

3. PROPAGAREA UNDELOR LUMINOASE GHIDATE

3.1. Propagarea undelor luminoase prin fibre optice

3.1.1. Caracteristici generale

Fibrele optice sunt medii realizate din sticlă sau mase plastice în care se propagă radițiile luminoase, fenomenul de ghidare fiind determinat de profilul transversal al indicelui de refracție. În general, fibrele optice sunt formate dintr-un miez dielectric transparent, caracterizat de un indice de refracție n_1 , care ghidează radiația luminoasă și un înveliș (cămașă) ce are indicele de refracție n_2 mai mic decât al miezului (fig. 3. 1).

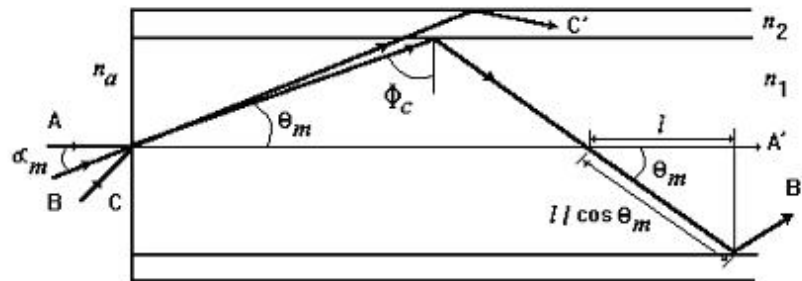


Fig. 3. 1. Propagarea luminii printr-o fibră optică. Raza AA' este rază axială (meridională), raza BB' este raza critică corespunzătoare reflexiei totale interne, iar raza CC' este radiată în exteriorul fibrei (rază evanescentă).

Pentru $0 < \Phi < \Phi_c$ și $0 < \Phi' < \pi/2$ fenomenul de refracție la interfața dintre cele două medii este guvernat de legea Snell:

$$n_1 \sin \Phi = n_2 \sin \Phi' \quad (3.1)$$

unde Φ și Φ' reprezintă unghiurile de incidență și respectiv refracție. Dacă unghiul de incidență este egal cu cel critic ($\Phi = \Phi_c$) atunci $\Phi' = \pi/2$ și

$$n_1 \sin \Phi_c = n_2 \quad (3.2)$$

Pentru valori ale unghiului de incidență $\Phi > \Phi_c$ are loc fenomenul de *reflexie totală internă* fără pierderi la interfața dintre cele două medii.

Toate razele care sunt incidente la un capăt al fibrei sub un unghi mai mic decât α_m (*unghi de acceptanță*), căruia îi corespunde un unghi de refracție $\theta_m = \pi/2 - \Phi_c$, se propagă de-a lungul miezului fibrei în urma unor reflexii totale interne repetate pe interfața miez-înveliș.

Pentru a calcula unghiurile α_m și θ_m se aplică legea Snell sub forma:

$$n_a \sin \alpha = n_1 \sin \theta = n_1 \cos \Phi \quad (3.3)$$

În cazul razelor critice relația (3.3) devine:

$$n_a \sin \alpha_m = n_1 \sin \theta_m = n_1 \cos \Phi_c \quad (3.4)$$

Întrucât $\sin \Phi_c = n_2 / n_1$ se poate scrie:

$$\cos \Phi_c = \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2} / n_1, \quad (3.5)$$

iar

$$\sin \alpha_m = \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2} / n_a \quad (3.6)$$

Prin analogie cu termenii utilizați pentru caracterizarea concentrării luminii de către obiectivele microscopice și în cazul fibrelor optice se introduce noțiunea de *apertură numerică*, (NA), definită cu ajutorul relației:

$$(NA) = n_a \sin \alpha_m = \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2} = (2n\Delta n) \quad (3.7)$$

în care: $\Delta n = (n_1 - n_2)$, iar $n = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$.

În cazul utilizării unei surse luminoase caracterizată printr-o difuzie mică, situată pe axa fibrei la unul dintre capete, numai fracțiunea $\sin^2 \alpha_m$ din radiațiile emise poate fi colectată și se propagă de-a lungul fibrei.

Considerând o sursă izotropă (lambertiană) pentru care puterea emisă pe unitatea de unghi solid în direcția θ normală pe suprafață este

$$I(\theta) = I_0 \cos \theta, \quad (3.8)$$

puterea totală emisă, Φ_0 , se calculează prin integrarea lui $I(\theta)$ după toate direcțiile:

$$F_0 = \int_0^{\pi/2} (I_0 \cos q)(2p)(\sin q) dq = \pi I_0 \quad (3.9)$$

De la o astfel de sursă, puterea, F , colectată de o fibră adiacentă al cărei diametru este mai mare decât cel al sursei este dată de relația:

$$F = \int_0^{\alpha_m} (I_0 \cos q)(2p)(\sin q) dq = \pi I_0 \sin^2 \alpha_m \quad (3.10)$$

iar

$$\frac{F}{F_0} = \sin^2 \alpha_m = \left(n_1^2 - n_2^2 \right) / n_a^2 \quad (3.11)$$

Dacă $n_a = 1$, se obține:

$$\frac{F}{F_0} = \left(n_1^2 - n_2^2 \right) = (2n\Delta n) = (NA)^2 \quad (3.12)$$

Deci, pentru a colecta cât mai multă lumină este necesar ca n și respectiv Δn să aibă valori cât mai mari, iar fibra să nu aibă înveliș exterior, în acest caz manifestându-se fenomenul de reflexie totală.

În cazul când lumina suferă fenomenul de reflexie internă totală, o perturbație electromagnetică (*undă evanescentă*) nu pătrunde prin interfața reflectătoare. Amplitudinea câmpurilor evanescente scade exponențial cu distanța de la interfață și în mod normal acestea nu se pot propaga în mediul cu indice de refracție mai mic. Ca urmare, o parte din puterea undelor se pierde determinând o atenuare mai mare.

Orice puls scurt de lumină injectat în fibră este format din raze, dintre care unele se propagă de-a lungul axei fibrei, iar altele se propagă oblic, sub unghiul maxim admis θ_m (fig. 3. 1). O rază axială se propagă pe distanța l în timpul $n_1 l / c$, în timp ce raza oblică străbate aceeași distanță de-a lungul axei fibrei în timpul $n_1 l / c \cos \theta_m = n_1 l / c \cos \Phi_c = n_1^2 l / n_2 c$, c fiind viteza luminii în vid.

În cazul când două raze sunt injectate împreună în fibră, acestea sunt separate prin timpul de sosire ΔT dat de relația:

$$\Delta T = \frac{n_1}{n_2} \frac{l}{c} \Delta n \tag{3.13}$$

în care: l este distanța de-a lungul axei fibrei (fig 3.1).

Un puls luminos care conține raze incidente pe fibră sub toate unghiurile posibile, datorită propagării se caracterizează printr-o întindere:

$$\frac{\Delta T}{l} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\Delta n}{c} \tag{3.14}$$

numită *dispersie temporală multipas*.

Considerând o fibră caracterizată de un indice de refracție de tip treaptă ca în figura 3.2 valorile tipice sunt: $n=1,46$, $\Delta n=0,02$, $(NA)=0,24$, unghiul de acceptanță $\alpha_m=14^\circ$, fracțiunea din puterea optică care se propagă în fibră este $(NA)^2=0,058$, dispersia temporală $\frac{\Delta T}{l}=68\text{ns/km}$, produsul dintre lărgimea benzii și distanță este 15 MHz/km, iar produsul dintre rata biților transmiși și distanță este de aproximativ $15 \text{ Mb} \times \text{s}^{-1} \times \text{km}$.

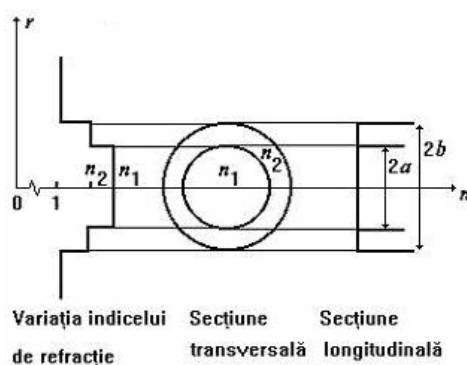


Fig. 3. 2. Fibră optică caracterizată de un indice de refracție de tip treaptă.

3.1.2. Moduri și raze în fibre optice caracterizate de un indice de refracție de tip treaptă

Propagarea luminii în fibrele optice are la bază *reflexia internă totală* a razelor la interfața miez-înveliș [3.1].

Rezolvând ecuațiile lui Maxwell:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (3.16)$$

și ținând seama de condițiile la limită dintre miez și înveliș este posibilă determinarea intensității câmpurilor electric \vec{E} și magnetic \vec{H} . Întrucât permitivitatea electrică relativă $\epsilon_r(r)$ are o variație radială simetrică în cazul fibrelor soluțiile celor două câmpuri pot fi exprimate în coordonate polare cilindrice (r, φ) sub forma:

$$\psi = \psi(r, \varphi) \exp[-i(\omega t - \beta z)] \quad (3.17)$$

în care: ψ reprezintă fie intensitatea câmpului electric fie cea a câmpului magnetic.

Soluțiile trebuie să satisfacă condițiile la limită, adică să fie finite pe axa fibrei, $\psi(0, \varphi) \neq \infty$, și să se anuleze la infinit, $\psi(\infty, \varphi) = 0$. Aceste condiții determină soluțiile proprii $\psi(r, \varphi)$, numite și *moduri*, fiecare fiind caracterizată de o anumită valoare a *constantei de propagare*, β corespunzătoare unei *pulsării* ω .

Condiția pentru operarea monomodală se scrie sub forma:

$$2a < \frac{2,405\lambda}{\pi(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \quad (3.18)$$

iar lungimea de undă de tăiere este:

$$\lambda_t = \frac{2\pi a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}}{2,405} \quad (3.19)$$

În coordonate cilindrice soluțiile ecuațiilor lui Maxwell (3.15), (3.16) pentru miezul fibrei și respectiv înveliș, ținând seama de discontinuitatea permitivității electrice relative $\epsilon_r = n^2$ în $r = a$ pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor Bessel $J_k(ur)$ și Hankel $K_k(wr)$ sub forma:

$$\psi_z = \psi_1 J_k(ur) \cos k\varphi \text{ pentru } r < a, \quad (3.20)$$

$$\psi_z = \psi_2 K_k(wr) \cos k\varphi \text{ pentru } r > a, \quad (3.21)$$

în care: $\Psi_{1,2}$ reprezintă câmpuri electrice sau magnetice constante, k este întreg, iar

$$u^2 = \beta_1^2 - \beta^2 = \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - \beta^2 \quad (3.22)$$

Pentru valori mari ale lui r , funcțiile Hankel modificate $K_k(wr)$, (cunoscute și sub numele de funcții Bessel modificate de speța a doua) scad exponențial la zero (fig. 3. 3), astfel încât dacă $r > a$ și $wr \gg 1$,

$$K_k(wr) \sim \frac{\exp(-wr)}{(wr)^{1/2}}, \quad (3.23)$$

adică intensitatea câmpurilor scade exponențial în înveliș.

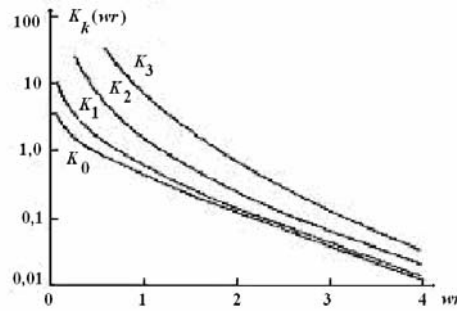


Fig. 3. 3. Graficele funcțiilor Hankel K_0, K_1, K_2, K_3 .

În relația (3.23)

$$w^2 = \beta^2 - \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 = \beta^2 - \beta_2^2, \quad (3.24)$$

iar

$$\beta_2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right) \quad (3.25)$$

reprezintă *constanta de propagare* pentru undele plane *transversal electromagnetice* (TEM, în care vectorii câmp electric și magnetic sunt reciproc perpendiculari pe direcția de propagare) din învelișul fibrei.

Funcțiile Bessel, $J_k(ur)$ sunt funcții oscilatorii de argument (ur), iar amplitudinea acestora scade, așa cum se poate vedea din figura 3. 4.

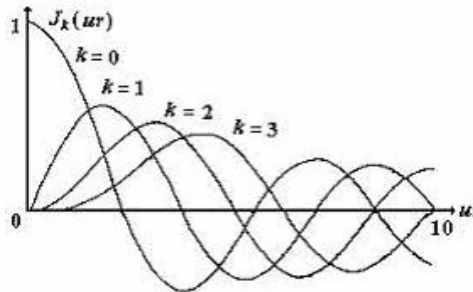


Fig. 3. 4. Graficele funcțiilor Bessel J_0, J_1, J_2, J_3 în cazul unui argument mic.

Câteva valori ale rădăcinilor de ordin m corespunzătoare funcțiilor Bessel, t_{km} , sunt prezentate în tabelul 3. 1.

Tabelul 3. 1.

$t_{01}=2,405$	$t_{11}=3,832$	$t_{21}=5,136$
$t_{02}=5,520$	$t_{12}=7,016$	$t_{22}=8,417$
$t_{03}=8,654$	$t_{13}=10,173$	$t_{23}=11,620$

Din cauza condițiilor la limită, în cazul undelor ghidate trebuie ca u și w să fie reale, iar

$$\beta_2^2 < \beta_{km}^2 < \beta_1^2 \quad (3.26)$$

De multe ori, este convenabil ca propagarea modurilor undelor în ghiduri de undă cilindrice să fie prezentată cu ajutorul unor parametri numiți *frecvență normalizată*, V și respectiv *constante de propagare normalizate*, b_{km} , definiți de relațiile:

$$V = \left(\frac{\omega}{c} \right) (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = (\beta_1^2 - \beta_2^2)^{1/2} a = (u_{km}^2 - w_{km}^2)^{1/2} a \quad (3.27)$$

$$b_{km}^2 = \frac{w_{km}^2 a^2}{V^2} = 1 - \frac{u_{km}^2 a^2}{V^2} = \frac{(\beta_{km}^2 - \beta_2^2)}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \quad (3.28)$$

Constanta de propagare ia valori cuprinse între 0 și 1, iar $a \cdot u_{km}$ și $a \cdot w_{km}$ între 0 și V .

3.1.3. Soluții pentru constanta de propagare

Egalând valorile lui $E_z(a)$ date de ecuațiile (3.20) și (3.21) se obțin ecuațiile caracteristice care trebuie satisfăcute de constanta de propagare β :

$$[f_k(ua) + g_k(wa)][f_k(ua) + (1 - 2\Delta)g_k(wa)] = k^2 h^2 \quad (3.29)$$

unde:

$$f_k(ua) = \frac{J'_k(ua)}{(ua)J_k(ua)} \quad (3.30)$$

$$g_k(wa) = \frac{K'_k(wa)}{(wa)K_k(wa)} \quad (3.31)$$

$$h^2 = \left[1 - 2\Delta \frac{(ua)^2}{V^2} \right] \frac{V^4}{(ua)^4 (wa)^4} \quad (3.32)$$

$$\Delta = \frac{(n_1^2 - n_2^2)}{2n_1^2} = \frac{(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{2\beta_1^2} \quad (3.33)$$

Indicii primi se referă la operația de derivare în raport cu argumentul,

adică: $J'_k(ua) = \frac{dJ_k(ua)}{d(ua)}$, $K'_k(wa) = \frac{dK_k(wa)}{d(wa)}$.

În cazul când $k=0$

$$\Psi_z = \Psi_1 J_0(u_{0m}r) \text{ pentru } r < a \quad (3.34)$$

$$\Psi_z = \Psi_1 K_0(w_{0m}r) \text{ pentru } r > a \quad (3.35)$$

Aceste soluții reprezintă *moduri* în care forma câmpului are o simetrie radială. Pe baza modelului razelor se poate considera că fiecare din aceste moduri definite de valorile $(0, m)$ corespunde unui set de raze meridionale care au o anumită înclinare față de axa fibrei. Există două tipuri de soluții, cele pentru care $H_z = 0$, numite și moduri *transversal magnetice* (TM_{0m}) și respectiv moduri *transversal electrice* (TE_{0m}). În figura 3. 5 a) sunt prezentate formele câmpurilor transversal electrice pentru $r < a$ (în miezul fibrei) și $k=0, m=1$, iar în figura 3. 5 b), modul având ordinul cel mai coborât.

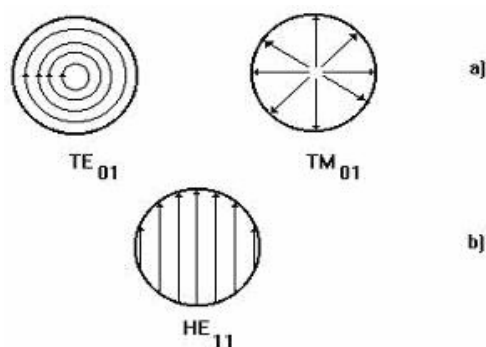


Fig. 3. 5. Secțiunile transversale ale modurilor câmpurilor transversal electrice pentru: a) $r < a$ și $k=0, m=1$, b) modul având ordinul cel mai coborât.

Când $k=0$, soluția ecuației (3.29) trebuie să îndeplinească condiția:

$$f_0(ua) = -g_0(wa) \quad (3.36)$$

sau

$$f_0(ua) = -(1 - 2\Delta)g_0(wa) \quad (3.37)$$

Soluția (3.36) corespunde modurilor TE, iar (3.37) celor TM. În cazul limită $\Delta \rightarrow 0$ aceste soluții devin degenerate, iar funcțiile Bessel se scriu sub forma:

$$f_0(ua) = -\frac{J_1(ua)}{(ua)J_0(ua)} \quad (3.38)$$

$$g_0(wa) = -\frac{K_1(wa)}{(wa)K_0(wa)} \quad (3.39)$$

În figura 3. 6 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_0(ua)$, $g_0(wa)$ și $-(1-2\Delta)g_0(wa)$ în cazul unei fibre care este caracterizată de un profil de tip treaptă al indicelui de refracție când $V=3$. În cazul când componentele câmpurilor electric și respectiv magnetic E_z și H_z sunt diferite de zero modurile se numesc *hibride*. Când câmpul axial magnetic (H_z) are o contribuție mai mare la câmpurile transversale decât câmpul electric (E_z), modurile se numesc HE_{km} , iar în caz contrar EH_{km} .

Dacă $V \rightarrow t_{0m}$, $u_{0m}a \rightarrow V$ și $w_{0m}a \rightarrow 0$ atunci $b_{0m} \rightarrow 0$ și deci $\beta \rightarrow \beta_2$. În acest caz, condiția pentru reflexie totală nu mai este îndeplinită și modul corespunzător este tăiat. La cealaltă extremă $V \rightarrow \infty$, $u_{0m}a \rightarrow t_{1m}$ și $b_{0m} = 1 - (u_{0m}a^2)/V^2 \rightarrow 1$, iar $\beta \rightarrow \beta_1$.

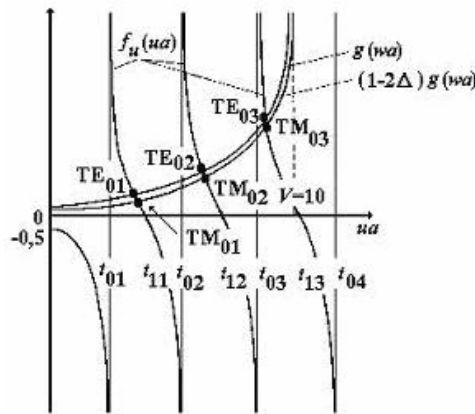


Fig. 3. 6. Reprezentarea grafică a funcțiilor $f_0(ua)$, $-g_0(wa)$ și $-(1-2\Delta)g_0(wa)$ în cazul când $V=3$.

Cel de-al doilea parametru care caracterizează un mod, m corespunde numărului de maxime ale câmpului în miezul fibrei.

Constanta de propagare corespunzătoare unui mod, β ia valori discrete și acestea sunt date de relația:

$$\beta_{km}^2 = \beta_1^2 - u_{km}^2 = w_{km}^2 + \beta_2^2 \quad (3.40)$$

Dependența constantei de propagare $\beta = \beta_{km}(\omega)$ determină vitezele de grup, $v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$, respectiv de fază $v_f = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{-1}$. Pentru fiecare mod valorile lui β_{km} sunt cuprinse între β_2 corespunzătoare tăierii (cazul undelor TEM în înveliș) și β_1 corespunzătoare frecvențelor foarte înalte (cazul undelor TEM în miezul fibrei).

Se poate considera că modurile în apropiere de tăiere sunt echivalente razelor oblice corespunzătoare unghiului critic pentru reflexia internă totală. În figura 3. 7 este prezentată dependența constantei de propagare de ω în cazul unei fibre confecționate dintr-un material dispersiv și care este caracterizată de un profil de tip treaptă al indicelui de refracție.

Așa cum se poate vedea din figura 3. 7 fenomenul de dispersie are ca efect asupra materialului distorsionarea caracteristicilor de propagare.

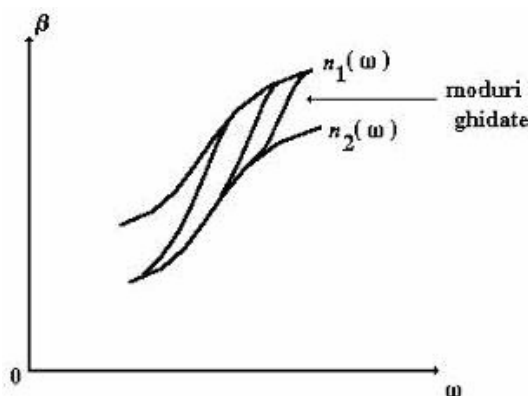


Fig. 3. 7. Dependenta $\beta = \beta_{km}(\omega)$ în cazul unei fibre caracterizate de un profil de tip treaptă al indicelui de refracție.

3.2. Propagarea luminii în ghidurile optice de undă

Dispozitivul care stă la baza opticii integrate este ghidul optic de undă, acesta îndeplinind funcția de confinare și ghidare a undelor luminoase.

Ghidul planar de tip lespede (*slab*) se obține prin suprapunerea a trei straturi dielectrice astfel încât cel aflat la mijloc are un indice de refracție (n_2) mai mare decât indicii corespunzători celorlalte două straturi, denumite substrat (n_1) și respectiv superstrat (n_3), după cum acestea sunt situate sub și respectiv deasupra ghidului optic propriu-zis de lățime d ($n_2 > n_{1,3}$) (fig. 3. 8).

În funcție de forma secțiunii transversale se pot fabrica și alte tipuri de ghiduri cum ar fi de exemplu cele de tip canal prezentate în figura 3. 9.

Ghidurile canal sunt de mai multe feluri, în funcție de poziția relativă a ghidului propriu-zis față de substrat și respectiv superstrat, și anume: general (fig. 3. 9 a)), îngropat în substrat (*buried*) (fig. 3. 9 b)), situat la suprafața

substratului și având forma unei panglici (*raised strip*) (fig. 3. 9 c)), situat la suprafața substratului și având forma unei nervuri (*rib*) (fig. 3. 9 d)), încastrat în substrat (*embedded*) (fig. 3. 9 e)), situat la suprafața substratului și având forma unei creste (*ridge*) (fig. 3. 9 f)). Lumina se propagă în astfel de structuri sub forma unor moduri (configurații stabile ale câmpului electromagnetic) caracterizate de constanta de propagare β_m , unde m este un număr întreg.

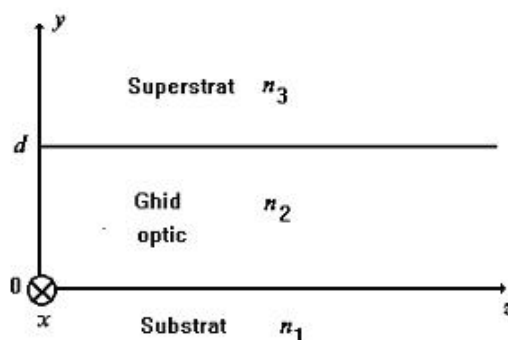


Fig. 3. 8. Structura unui ghid optic planar de tip lespede.

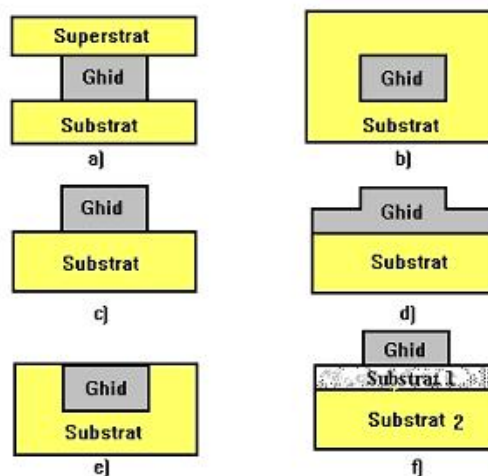


Fig. 3. 9. Tipuri de ghiduri canal: a) general, b) îngropat în substrat, c) panglică (situat la suprafața substratului), d) nervură (situat la suprafața substratului), e) încastrat în substrat, f) creastă (situat la suprafața substratului).

În optica geometrică un mod corespunde unui fascicul luminos care în afara propagării prin ghidul optic suferă o serie de reflexii totale la interfețele $1/2$ și respectiv $2/3$ ale ghidului (v. fig. 3. 8). În optica electromagnetică modul ghidat corespunde unui câmp luminos sinusoidal confinat în ghidul optic și evanescent în cele două medii vecine.

Din punct de vedere al propagării undelor luminoase un mediu infinit având *indicele de refracție* n_i este caracterizat de *vectorul de undă* \vec{k}_i , definit de relația $\vec{k}_i = \vec{k}_0 n_i$, unde $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ fiind lungimea de undă a luminii în vid.

În cazul unui ghid planar $k_2 > \beta_m > \text{Sup}(k_1, k_3)$. De multe ori superstratul este chiar aerul, astfel că $n_2 > n_1 > n_3$.

3.2.1. Ecuațiile Maxwell

Propagarea undelor luminoase în ghidurile optice poate fi descrisă în mod riguros cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell și aproximativ pe baza noțiunii de rază de lumină introdusă în optica geometrică.

În continuare se descrie fenomenul de propagare pe baza ecuațiilor lui Maxwell, care pentru medii liniare și neîncărcate se scriu sub forma:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{D} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (3.41)$$

în care: \vec{E} reprezintă intensitatea câmpului electric al undeii, \vec{H} intensitatea câmpului magnetic, \vec{D} inducția electrică și \vec{B} inducția magnetică.

Pentru a elimina inducțiile magnetică și respectiv electrică din ecuațiile (3.41) se pot folosi relațiile de material

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = [\varepsilon] \vec{E} \quad (3.42)$$

în care: μ_0 reprezintă permeabilitatea magnetică absolută a vidului, iar $[\varepsilon] = \varepsilon_0 [\varepsilon_r]$ este tensorul permitivității electrice absolute a mediului.

La interfața dintre două medii (fig. 3. 10) câmpurile trebuie să satisfacă condițiile la limită:

$$\begin{cases} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0, & (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 0, \\ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = \vec{0}, & (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.43)$$

unde \vec{n} este vectorul normal pe interfață.

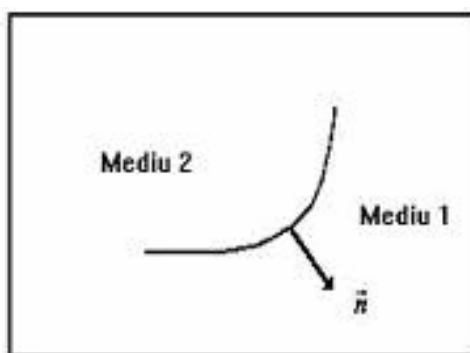


Fig. 3. 10. Interfața dintre două medii.

3.2.2. Ecuația Helmholtz

Considerând o undă monocromatică de pulsație ω și constantă de propagare β de-a lungul axei z , faza acesteia se poate scrie sub forma $\varphi = \omega t - \beta z$, iar câmpurile electric \vec{E} și magnetic \vec{H} devin:

$$\left(\vec{E}, \vec{H}\right)(x, y, z, t) = \left(\vec{E}, \vec{H}\right)(x, y, z, t) \exp(i\omega t) = \Psi(x, y) \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (3.44)$$

În relația (3.44), $\Psi(x, y) = \Psi(y)$ întrucât structura este invariantă de-a lungul axei x .

Din relațiile (3.41) și (3.42) ținând seama de (3.44) se obține:

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H} \quad (3.45)$$

$$\text{rot } \vec{H} = +i\omega[\varepsilon] \vec{E} \quad (3.46)$$

unde:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Ecuațiile (3.45), (3.46) pot fi scrise sub formă matricială astfel:

$$\begin{bmatrix} 0 & i\omega & \frac{d}{dy} & -i\omega\varepsilon_0 n^2 & 0 & 0 \\ -i\omega & 0 & 0 & 0 & -i\omega\varepsilon_0 n^2 & 0 \\ \frac{d}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega\varepsilon_0 n^2 \\ i\omega\mu_0 & 0 & 0 & 0 & i\beta & \frac{d}{dy} \\ 0 & i\omega\mu_0 & 0 & -i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega\mu_0 & \frac{d}{dy} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

Întrucât $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, acest sistem de șase ecuații cu șase necunoscute se împarte în două sisteme independente corespunzătoare celor două polarizări perpendiculare, și anume:

- soluția TM care conține componentele: H_x, E_y, E_z ,

- soluția TE care conține componentele: E_x, H_y, H_z .

În cele două cazuri, după înlocuiri se obține ecuația de undă Helmholtz sub forma:

$$\Delta_T \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (3.49)$$

în care: Δ_T este operatorul transversal Laplace,

$$k^2 = k_0^2 [n^2(y) - n_e^2], \quad (3.50)$$

$\Psi = E_x$ în cazul TE, $\Psi = H_x$ în cazul TM, iar $n_e = \frac{\beta}{k_0}$ este indicele de refracție efectiv al ghidului. Pe baza celor prezentate anterior se pot defini trei tipuri de moduri (fig. 3. 11), și anume:

- *modurile substratului* ($n_3 < n_e < n_1$). În acest caz câmpul Ψ este oscilant în mediile 1 și 2 și evanescent în superstrat. Întrucât se obține fenomenul de reflexie totală numai la interfața 2/3 lumina nu mai este confînăată în acest caz (fig. 3. 11 a));

- *modurile ghidate* ($n_1 < n_e < n_2$). Acest caz corespunde soluției când câmpul Ψ este sinusoidal în ghid și evanescent în exterior (fig. 3. 11 b));

- *modurile radiante din superstrat* ($n_e < n_3$). Câmpul Ψ este oscilant în cele trei straturi și nu poate fi deci confînăat (nu poate avea loc fenomenul de refracție (fig. 3. 11 c)).

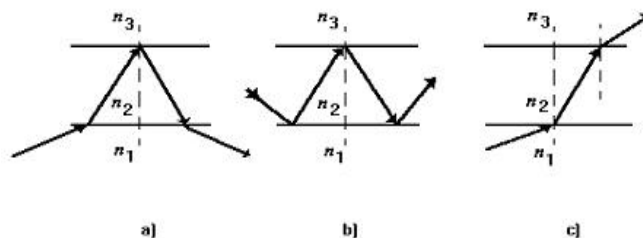


Fig. 3. 11. Reprezentarea modurilor: a) substratului, b) modurile ghidate, c) modurile radiante din superstrat.

3.2.3. Expresiile câmpurilor modurilor ghidate

Pentru starea de polarizare TE, câmpurile Ψ corespunzătoare modurilor ghidate în cele trei medii se scriu sub forma:

a) în ghid ($0 > y > d$):

$$E_x(2) = a_2 \exp(-i k_2 y) + b_2 \exp(+i k_2 y) \quad (3.51)$$

unde

$$k_2 = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_e^2} \quad (3.52)$$

iar

$$H_y(2) = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_x(2) \quad (3.53)$$

$$H_z(2) = \frac{1}{i\omega \mu_0} \frac{d}{dy} E_x(2) \quad (3.54)$$

b) în substrat ($-\infty < y < 0$):

$$E_x(1) = b_2 \exp(k_1 y) \quad (3.55)$$

unde

$$k_1 = k_0 \sqrt{n_e^2 - n_1^2}, \quad (3.56)$$

iar

$$H_{y(1)} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{x(1)} \quad (3.57)$$

$$H_{z(1)} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{d}{dy} E_{x(1)} \quad (3.58)$$

c) în superstrat ($d < y < +\infty$):

$$E_{x(3)} = a_3 \exp[-k_3(y-d)] \quad (3.59)$$

unde

$$k_3 = k_0 \sqrt{n_e^2 - n_3^2} \quad (3.60)$$

iar

$$H_{y(3)} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{x(3)} \quad (3.61)$$

$$H_{z(3)} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{d}{dy} E_{x(3)} \quad (3.62)$$

În cazul particular al ghidării luminii la interfața dielectric (n_d)/metal (ϵ_m), posibilă numai în polarizarea TM se obține:

$$H_{x(\text{dielectric})} = A_d \exp(-k_d y) \quad (3.63)$$

unde

$$k_d = k_0 \sqrt{n_e^2 - n_d^2} \quad (3.64)$$

și

$$H_{x(\text{metal})} = A_m \exp(k_m y) \quad (3.65)$$

cu

$$k_m = k_0 \sqrt{n_e^2 - \epsilon_m} \quad (3.66)$$

În acest caz indicele de refracție efectiv este dat de o expresie de forma:

$$n_e = n_d \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m}} \quad (3.67)$$

unde

$$\epsilon_m = \epsilon (\text{metal}) < 0. \quad (3.68)$$

3.2.4. Ecuația dispersiei unui mod ghidat

Ecuația dispersiei în cazul unui ghid planar se poate obține cu ajutorul condițiilor la limită (3.43) scrise în cazul structurii prezentate în figura 3. 11. Astfel, se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \Psi_1(y=0) = \Psi_2(y=0) \\ \Psi_d(y=d) = \Psi_3(y=d) \\ \sigma_1 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \sigma_2 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \sigma_2 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=d} = \sigma_3 \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \right)_{y=d} \end{cases} \quad (3.69)$$

unde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ pentru cazul polarizării TE și $\sigma_l = \frac{1}{\varepsilon_l}$, $l = 1, 2, 3$ pentru cazul polarizării TM.

Înlocuind câmpul Ψ cu expresia dată în cazul polarizării TE, prezentată anterior, rezultă un sistem de ecuații a cărui soluție netrivială se obține punând condiția ca determinantul matricei să fie nul. În final se obține ecuația dispersiei sub forma:

$$k_2 d = \arctg f_{21} \cdot \frac{k_1}{k_2} + \arctg f_{23} \cdot \frac{k_3}{k_2} + m\pi \quad (3.70)$$

unde

$$f_{21} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, f_{23} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \quad (3.71)$$

Rezolvarea ecuației dispersiei se poate face numai numeric sau grafic prin metodele clasice de aflare a zerourilor. Indicii efectivii corespunzători unei structuri date constituie un ansamblu discret de valori determinate de parametrul m .

Plecând de la ecuația dispersiei se pot defini:

a) *lungimea de undă de tăiere* pentru un mod de ordinul m :

$$\lambda_{(\text{cm})} = \frac{2\pi d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{m\pi + \arctg \left(f_{23} \cdot \sqrt{\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}} \right)} \quad (3.72)$$

Dacă $m = 0$ și $n_1 = n_3$ rezultă că $\lambda_{(\text{cm})}$ tinde la infinit, acesta fiind cazul unui ghid simetric ;

b) *grosimea efectivă a ghidului*, corespunzătoare adâncimii de pătrundere a câmpului în substrat și respectiv în superstrat:

$$d_c = d + \delta_1 + \delta_3 \quad (3.73)$$

unde

$$\delta_1 = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{n_e^2 - n_1^2}} \quad (3.74)$$

și

$$\delta_3 = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{n_e^2 - n_3^2}} \quad (3.75)$$

3.2.5. Metoda indicilor efectivi

Pentru determinarea distribuției modale a câmpului electromagnetic trebuie cunoscut profilul indicelui de refracție.

În general rezolvarea ecuației de propagare se face utilizând metode numerice. Există însă cazuri particulare când cunoașterea profilului indicelui de refracție permite obținerea unor soluții analitice ale ecuației de propagare [3.1]-[3.4]. Astfel, dacă profilul indicelui de refracție este de tip parabolic soluția ecuației de propagare este dată de un produs al polinoamelor Hermite și o funcție de tip Gauss, iar dacă profilul este de formă exponențială câmpul este un produs dintre o funcție Bessel de ordinul p și o exponențială de ordinul întâi.

Una dintre metodele cel mai des utilizate pentru rezolvarea ecuației Helmholtz (3.49) în cazul unui ghid optic de undă de tip canal de formă rectangulară cu salt de indice prezentat schematic în figura 3. 12 este *metoda indicilor efectivi* care permite determinarea constantelor de propagare și a configurației modurilor [3.4].

Formalismul matematic în cazul general. Pentru determinarea distribuției modale a câmpului electric $E(x, y)$ din ecuația Helmholtz:

$$\Delta_T E + k_0^2 [n^2(x, y) - n_e^2] E = 0 \quad (3.76)$$

acesta se scrie ca un produs de forma:

$$E(x, y) = E_1(x)E_2(x, y) \quad (3.77)$$

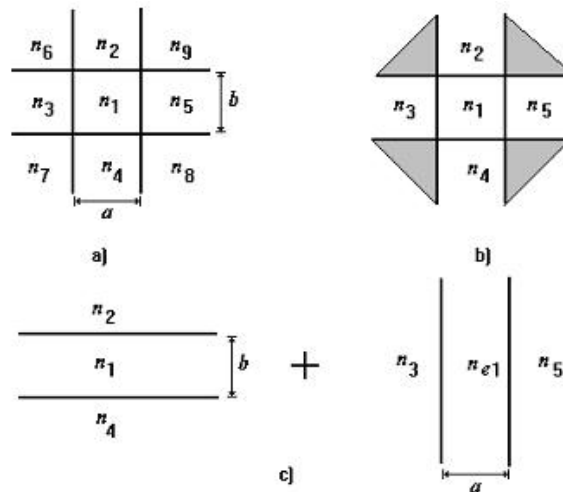


Fig. 3. 12. Secțiune printr-un ghid optic de undă de tip canal de formă rectangulară cu salt de indice.

În urma înlocuirii relației (3.77) în ecuația (3.76) se obține:

$$E_2 \frac{d^2 E_1}{dx^2} + 2 \frac{\partial E_2}{\partial x} \frac{dE_1}{dx} + E_1 \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} \right) + k_0^2 [n^2(x, y) - n_e^2] E_1 E_2 = 0. \quad (3.78)$$

Pentru rezolvarea ecuației (3.78) se consideră că variația câmpului $E_2(x, y)$ în raport cu variabila x este lentă, deci variațiile rapide ale câmpului total în x sunt conținute numai în expresia lui $E_1(x)$. În aceste condiții termenii $\frac{\partial E_2}{\partial x}$ și

$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}$ se pot neglija, iar ecuația (3.78) devine:

$$E_2 \frac{d^2 E_1}{dx^2} + E_1 \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + k_0^2 [n^2(x, y) - n_e^2] E_1 E_2 = 0. \quad (3.79)$$

Considerând un profil al indicelui efectiv $n_e(x)$ astfel încât:

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + k_0^2 [n^2(x, y) - n_e^2] E_2 = 0 \quad (3.80)$$

câmpul $E_1(x)$ verifică ecuația:

$$\frac{d^2 E_1}{dx^2} + k_0^2 [n_e^2(x) - n_e^2] E_1 = 0. \quad (3.81)$$

Definit în acest mod, $n_e(x_i)$ reprezintă indicele efectiv al unui ghid ale cărui profil de indice $n(x_i, y)$ și respectiv ecuație de undă (3.80) sunt fixe în fiecare punct $x = x_i$. Rezolvarea ecuației (3.80) pentru fiecare valoare a lui x permite determinarea profilului indicelui $n_e(x)$ și apoi cu ajutorul acestuia se poate trece la rezolvarea ecuației (3.81). Astfel, în cazul ghidurilor planare se poate înlocui ecuația diferențială de propagare bidimensională, a cărei rezolvare este mai dificilă, cu două ecuații diferențiale liniare care se pot rezolva mai simplu.

Ghid optic de formă dreptunghiulară cu salt de indice. În acest caz se poate neglija acțiunea zonelor 6, 7, 8 și 9 asupra formei câmpului electromagnetic care oscilează în zona având indicele de valoare mare și este evanescent în celelalte zone. Cu această ipoteză structura din figura 3.12 a) poate fi înlocuită cu cea din figura 3.12 b), care, la rândul său, poate fi descompusă în două substructuri de forma celor prezentate în fig. 3.12 c). Substructurii din partea stângă a figurii 3.12 c) i se asociază ecuația (3.80) cu $n_e(x) = n_{e1}$ pentru orice x fixat, iar celei din partea dreaptă i se asociază ecuația (3.81) cu $n_e(x) = n_{e1}$ calculat precedent. În cazul substructurii din partea stânga (fig. 3.12 c)) ecuația de dispersie se scrie sub forma:

$$k_1 b = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{k_4}{k_1}\right) + m\pi \quad (3.82)$$

pentru modurile a căror direcție de polarizare este paralelă cu axa x și

$$k_1 b = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{k_2}{k_1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{n_4^2}{n_1^2} \frac{k_4}{k_1}\right) + m\pi \quad (3.83)$$

pentru modurile polarizate paralel cu axa y .

Pentru substructura din dreapta fig. 3.12c ecuația de dispersie este:

$$k_{e1} a = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_3^2}{n_{e1}^2} \frac{k_3}{k_{e1}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{n_5^2}{n_{e1}^2} \frac{k_5}{k_{e1}}\right) + n\pi \quad (3.84)$$

pentru modurile care sunt polarizate paralel cu axa x și

$$k_{e1} a = \operatorname{arctg}(k_3 / k_{e1}) + \operatorname{arctg}(k_5 / k_{e1}) + n\pi \quad (3.85)$$

pentru cele polarizate paralel cu axa y . În relațiile (3.84), (3.85):

$$k_{e1} = k_0 \left[n_{e1}^2 - n_e^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.86)$$

În cazul câmpurilor $E_{11}^x, E_{11}^y, E_{12}^x, E_{12}^y$, care se propagă într-un ghid de formă pătratică cu latura $2a$ curbele de dispersie sunt prezentate în figura 3.13 [3.4].

Pentru frecvențe situate în apropierea celor de tăiere rezultatele obținute prin metoda indicilor efectivi diferă foarte mult de cele obținute prin metode numerice. În funcție de forma secțiunii transversale a ghidurilor și de poziția acestora față de substrat se utilizează și alte metode de rezolvare a ecuației undelor [3.4].

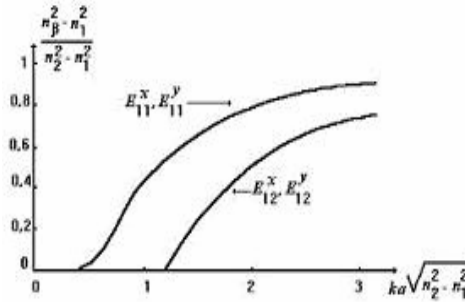


Fig. 3.13. Curbele de dispersie pentru câmpurile $E_{11}^x, E_{11}^y, E_{12}^x, E_{12}^y$ dintr-un ghid optic de undă având formă pătratică cu latura $2a$.

3.2.6. Metoda propagării fascicului

În cazul general metoda propagării fascicului, *Beam Propagation Method-BPM* este o metodă de simulare pas cu pas a propagării luminii printr-un ghid optic de undă pe distanțe mult mai mari decât lungimea de undă. Pe baza

acestei metode (introdusă la începutul anilor 1970) se poate obține o soluție numerică a ecuației Helmholtz (3.49). Metoda BPM permite simularea numerică simultană a distribuției câmpului undelor luminoase precum și a undelor ghidate atât în fibre optice cât și în ghiduri optice de undă.

Există mai multe variante ale metodei BPM: *metoda transformatei Fourier rapidă (fast Fourier transform-FFT-BPM)*, *metoda diferențelor finite (finite difference-FD-BPM)* și *metoda elementului finit (finite element-FE-BPM)*. considerând că modurile evanescente scad foarte rapid cu distanța de propagare, z , (planul xOy fiind perpendicular pe direcția de propagare, z), iar pentru intensitatea câmpului o soluție de formă armonică [3.8], [3.9]:

$$E(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-i\omega t) . \quad (3.87)$$

Dependența spațială a câmpului în oricare din cele două polarizări TE sau TM este dată de relația:

$$\psi(x, y) = A(x, y) \exp(-ik_0 n_e y) \quad (3.88)$$

în care: amplitudinea $A(x, y)$ este lent variabilă putându-se considera că $\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial y^2} = 0$.

Precizia metodei BPM poate fi îmbunătățită ținând seama de conservarea energiei. Introducând soluția (3.88) în ecuația Helmholtz (3.49), rezultă:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 (n^2 - n_e^2) \right] A(x, y) = \pm 2ik_0 n_e \frac{\partial A(x, y)}{\partial z} . \quad (3.89)$$

Ecuația (3.89) este în continuare discretizată utilizând diferite metode (cum ar fi de exemplu algoritmul Crank-Nicholson în care câmpul care se propagă nu este divergent pe distanța de propagare a fasciculului [3.8]), iar în final în urma mai multor iterații se poate evalua evoluția câmpului de-a lungul direcției de propagare atât în cazul bidimensional (2D) cât și în cel tridimensional (3D).

În cazul unui ghid optic de undă caracterizat de un indice de refracție 3,30, cel al învelișului fiind 3,27, profilul acestuia de-a lungul direcției de propagare este prezentat în figura 3. 14.

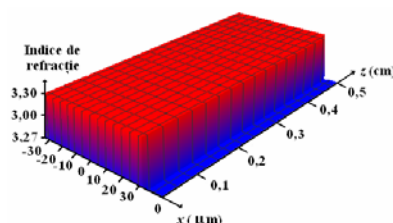


Fig. 3. 14. Profilul indicelui de refracție.

În figura 3. 15 este prezentată o secțiune prin profilul intensității amplitudinii câmpului electric, $A(x, y)$ calculat pe baza metodei FFT-BPM la distanța de 0, 5 cm față de intrarea în ghid în cazul unei radiații având lungimea de undă $1,53 \mu\text{m}$ (cazul bidimensional).

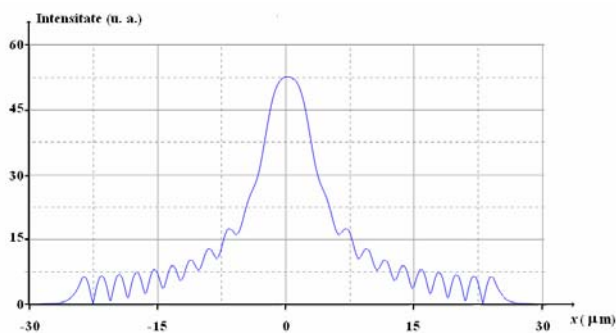


Fig. 3. 15. Secțiune prin profilul intensității amplitudinii câmpului electric.

Simularea propagării câmpului electric în ghidul descris anterior pe baza metodei FFT-BPM este prezentată în figura 3. 16.

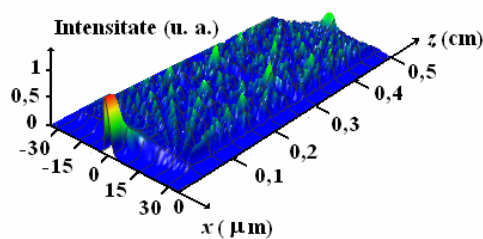


Fig. 3. 16. Evoluția intensității amplitudinii câmpului electric.

Metodele amintite pot fi utilizate la proiectarea mai multor circuite optoelectronice integrate.