# Curs 2 - Mecanică Clasică

Octavian Dănilă

10 martie 2016

## 1 Axiomele mecanicii clasice

Axiomele mecanicii clasice reprezintă un set de proprietăți ale mărimilor față de care sunt reprezentate toate fenomenele. Proprietățile sunt:

1. **Omogenitatea spațiului:** Toate punctele spațiului prezintă aceleași proprietăți de caracterizare.

2. **Izotropia spațiului:** Toate direcțiile din spațiu sunt echiprobabile pentru realizarea unei interacțiuni.

3. **Uniformitatea timpului:** Trecerea timpului este percepută identic în toate punctele.

## 2 Reprezentări cinematice

Reprezentarea cinematică este setul de coordonate spațiale independente alese pentru a reprezenta starea unui sistem fizic în spațiu la un anumit moment. Reprezentările cele mai utilizate sunt:

1. **Sistemul Cartesian:** Este reprezentarea care cuprinde 3 coordonate liniare independente: $x$, $y$ și $z$.

2. **Sistemul cilindric:** Este reprezentarea ce cuprinde 2 coordonate liniare - raza bazei cilindrului $r$, unghiul la centru $\theta$, și o coordonată liniară - înălțimea cilindrului $z$.

3. **Sistemul polar:** Este reprezentarea ce cuprinde o coordonată liniară - raza sferei $r$, și două coordonate unghiulare - unghiul la centru în planul ecuatorial al sferei $\theta$, și unghiul față de coordonata $z$ - $\varphi$.

Conversia de la coordonatele cartesiene la coordonate polare este:

$$x = r\sin\theta\sin\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi \tag{1}$$

iar conversia de la coordonate cartesiene la coordonate cilindrice este:

$$x = r\sin\theta, \quad y = r\cos\theta, \quad z = z \tag{2}$$

# 3 Cinematica punctului material

Vom defini *un punct material* ca fiind un sistem fizic ale cărui proprietăți inerțiale pot fi concentrate într-un singur punct, care coincide cu centrul său de masă. Toate interacțiunile cu exteriorul sunt aplicate în acest punct.

Pentru punctele materiale, evoluția mișcării este dată de setul de parametri cinematici. În funcție de reprezentarea spațială, parametrii pot fi liniari sau unghiulari.

## 3.1 Definirea parametrilor cinematici

Parametrii cinematici sunt:

1. **Vectorul de poziție:** Este mărimea vectorială care unește centrul sistemului de referință și poziția instantanee a punctului material la momentul $t$.

2. **Traiectoria:** Este mărimea vectorială definită ca diferența dintre vectorii de poziție de la momentele $t + dt$ și $t$:

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) \tag{3}$$

3. **Unghiul la centru:** Este mărimea care descrie unghiul făcut de vectorul de poziție ce descrie poziția instantanee la momentul $t$:

4. **Viteza liniară instantanee:** Este mărimea vectorială definită ca variația traiectoriei în raport cu timpul:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \tag{4}$$

   Din punct de vedere geometric, viteza este un vector tangent la curba traiectoriei în orice punct.

5. **Viteza unghiulară instantanee:** Este mărimea vectorială definită ca variația unghiului la centru în raport cu timpul:

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

   Din punct de vedere vectorial, viteza unghiulară este un vector perpendicular pe planul de mișcare.

6. **Accelerația liniară instantanee:** Este mărimea vectorială definită ca variația vitezei în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6}$$

   Din punct de vedere grafic, accelerația comportă două componente: O componentă tangențială, coliniară cu viteza instantanee, dată de relația:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{7}$$

unde s-a renunțat la notația vectorială, și o componentă normală, definită prin intermediul parametrilor cinematici unghiulari:

$$a_n = \omega^2 R \tag{8}$$

unde $R$ reprezintă raza instantanee a cercului pe care se realizează mișcarea.

7. **Accelerația unghiulară:** Este mărimea vectorială definită ca variația vitezei unghiulare în raport cu timpul:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \tag{9}$$

Din punct de vedere vectorial, accelerația unghiulară este coliniară cu cu viteza unghiulară.

### 3.2 Relațiile dintre parametrii cinematici linari și unghiulari

Vom considera un corp care execută o mișcare pe un cerc de rază $\vec{r}$ constantă. Pentru acest caz, legătura dintre vitezele liniară și unghiulară este:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{10}$$

Pentru accelerații, avem:

$$\vec{a}_t = \vec{\epsilon} \times \vec{r} \tag{11}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{12}$$

## 4 Principiile mecanicii clasice

Principiile mecanicii clasice reprezintă setul de reguli generale pe care le respectă orice sistem mecanic. Setul este compus dintr-un principiu director și principiile de legătură.

### 4.1 Principiul 0

Principiul zero este principiul director, care descrie comportamentul sistmelor fizice izolate de exterior:

*Enunț:* Orice sistem mecanic asupra căruia nu există acțiuni din exterior ajunge, după un timp suficient de îndelungat, la o stare de echilibru (repaus sau mișcare rectilinie uniformă), din care nu mai poate ieși fără acțiuni exterioare.

*Corolar:* La acțiuni exterioare asupra unui sistem fizic aflat în stare de echilibru, acesta tinde să își păstreze starea de dinaintea acțiunii.

### 4.2 Principiul I

Principiul I este cunoscut și sub numele de principiul acțiunii și reacțiunii, și stabilește legea de compunere a forțelor exercitate asupra unui sistem fizic în echilibru.

*Enunț:* Dacă asupra unui sistem aflat în stare de echilibru se acționează cu o forță $\vec{F}_{12}$, atunci sistemul va răspunde cu o forță egală și de sens contrar $\vec{F}_{21}$.

*Corolar:* Rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra unui sistem fizic aflat într-o stare de echilibru este nulă:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = 0 \tag{13}$$

## 4.3 Principiul al II-lea

Principiul al II este cunoscut și sub numele de *legea lui Newton*, și stabilește comportamentul unui sistem fizic liber sub acțiunea unei forțe.

*Enunț:* Acțiunea unei forțe asupra unui sistem fizic induce o accelerație coliniară cu forța, având același sens, și proporțională cu forța după legea:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{14}$$

Coeficientul $m$ se numește *masa* sistemului fizic, definită ca *răspunsul sistemului fizic la acțiunea forțelor inerțiale.*

## 4.4 Principiul al III-lea

Principiul al III-lea este cunoscut și sub numele de *principiul acțiunii independente a forțelor*, sau *principiul echivalenței forțelor* și stabilește modul în care contribuția fiecărei forțe dintr-un set poate fi evaluată independent de celelalte.

*Enunț:* Acțiunea unui număr de $N$ forțe asupra aceluiași sistem fizic este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe egală cu suma vectorială a componentelor.

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} F_k \tag{15}$$

*Corolar:* Toate forțele care acționează asupra unui sistem fizic pot fi descompuse după un set ortogonal de axe, urmând ca problema să fie descompusă într-un număr de sub-probleme egal cu numărul de axe.

## 4.5 Principiul al IV-lea

Principiul al IV-lea este cunoscut și sub numele de *principiul relativității clasice*, și stabilește legea de trecere de la un sistem de referință fix la un sistem de referință mobil pentru observarea aceluiași fenomen.

*Enunț:* La trecerea observatorului unui fenomen de la un sistem de referință fix la unul mobil, viteza percepută din sistemul mobil este dată de suma dintre viteza inițială a sistemului și viteza de transport dintre cele două sisteme de referință:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_0 + \vec{v}_t \tag{16}$$

Această relație este cunoscută șub numele de *legea compunerii vitezelor.*

## 4.6 Tipuri de forțe

Acțiunile mecanice se împart în mai multe categorii:

1. **Forțe inerțiale sau de tracțiune:** Sunt forțele care sunt proporționale cu accelerația sistemului:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{17}$$

Aceste forțe au tendința de scoatere a sistemului din starea de echilibru inerțial.

2. **Forțe de rezistență:** Sunt forțele care sunt proporționale cu viteza sistemului:

$$\vec{F}_r = -\gamma\vec{v} \tag{18}$$

Semnul minus indică faptul că aceste forțe au tendința de a restaura sistemul la starea de echilibru. Coeficientul $\gamma$ este *coeficientul de amortizare*.

3. **Forțe elastice:** Sunt forțele care sunt proporționale cu elongația față de o coordonată de echilibru, luată ca referință:

$$\vec{F}_e = -kx \tag{19}$$

Semnul minus indică natura restauratoare a forțelor elastice.

4. **Forțe de frecare:** Sunt forțele care sunt proporționale cu apăsarea normală a sistemului fizic pe suprafața de interacțiune:

$$\vec{F}_f = -\mu\vec{N} \tag{20}$$

Coeficientul $\mu$ se numește *coeficient de frecare*.

# 5 Dinamica punctului material

## 5.1 Definirea parametrilor dinamici

Parametrii dinamici caracterizează sistemele fizice din punct de vedere energetic. Aceștia sunt:

1. **Impulsul** este mărimea vectorială definită ca produsul dintre masa sistemului fizic și viteza instantanee:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{21}$$

2. **Lucrul mecanic** reprezintă energia necesară unei forțe $\vec{F}$ pentru a produce o deplasare elementară $d\vec{s}$:

$$\delta L = \vec{F}d\vec{s} \tag{22}$$

Pentru o mișcare pe o singură direcție (rectilinie) se poate renunța la notația vectorială:

$$\delta L = Fdx \tag{23}$$

Lucrul mecanic este o mărime de proces, deci variația sa elementară depinde de drum și este notată cu $\delta$. Pentru calculul lucrului mecanic total între două coordonate $x_i$ și $x_f$, vom integra:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} Fdx \tag{24}$$

3. **Energia cinetică** reprezintă energia necesară pentru a produce o variație de viteză unui sistem care prezintă impulsul $\vec{p}$:

$$dE_c = \vec{p}d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v} \tag{25}$$

   Energia cinetică este o mărime de stare. Pentru a calcula energia cinetică totală între două stări cu viteze $v_i$ și $v_f$, integrăm:

$$E_c = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_i}^{v_f} \tag{26}$$

4. **Energia potențială** reprezintă lucrul mecanic potențial pe care îl poate efectua o forță asupra sistemului fizic, dacă aceasta ar fi lăsată să acționeze:

$$E_p = L_p \tag{27}$$

5. **Energia totală** reprezintă suma dintre energiile cinetică și potențială:

$$E = E_c + E_p \tag{28}$$

6. **Puterea** reprezintă variația energiei totale în raport cu timpul:

$$P = \frac{dE}{dt} \tag{29}$$

7. **Randamentul** reprezintă raportul dintre puterea utilă pentru realizarea unei deplasări și puterea consumată în realitate.

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{P_u}{P_u + P_\tau} \tag{30}$$

   unde $P_\tau$ reprezintă puterea pierderilor în urma exercitării fenomenului.

# 6 Teoreme de variație

Vom defini un *sistem conservativ* un sistem care nu prezintă pierderi de energie. Pierderile de energie într-o evoluție iau forma lucrului mecanic al forțelor disipative (frecare, rezistență, deformatoare).

## 6.1 Teorema de variație a impulsului

Variația în raport cu timpul a impulsului unui sistem fizic este egală cu forța instantanee exercitată de acel corp:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} \tag{31}$$

Dacă masa totală a sistemului rămâne constantă, se obține:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \tag{32}$$

### 6.2 Teorema de variație a energiei cinetice

Sistemele care nu prezintă pierderi în exterior execută deplasări care corespund unui minim al energiei. Acest lucru implică faptul că lucrul mecanic este produs pe aceeași traiectorie energetică indiferent de sens, ceea ce îl transformă într-o mărime de stare. Pentru aceste sisteme se respectă teorema de variație a energiei cinetice:

Variația energiei cinetice a unui sistem conservativ între două stări (inițială și finală) este egală cu lucrul mecanic efectuat între acele stări.

$$\Delta E_c = L \tag{33}$$

Deoarece lucrul mecanic este egal cu energia potențială, ecuația de mai sus devine:

$$\Delta E_c = \Delta L = \Delta E_p \tag{34}$$

### 6.3 Teorema de variație a energiei potențiale

Energia potențială formează un câmp scalar pentru sisteme conservative. Dacă se reprezintă câmpul de energie potențială în funcție de direcțiile $x$, $y$ și $z$, înclinațiile formei de relief rezultante dau forțele care se exervită în acele direcții:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \tag{35}$$

sau în formă contractată:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \tag{36}$$

Operatorul $\nabla$ este operatorul gradient pentru câmpuri scalare, având forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \tag{37}$$

## 7 Teoreme de conservare

### 7.1 Conservarea impulsului

Într-un sistem conservativ, impulsul total se conservă.

### 7.2 Conservarea energiei totale

Într-un sistem conservativ, energia totală a sistemului se conservă. Pentru sisteme cu pierderi, variația energiei totale este egală cu lucrul mecanic total al forțelor neconservative.