Curs 4 - Unde

Octavian Dănilă

6 aprilie 2016

Cuprins

1 Clasificarea undelor **1**

2 Principiul Huygens-Fresnel **1**

3 Ecuația unidimensională a undelor **2**

4 Soluția generală a undelor **3**

5 Soluția particulară a undelor **3**

6 Unda armonică plană **4**

7 Unda armonică tridimensională **5**

8 Unde sferice **6**

9 Unde staționare **6**

10 Pachetul de unde **7**

1 Clasificarea undelor

Undele reprezintă perturbațiile care se propagă din aproape în aproape pornind de la o perturbație inițială numită *sursă primară de undă*. Undele pot fi materiale sau nemateriale, dacă se propagă în medii materiale sau nemateriale, pot fi scalare sau vectoriale, după cum mărimea care caracterizează direcția de propagare și oscilația este scalară sau vectorială, pot fi transversale sau longitudinale după cum oscilația mărimii ce caracterizează unda este perpendiculară sau paralelă cu direcția de propagare. De asemenea, mediile de propagare pot fi neomogene sau omogene, dacă mărimea ce caracterizează unda într-un este dependentă de coordonatele punctului sau nu, pot fi anizotrope sau izotrope, dacă mărimea ce caracterizează unda este dependentă de direcția de propagare.

2 Principiul Huygens-Fresnel

Se definește *suprafața de undă* ca locul geometric al punctelor care oscilează în fază. De asemenea, se definește *frontul de undă* ca locul geometric al punctelor cele mai îndepărtate de sursă care oscilează în fază.

Principiul Huygens-Fresnel reprezintă observația modului de propagare contiguu al undei (Huygens) și modelarea geometrică a acestei contiguități (Fresnel).

Formularea Huygens: Propagarea undelor se face din aproape în aproape, prin compunerea unei oscilații armonice liniare și o mișcare rectilinie uniformă. În acest sens, fiecare tip de undă prezintă viteza caracteristică v (pentru sunet $v_s = 375$ m/s, pentru câmpul electromagnetic $c = 3 \times 10^8$ m/s).

Formularea Fresnel: În decursul propagării unei unde, fiecare punct de pe frontul de undă la un anumit moment t poate fi considerat *sursă secundară de undă*, dând naștere următorului front de undă prin trasarea înfășurătorii ce unește punctele care oscilează la momentul $t + T$ (T este perioada de oscilație) și care păstrează forma suprafeței de undă generatoare.

3 Ecuația unidimensională a undelor

Pentru determinarea ecuației unidimensionale a undelor se construiește modelul corzii vibrante: O coardă elastică de lungime L și distribuție uniformă a masei totale pe toată lungimea sa. Deoarece coarda este perfect elastică, tensiunea este tangentă la aceasta. Pentru un element de coardă dl și masă dm, orice deplasare verticală $y(x,t)$ față de poziția de echilibru este dată de acțiunea forțelor de tensiune de la capetele elementului de coardă. Se proiectează mișcarea pe axele ox și oy, și se ține cont de aproximația unghiurilor mici α și β ($\cos\alpha = \cos\beta = 1$ și $\sin\alpha = \alpha$, $\sin\beta = \beta$. Pe ox, avem:

$$dT_x = T\cos\beta - T\cos\alpha = 0 \tag{1}$$

în timp ce pe oy avem:

$$dT_y = T\sin\beta - T\sin\alpha = T(\beta - \alpha) \tag{2}$$

De asemenea, variația deplasării în raport cu x, la un capăt al corzii este:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \text{tg}\ \alpha \simeq \alpha \tag{3}$$

în timp ce la celălalt capăt, este:

$$\frac{\partial y(x+dx,t)}{\partial t} = \text{tg}\ \beta \simeq \beta \tag{4}$$

De aici, variația tensiunii pe oy este:

$$dT_y = T\left[\frac{\partial y(x+dx,t)}{dx} - \frac{\partial y(x,t)}{dx}\right] = F\frac{\partial\left[y(x+dx,t) - y(x,t)\right]}{\partial x} \tag{5}$$

Se observă că:

$$dT_y = T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]dx = F\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{6}$$

Deoarece $dT_y = dma_y = dm\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$, unde

$$dm = \rho dV = \rho S dl = \rho S\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \rho S\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \tag{7}$$

Vom face aproximarea $(\partial y/\partial x)^2 \simeq 0$, și rezultă:

$$dm \simeq \rho S dx \tag{8}$$

De aici, ecuația de mișcare a corzii devine:

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{9}$$

de unde, dacă rearanjăm, avem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho S}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{10}$$

Mărimea $\sqrt{F/\left(\rho S\right)}$ are mărimea unei viteze. Ecuația se scrie:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11}$$

Aceasta este *ecuația unidimensională a undelor.*

4 Soluția generală a undelor

Soluția generală a ecuației unidimensionale are forma unei superpoziții de două funcții arbitrare:

$$y\left(x,t\right) = f\left(x - vt\right) + g\left(x + vt\right) \tag{12}$$

Dacă se face schimbarea de variabilă: $\xi = x - vt$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{13}$$

pentru variabila spațială, și

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{14}$$

Dacă derivăm a doua oară, obținem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{15}$$

iar pentru variabila temporală:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = -v\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{16}$$

În mod analog, se arată că și pentru $\zeta = x + vt$ avem aceleași identități. Din punct de vedere fizic, unda caracterizată de ξ se numește *undă progresivă*, în timp ce unda caracterizată de ζ se numește *undă regresivă.*

5 Soluția particulară a undelor

Pentru găsirea soluției particulare, vom aplica metoda separării variabilelor în expresia lui y:

$$y\left(x,t\right) = S\left(x\right)T\left(t\right) \tag{17}$$

Introducem această formă în ecuația diferențială, și obținem:

$$T\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{1}{v^2}S\frac{d^2 T}{dt^2} \tag{18}$$

sau:

$$\frac{v^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \tag{19}$$

Deoarece membrul din stânga este dependent de x, iar cel din dreapta este dependent de t, singurul caz posibil pentru care avem egalitate este cel în care cele două părți sunt egale cu aceeași constantă, pe care o putem alege convenabil ω^2. Pentru membrul dependent de poziție avem:

$$\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}S = 0 \tag{20}$$

Raportul $k = \omega/v$ este numărul de undă, iar soluția este:

$$S(x) = S_{01}\exp(ikx) + S_{02}\exp(-ikx) \tag{21}$$

Pentru membrul dependent de timp, avem:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{22}$$

cu soluția:

$$T(t) = T_{01}\exp(i\omega t) + T_{02}\exp(-i\omega t) \tag{23}$$

De aici, soluția este:

$$y = S(x)\,T(t) = Y_0\exp[\pm i(\omega t \pm kx)] \tag{24}$$

6 Unda armonică plană

Unda armonică plană este o particularizare a soluției particulare, care ia în calcul doar unda progresivă:

$$y(x,t) = Y_0\exp[i(\omega t - kx + \theta_0)] \tag{25}$$

care prezintă partea reală:

$$y(x,t) = Y_0\cos(\omega t - kx + \theta_0) \tag{26}$$

Funcția este periodică în timp și spațiu. Perioada temporală satisface condiția:

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi \tag{27}$$

de unde rezultă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{28}$$

Perioada spațială satisface condiția:

$$k(x+\lambda) = kx + 2\pi \tag{29}$$

de unde rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{30}$$

și poartă numele de *lungime de undă*. Se observă că dacă notăm faza $\theta = \omega t - kx + \theta_0$, următoarele relații sunt respectate:

$$\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad k = -\tfrac{\partial \theta}{\partial x} \tag{31}$$

7 Unda armonică tridimensională

Unda armonică tridimensională are funcția de undă ce respectă ecuația undelor:

$$\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{32}$$

unde Δ reprezintă operatorul Laplace, dat de:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \tag{33}$$

Pentru acest tip de funcție, vom presupune proiecțiile independente pe cele trei axe. Acest lucru implică relația:

$$\psi\left(x, y, z, t\right) = X\left(x\right) Y\left(y\right) Z\left(z\right) \exp\left(i\omega t\right) \tag{34}$$

Dacă introducem în ecuația sistemului, se obține:

$$\left(YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right) \exp\left(i\omega t\right) = -\frac{\omega^2}{v^2} XYZ \exp\left(i\omega t\right) \tag{35}$$

Reducem funcția exponențială, notăm $k^2 = \omega^2/v^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ și împărțim forțat cu XYZ. Se obțin 3 ecuații de forma:

$$\frac{1}{\zeta_s} \frac{d^2 \zeta_s}{ds} = k_\zeta^2 \tag{36}$$

cu $\zeta_s \in \{X, Y, Z\}$ și $s \in \{x, y, z\}$. Aceste ecuații sunt de tip armonic liniar, având soluțiile:

$$\zeta\left(s\right) = \zeta_{01} \exp\left(ik_\zeta s\right) + \zeta_{02} \exp\left(-ik_\zeta s\right) \tag{37}$$

Introducând și funcția de timp, se obține soluția temporală pe direcția s:

$$\psi_s = \zeta\left(s\right) \exp\left(i\omega t\right) \tag{38}$$

Din suprapunerea soluțiilor, se obține:

$$\psi = \psi_0 \exp\left[i\left(\omega t - \left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right)\right] \tag{39}$$

Dacă se definește vectorul $\vec{k} = k_x \vec{1}_x + k_y \vec{1}_y + k_z \vec{1}_z$ și vectorul $\vec{s} = \vec{1}_x + \vec{1}_y + \vec{1}_z$, soluția se scrie restrâns:

$$\psi = \psi_0 \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}\vec{s}\right)\right) \tag{40}$$

8 Unde sferice

În cazul în care sursa este punctiformă, iar mediul este omogen și izotrop, frontul de undă capătă o formă sferică. Pentru a descrie acest tip de undă, se rezolvă ecuația diferențială tridimensională a undelor, în care operatorul Laplace este scris în formă sferică - din motive de convenienței:

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{41}$$

Deoarece suprafața sferică se păstrează pentru orice θ și φ, funcția va depinde doar de r în coordonate sferice. Laplacianul se rescrie doar pentru r, iar ecuația sistemului devine:

$$\Delta_r\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \tag{42}$$

unde

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] \tag{43}$$

Soluția generală se obține construind funcția $\phi = r\psi$. Înlocuind în ecuația diferențială, se obține:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{44}$$

Deoarece ecuația diferențială este aceeasi, cu singura diferență fiind faptul că variabila spațială devine raza în loc de proiecția pe axă, funcția ϕ este echivalentă matematic cu funcția ψ. Dacă ne aducem aminte că funcțiile de undă reprezintă superpozițiile dintre o funcție progresivă și una regresivă:

$$\phi = \phi_p\left(t - \frac{r}{v}\right) + \phi_r\left(t + \frac{r}{v}\right) \tag{45}$$

Din punct de vedere matematic, aplicând metoda separării variabilelor, se obține:

$$\phi = A\exp\left(i\omega\left(t + \frac{r}{v}\right)\right) + B\exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \tag{46}$$

de unde se obține funcția ψ:

$$\psi = \frac{A}{r}\exp\left(i\omega\left(t + \frac{r}{v}\right)\right) + \frac{B}{r}\exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right) \tag{47}$$

9 Unde staționare

Unda staționară apare prin suprapunerea a două unde, una progresivă și una regresivă, de amplitudini și pulsații egale. În natură, aceste unde apar într-o coardă vibrantă, de lungime fixată L, care are ambele capete fixate. Soluția generală este:

$$y(x,t) = Y_p\cos(\omega t - kx) + Y_r\sin(\omega t + kx) \tag{48}$$

Utilizând metoda separării variabilelor pentru y, ca în cazul precedent, vom obține formele funcțiilor:

$$S(x) = S_{01}\cos kx + D\sin kx \tag{49}$$

$$T(t) = T_{01} \cos \omega t + T_{02} \sin \omega t \tag{50}$$

Vom studia condițiile la limită: Deoarece capetele corzii sunt fixate, avem $y(0,t) = y(L,t) = 0$. De asemenea, undele sunt induse de o anumită perturbație inițială, de forma $y(x,0) = \varphi(x)$, cu variația $\partial y/\partial t(x,0) = \varphi_1(x)$. Aplicăm condițiile la limită în ecuația funcției dependente de x, și condițiile inițiale în ecuația funcției dependente de t. În urma aplicării condițiilor la limită se obțin coeficienții:

$$S_{01} = 0, \quad \text{și } S_{02} \sin kL = 0 \tag{51}$$

Această ecuație este satisfăcută pentru o serie de de numere de undă k_n:

$$k_n L = n\pi \tag{52}$$

Deoarece $k_n = 2\pi/\lambda_n$ se observă că punctele aflate la λ_n nu oscilează. Aceste puncte se numesc *noduri*. Punctele aflate la mijlocul distanței dintre noduri se numesc *ventre*.

10 Pachetul de unde

Pachetul de unde este un model teoretic utilizat pentru a descrie o perturbație de durată finită. Astfel, dacă vom considera pentru exemplificare o undă plană unidimensională, care se propagă pe o durată infinită, mărimea perturbației este partea reală a soluției ecuației undelor:

$$y = A \cos(\omega_0 t - kx) \tag{53}$$

Această undă poate fi construită în spațiul frecvențelor prin intermediul unei singure componente, la frecvența ω_0, de amplitudine A. Dacă, în schimb timpul în care are loc oscilația devine finit, pentru construcția acestei unde este nevoie de folosirea unei bande simetrice de frecvențe centrate pe ω_0 și de lărgime $\Delta\omega$. Pentru o perturbație de durată finită $\Delta\tau$, lărgimea de bandă $\Delta\omega$ este:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta\tau} \tag{54}$$

Pentru acest interval, funcția de undă este dată de suprapunerea tuturor componentelor:

$$\psi = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega) x))\, d\omega \tag{55}$$

Pentru cazul în care toate componentele au aceeași amplitudine A_0, se poate dezvolta $k(\omega)$ în serie Taylor în jurul lui ω_0, până la primul ordin:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} \tag{56}$$

Dacă introducem această formă în soluție, se obține:

$$\psi = A \exp(i(\omega_0 t - k(\omega_0) x)) \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \exp\left[i(\omega - \omega_0) \left(t - \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} x \right) \right] d\omega \tag{57}$$

Se efectuează schimbarea de variabilă:

$$\xi = t - \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} x \tag{58}$$

și $\omega - \omega_0 = \Omega$, iar soluția devine:

$$\psi = A \exp\left(i\left(\omega_0 t - k\left(\omega_0\right) x\right)\right) \int\limits_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \exp\left(i\Omega\xi\right) d\Omega \tag{59}$$

După rezolvarea integralei, se obține:

$$\psi = A \exp\left(i\left(\omega_0 t - k\left(\omega_0\right) x\right)\right) \frac{\exp\left(i\frac{\Delta\omega}{2}\xi\right) - \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}\xi\right)}{i\xi} \tag{60}$$

de unde:

$$\psi = A \exp\left(i\left(\omega_0 t - k\left(\omega_0\right) x\right)\right) \frac{2\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\xi\right)}{\xi} \tag{61}$$

sau mai convenabil:

$$\psi = A\Delta\omega \exp\left(i\left(\omega_0 t - k\left(\omega_0\right) x\right)\right) \frac{2\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\xi\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}\xi} \tag{62}$$

Această relație arată că soluția pachetului de unde este o combinație între două tipuri de suprafețe - un set de suprafețe care oscilează în fază, și un set de suprafețe care prezintă aceeași amplitudine. Cele două tipuri de suprafețe se propagă cu două viteze diferite:

- *Viteza de fază*, care exprimă viteza de oscilație a perturbațiilor ce compun spectrul. Viteza de fază este determinată din condiția de fază constantă:

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k\left(\omega_0\right)} \tag{63}$$

- *Viteza de grup*, v_g, care exprimă viteza cu care se propagă suprafețele de aceeași amplitudine (viteza cu care se deplasează înfășurătoarea pachetului). Viteza de grup este constantă și depinde de natura undelor - oferă viteza de propagare a undelor. Dacă pe parcursul propagării componentele spectrale prezintă viteze de grup diferite, se ajunge întotdeauna la alterarea formei inițiale a înfășurătorii. Acest fenomen se numește *dispersie*. Este de menționat că unda se propagă nedeformat în condițiile în care viteza de grup este egală cu viteza de fază. Pentru situațiile in care $v_g \neq v_f$, se disting următoarele cazuri:

  - *Dispersia normală* - dacă viteza de fază este mai mare decât viteza de grup. În acest caz, înfășurătoarea pachetului suferă o extindere.
  - *Dispersia anomală* - dacă viteza de fază este mai mică decât viteza de grup. În acest caz, înfășurătoarea suferă o compresie, și apoi o extindere în sens invers.