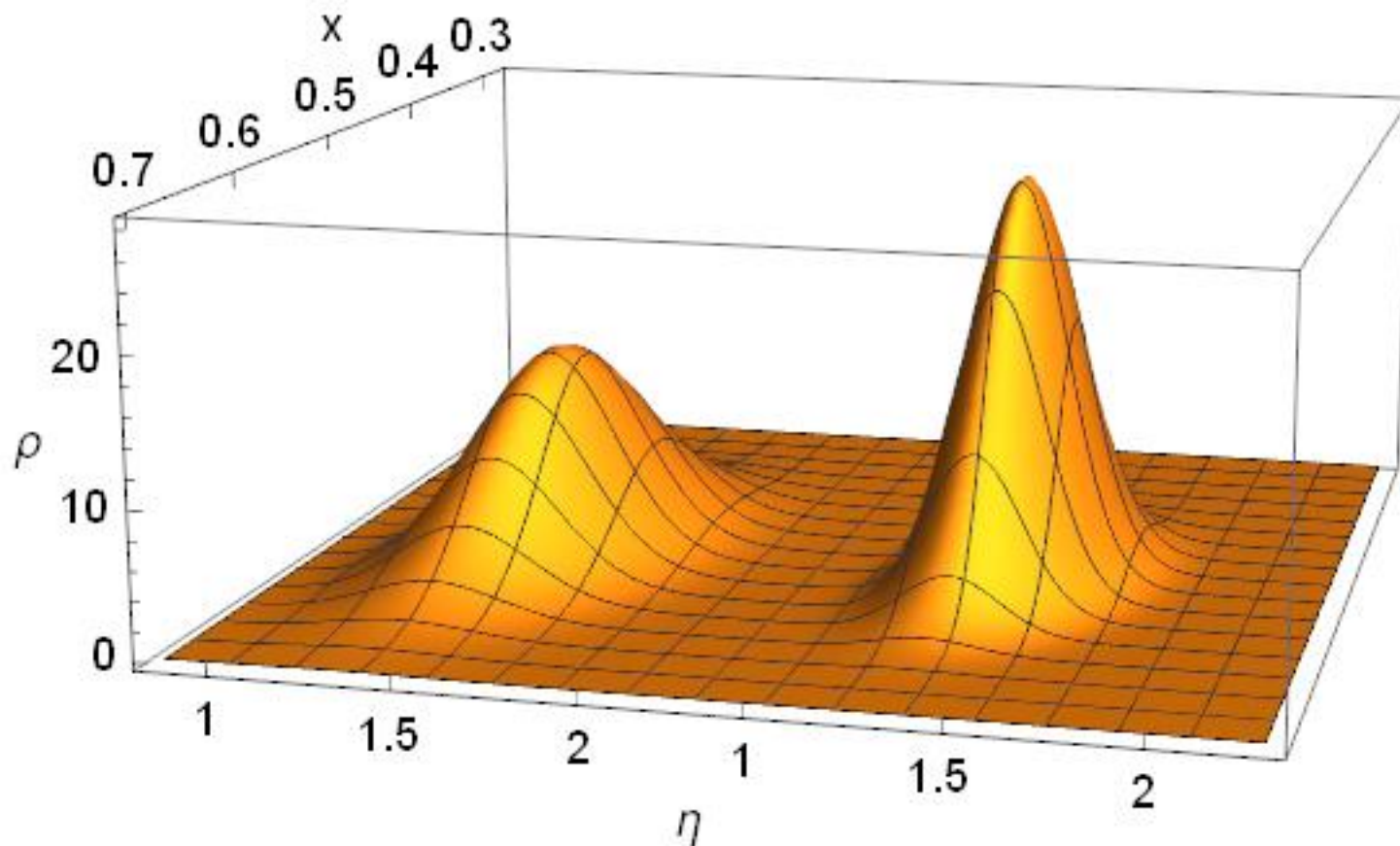
Anexă – Ecuația Master – funcții de corelație

$$g^{(i)} = \frac{\langle (a^\dagger)^i (a)^i \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^i}$$



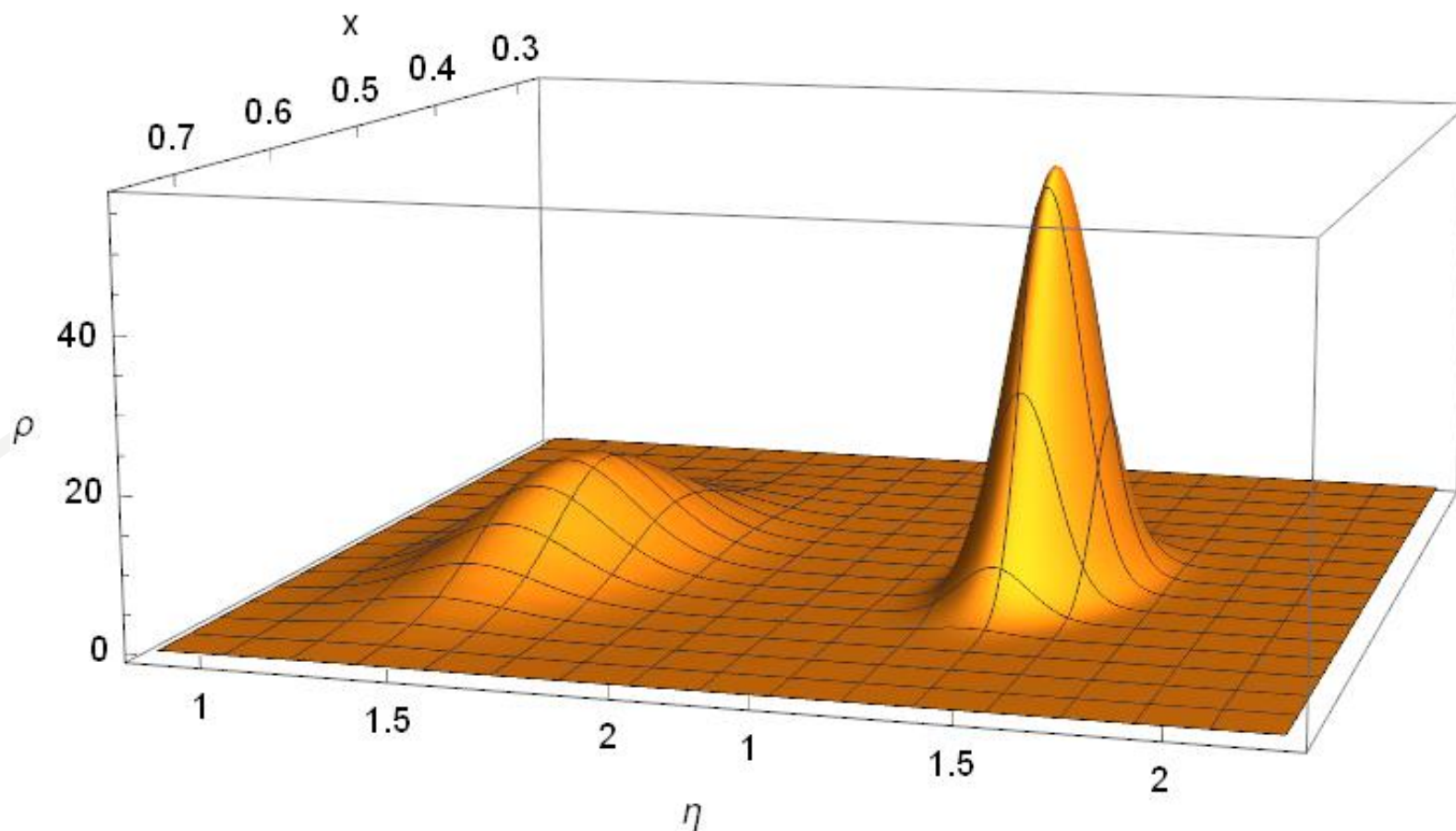
Anexă – Efectul rețelei la integrarea numerică

$$N' = 30, n' = 100 \rightarrow N'_1 = 60, n'_1 = 200$$



Anexă – Efectul rețelei la integrarea numerică

$$N' = 30, n' = 100 \rightarrow N'_2 = 120, n'_2 = 400$$



Anexă – Efectul rețelei la integrarea numerică

$$N' = 30, n' = 100 \rightarrow N'_3 = 240, n'_3 = 800$$

