# Curs 3 - Tipuri de mișcări

Octavian Dănilă

17 martie 2016

## Cuprins



## 1 Mișcarea rectilinie

Mișcarea rectilinie presupune păstrarea unei direcții paralele cu una dintre axele de coordonate la orice moment de timp $t$. Vom alege pentru simplitate axa $ox$.

### 1.1 Mișcarea rectilinie uniformă

Acest tip de mișcare presupune menținerea unei viteze constante pe parcursul evoluției. În aceste condiții, avem:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \tag{1}$$

și

$$x = \int vdt = x_0 + vt \tag{2}$$

## 1.2 Mișcarea rectilinie uniform variată

Acest tip de mișcare presupune menținerea unei accelerații constante pe parcursul evoluției. În aceste condiții, avem:

$$v = \int a dt = v_0 + at \tag{3}$$

$$x = \int v dt = \int (v_0 + at)\, dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{4}$$

Dacă eliminăm timpul între aceste două ecuații, se obține ecuația Galilei:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} \tag{5}$$

### 1.2.1 Căderea liberă

Căderea liberă este o mișcare rectilinie uniform variată pe direcție verticală, cu accelerația constantă $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$. Sistemul fizic are viteza inițială $v_0 = 0$, și pornește de la înălțimea $y_0 = h$. Scriind ecuațiile mișcării rectilinii variate pentru acest caz, se obțin următorii parametri de interes:

1. Timpul de cădere:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{6}$$

2. Viteza la momentul impactului cu coordonata $y = 0$:

$$v = \sqrt{2gh} \tag{7}$$

### 1.2.2 Aruncarea pe verticală

Aruncarea pe direcție verticală este un alt caz particular al mișcării rectilinie uniformă variată, și presupune că sistemul pornește de la nivelul $y_0 = 0$, pe direcție verticală, având viteza inițială $v_0 \neq 0$, urcă până la o anumită înălțime $h$ și se reîntoarce în poziția inițială. Scriind ecuațiile mișcării rectilinie variată, se obțin parametrii de interes:

1. Timpii de urcare și coborâre:

$$t_u = t_c = \frac{v_0}{g} \tag{8}$$

2. Înălțimea maximă la care urcă sistemul:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \tag{9}$$

### 1.2.3 Aruncarea sub un unghi dat

Un sistem care este aruncat la un unghi $\theta$ față de orizontală, având viteza inițială $v_0 \neq 0$ și coordonate inițiale în originea sistemului de referință, execută simultan două mișcări: pe orizontală - mișcare rectilinie uniformă, pe verticală - mișcare rectilinie uniform variată. Parametrii de interes sunt:

1. Timpii de urcare și coborâre:

$$t_u = t_c = \frac{v_y}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{10}$$

2. Înălțimea maximă la care urcă sistemul:

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{11}$$

3. Distanța maximă față de poziția inițială la care cade corpul:

$$x = v_x\left(t_u + t_c\right) = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{12}$$

### 1.2.4 Mișcarea rectilinie uniform accelerată cu forțe de rezistență

Până acum, modelele considerate au presupus accelerațiile și forțele constante. Din acest motiv, parametrii cinematici sunt găsiți prin integrarea directă a accelerației găsite prin intermediul principiului al II-lea. Problema devine mai complicată în momentul în care în mișcare introducem forțe care depind de parametri cinematici. Vom considera un sistem de masă $m$ care se mișcă pe o direcție orizontală cu o accelerație $a$ căruia i se opune o forță de rezistență $F_r = -\gamma v$. În aceste condiții, scriem principiul al II-lea al mecanicii:

$$F = ma = -\gamma v \tag{13}$$

De aici, scriem ecuația de mișcare a sistemului:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v = 0 \tag{14}$$

Această ecuație reprezintă ecuația de mișcare a modelului. Conform procedurii de modelare, rezolvarea acestei ecuații produce forma matematică a parametrului de interes, în acest caz viteza: Dacă se notează

$$\delta = \frac{\gamma}{2m} \tag{15}$$

Ecuația de mișcare are soluția generală:

$$v\left(t\right) = v_0 \exp\left(-\delta t\right) \tag{16}$$

unde $\delta$ reprezintă *coeficientul de atenuare*. Pentru cazul în care forța de tracțiune este mai mare decât forța de rezistență, ecuația sistemului nu mai este egală cu zero, ci cu o constantă. Găsirea soluției generale acestei ecuații este asemănătoare cu rezolvarea de mai sus, dar găsirea unei soluții particulare pentru cazul dat presupune introducerea formei generale în expresie și recalcularea celorlalți parametri.

# 2 Mișcarea circulară

Modelul presupune un sistem de masă $m$ care execută o mișcare pe circumferința unui cerc de rază $R$.

## 2.1 Mișcarea circulară uniformă

În acest caz, viteza unghiulară este considerată constantă. De aici, rezultă:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{17}$$

și

$$\theta = \int \omega dt = \theta_0 + \omega t \tag{18}$$

Relația între viteza liniară și viteza unghiulară:

$$v = \omega \times R = \omega R \tag{19}$$

## 2.2 Mișcarea circulară uniform variată

În acest caz, accelerația unghiulară este considerată constantă. De aici, rezultă:

$$\omega = \int \epsilon dt = \omega_0 + \epsilon t \tag{20}$$

și

$$\theta = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \epsilon t)\, dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2} \tag{21}$$

Relațiile între componentele accelerației și componentele unghiulare:

$$a_t = \epsilon \times R = \epsilon R \tag{22}$$

$$a_n = \omega \times (\omega \times R) = \omega^2 R \tag{23}$$

Notațiile vectoriale au fost omise deoarece sensurile ramân aceleași pe durata evoluției.

# 3 Mișcarea oscilatorie

Modelul oscilatorului liniar este unul dintre cele mai importante din fizică, deoarece în natură există un număr destul de numeros de fenomene care pot fi echivalate cu acest model. De exemplu, undele sunt oscilatori liniari care se propagă cu o viteză în spațiu, comportamentul atomilor în rețeaua cristalină poate fi echivalat cu un oscilator liniar, agitația termică a microsistemelor poate fi de asemenea echivalată cu un oscilator liniar, precum și multe alte fenomene.

## 3.1 Mișcarea oscilatorie armonică

Modelul oscilatorului armonic presupune un sistem de masă $m$ legat de un resort de constantă elastică $k$, care este deplasat din poziția de echilibru. Forța de tracțiune din fiecare punct este egală cu forța elastică din resort. Modelul se scrie:

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{24}$$

Împărțim la $m$ și notăm $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Se obține ecuația de mișcare a modelului:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{25}$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta_0) \tag{26}$$

unde $A$ este amplitudinea, $\omega_0$ este pulsația naturală și $\theta_0$ este faza inițială a oscilațiilor. Pentru oscilații armonice, toți acești parametri sunt constanți. Pe baza pulsației se definește perioada naturală ca fiind intervalul de timp în care se efectuează o oscilație completă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{27}$$

și frecvența naturală ca fiind numărul de oscilații complete efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{28}$$

Datorită formei analitice a lui $x(t)$, se poate observa că mișcarea oscilatorie reprezintă proiecția pe axă a unei mișcări circulare cu viteza unghiulară $\omega_0$. Această echivalență permite reprezentarea unei oscilații cu ajutorul fazorilor (vectori rotitori).

## 3.2 Mișcarea oscilatorie armonică amortizată

Să adăugăm la modelul oscilatorului armonic un amortizor cu constanta de amortizare $\gamma$. Forța inerțială este dată de suma dintre forța elastică și forța de rezistență (sau amortizare). Principiul II al mecanicii se scrie:

$$F = ma = -kx - \gamma v \tag{29}$$

Împărțim la $m$ și efectuăm notațiile: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - pulsația naturală și $\delta = \gamma/(2m)$ - coeficientul de atenuare. Se obține ecuația de mișcare:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{30}$$

Rezolvarea acestei ecuații se face prin înlocuirea cu ecuația caracteristică:

$$s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0 \tag{31}$$

Aceasta este o ecuație de gradul 2, având rădăcini reale pentru $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, de forma:

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{32}$$

Se disting următoarele cazuri:

1. Dacă $\delta > \omega_0$, ecuația caracteristică are rădăcini reale, iar soluția generală are forma:

$$x(t) = C_1 \exp(s_1 t) + C_2 \exp(s_2 t) \tag{33}$$

   Deoarece argumentele exponențialelor sunt reale și negative, se observă că mișcarea se atenuează înainte ca oscilația să apară.

2. Dacă $\delta = \omega_0$, ecuația caracteristică are o singură rădăcină $s = \delta$. Soluția generală devine:

$$x = (C_1 t + C_2) \exp(-\delta t) \tag{34}$$

   La fel ca în cazul precedent, mișcarea este atenuată înainte ca oscilația să apară.

3. Dacă $\delta < \omega_0$, ecuația caracteristică are rădăcini complexe de forma:

$$s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega \tag{35}$$

   Soluția generală a ecuației de mișcare este:

$$x(t) = \exp(-\delta t)\left[C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)\right] = A \exp(-\delta t) \sin(\omega t + \theta_0) \tag{36}$$

   Se observă că amplitudinea se atenuează exponențial cu timpul, iar pulsația devine dependentă de coeficientul de atenuare $\delta$. Faza inițială rămâne constantă. Perioada oscilației este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{37}$$

   având o valoare mai mică decât perioada naturală. Pentru această mișcare, se definește *decrementul logaritmic* ca fiind parametrul ce caracterizează gradul de amortizare al amplitudinii oscilației după o perioadă:

$$\Lambda = \ln \frac{A(t+T)}{A(t)} = -\delta T \tag{38}$$

## 3.3 Mișcarea oscilatorie armonică forțată

Vom adăuga modelului de mai sus o componentă externă a forței. De interes este o formă a forței care să întrețină mișcarea oscilatorie. Din acest considerent, forța va avea forma matematică:

$$F_0 = f_0 \sin(\Omega t) \tag{39}$$

Modelul de mișcare devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \sin(\Omega t) \tag{40}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul doi, neomogenă. Soluția este o superpoziție de două componente, $x_0(t)$ și $x_1(t)$:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \tag{41}$$

Aici, $x_0$ este soluția generală a ecuației omogene, iar $x_1$ este o soluție particulară a ecuației neomogene, obținută prin inserarea lui $x_0$ în ecuația diferențială și ajustarea coeficienților pentru a egala componenta neomogenă $F_0$. Soluția ecuației omogene tinde la zero pentru $t \to \infty$, deci $x = x_1$. Rezultă că $x_1$ va avea forma:

$$x_1 = A \sin\left(\Omega t + \theta\right) \tag{42}$$

Substituim în ecuația diferențială această formă și obținem parametrii:

$$A = \frac{f_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \tag{43}$$

și

$$\mathrm{tg}\ \theta = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{44}$$

## 3.4 Compunerea oscilațiilor armonice cu aceeași frecvență și direcție

În cazul în care asupra unui corp acționează mai multe forțe de tip armonic pe aceeași direcție, care dau naștere unor oscilații cu aceeași pulsație, oscilația rezultantă este dată de suprapunerea oscilațiilor componente:

$$x_1 = A_1 \sin\left(\omega_0 t + \theta_1\right), \quad x_2 = A_2 \sin\left(\omega_0 t + \theta_2\right) \tag{45}$$

$$x = x_1 + x_2 = A \sin\left(\omega t + \theta\right) \tag{46}$$

Amplitudinea este dată de relația:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)} \tag{47}$$

iar defazajul este dat de:

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{A_1 \sin\theta_1 + A_2\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2} \tag{48}$$

Se disting următoarele cazuri speciale:

1. Pentru un defazaj $\theta = 2k\pi$, amplitudinea devine:

$$A = A_1 + A_2 \tag{49}$$

2. Pentru un defazaj $\theta = \left(2k+1\right)\pi$ , avem:

$$A = A_1 - A_2 \tag{50}$$

3. Pentru un defazaj $\theta = \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$, avem:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{51}$$

## 3.5 Variații mici ale frecvenței. Fenomenul de bătăi.

Dacă frecvențele celor două oscilații sunt sensibil diferite, cele două soluții au forma:

$$x_j = A_j \sin\left(\omega_j t + \theta_j\right) \tag{52}$$

cu $j \in \overline{1, n}$. Dacă abordăm modelul simplificat, în care toate amplitudinile componentelor sunt egale $A_j = A$, și fazele inițiale $\theta_j = 0$, pentru două componente, superpoziția lor este:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\Omega t\right)\cos\left(\omega t\right) \tag{53}$$

cu componentele $\omega$ și $\Omega$ date de:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Omega = \tfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{54}$$

Se observă că rezultanta suprapunerii este o oscilație cu pulsația $\omega$ cu amplitudinea modulată cu pulsația $\Omega$.

## 3.6 Compunerea oscilațiilor armonice cu aceeași frecvență și direcții ortogonale

Dacă vom considera două pulsații ce posedă aceeași pulsație $\omega_0$ dar care au loc pe direcții ortogonale, coordonatele pe $x$ și $y$ sunt date de:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t + \theta_x\right), y = B\sin\left(\omega_0 t + \theta_y\right) \tag{55}$$

Dacă alegem $\theta_x = 0$ și $\theta_y = \theta$ defazajul relativ al $\theta_y$ față de $\theta_x$, cele două relații devin:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t +\right), y = B\sin\left(\omega_0 t + \theta\right) \tag{56}$$

Dacă eliminăm timpul între cele două ecuații de mai sus, se obține relația:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\theta = \sin^2\theta \tag{57}$$

Se disting următoarele cazuri particulare:

1. Dacă $\theta = 2k\pi$, avem:

$$y = \frac{B}{A}x \tag{58}$$

2. Dacă $\theta = \left(2k+1\right)\pi$, avem:

$$y = -\frac{B}{A}x \tag{59}$$

3. Dacă $\theta = \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$, avem:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{60}$$

Pentru situațiile în care raportul între pulsațiile pe $x$ și $y$ este un număr întreg $n$, în urma eliminării timpului între funcțiile parametrice, se vor obține figurile Lissajous de ordinul $n$.