

## 10. Interacția radiației cu substanța

### 10.1. Matricea densitate

Starea unei particule cuantice poate fi descrisă cu ajutorul vectorului de stare  $|\psi\rangle$ . În studiul sistemelor cuantice intervin în cazul general pe lângă *stările pure* și *stări mixte* sau *amestecuri de stări*. Stările mixte implică absența posibilității unor măsurări maximale asupra sistemelor cuantice, astfel că informația noastră asupra acestora este incompletă [10.1]-[10.4].

Dacă se consideră un ansamblu de  $N$  sisteme cuantice ( $N \rightarrow \infty$ ) ale căror stări pure  $|\psi_k\rangle$  nu sunt cunoscute cu precizie, singura informație posibilă despre un anumit sistem este *probabilitatea*,  $p_k$  de a fi în starea pură

$|\psi_k\rangle$ ,  $\left(p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1\right)$ . Ca urmare, pentru sistemul studiat se definește o

stare mixtă, care se poate reprezenta printr-o superpoziție necoerentă de stări pure, astfel că valoarea medie a unui operator se obține printr-o medie statistică în sens clasic

$$\langle \hat{Q} \rangle = \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle \quad (10.1)$$

probabilitățile  $p_k$  fiind determinate, de asemenea, prin măsurări efectuate asupra sistemului.

#### 10.1.1. Formalismul matricei densitate

*Formalismul matricei densitate* a fost propus de J. von Neumann și permite tratarea atât a stărilor pure cât și a celor mixte. Introducerea *operatorului densitate* se poate face scriind expresia (10.1) a valorii medii a unui operator  $\hat{Q}$  cu ajutorul operatorului identitate

$$\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = \hat{I} \quad (10.2)$$

astfel

$$\langle \hat{Q} \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | \hat{Q} | u_k \rangle \langle u_k | \psi_n \rangle = \sum_k \langle u_k | \hat{\rho} \hat{Q} | u_k \rangle \quad (10.3)$$

unde prin definiție

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \quad (10.4)$$

reprezintă operatorul densitate. Valoarea medie calculată cu ajutorul relației (10.3) poate fi scrisă și sub forma

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Urm}(\hat{\rho} \hat{Q}), \quad (10.5)$$

aceasta reprezentând o altă definiție echivalentă a operatorului densitate. În cazul unei stări pure operatorul densitate degenerază într-un operator de proiecție.

Operatorul densitate are câteva proprietăți mai importante. Astfel, operatorul  $\hat{\rho}$  este hermitic

$$\langle \psi_1 | \hat{\rho} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{\rho} | \psi_1 \rangle^* \quad (10.6)$$

și este normat la unitate,

$$\text{Urm}(\hat{\rho}) = 1. \quad (10.7)$$

Dacă este satisfăcută relația

$$\text{Urm}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (10.8)$$

starea este pură. În ultimul caz  $(\hat{\rho}^2)_{nm} = \rho_{mn}$ ; matricea densitate pentru starea pură este diagonală având o singură valoare proprie egală cu unitatea, celelalte fiind nule; elementele diagonale ale matricei densitate  $\hat{\rho}$  reprezintă probabilitățile ca un sistem din ansamblu să fie caracterizat de stările proprii  $|u_n\rangle$  întrucât  $\hat{\rho}$  este atât un înlocuitor al vectorilor de stare cât și observabilă (este hermitic, pozitiv definit, având urma finită), schimbarea reprezentării se face după regula cunoscută

$$\hat{\rho}' = \hat{U}^{-1} \hat{\rho} \hat{U} \quad (10.9)$$

unde  $\hat{U}$  este un operator unitar. Dacă se consideră un amestec de stări  $| \psi_n \rangle$  având ponderile  $p_n$  care caracterizează starea dinamică a sistemului la momentul  $t_0$  și care evoluează în timp, înseamnă că la momentul  $t > t_0$  sistemul este descris de vectorii de stare  $| \psi_n \rangle_t$ , cu aceleași ponderi statistice  $p_n$  ca și la momentul  $t_0$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_t &= \sum_n | \psi_n \rangle_t p_n \langle \psi_n |_t = \sum_n \hat{T}(t, t_0) | \psi_n \rangle_0 p_n \langle \psi_n |_0 \hat{T}^+(t, t_0) = \\ &= \hat{T}(t, t_0) \hat{\rho}_0 \hat{T}^+(t, t_0) \end{aligned} \quad (10.10)$$

unde  $\hat{T}(t, t_0)$  este operatorul unitar de evoluție.

### 10.1.2. Ecuația de mișcare pentru operatorul densitate

Expresia operatorului unitar de evoluție este următoarea:

$$\hat{T}(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right] \quad (10.11)$$

unde  $\hat{H}$  reprezintă hamiltonianul sistemului.

Ținând seama de evoluția în timp a operatorilor  $\hat{T}(t, t_0)$  și  $\hat{T}^+(t, t_0)$ , rezultă ecuația Schrödinger pentru operatorul densitate:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (10.12)$$

care formal se identifică, până la semnul comutatorului, cu ecuația Heisenberg pentru operatori.

## 10.2. Ecuațiile generale de mișcare pentru tranzițiile de dipol electric

Ecuația de mișcare pentru un operator cuantic,  $\hat{Q}$  este de forma:

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{Q}]. \quad (10.13)$$

Pe baza celor prezentate mai sus în cazul când operatorii  $\hat{Q}$  nu sunt funcții explicite de timp ecuația de mișcare a valorii medii a unui operator este

$$\langle \dot{\hat{Q}} \rangle = \text{Urm}(\dot{\hat{\rho}} \hat{Q}). \quad (10.14)$$

### 10.2.1. Ecuațiile de mișcare pentru operatori

Ținând cont de relația (10.112) ecuația de mișcare pentru elementele de matrice ale operatorului densitate în cazul prezenței unei perturbații a mediului atomic se poate scrie sub forma:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = (E_m - E_n) \rho_{mn} + [\hat{W}, \hat{\rho}]_{mn}. \quad (10.15)$$

În cazul când în expresia perturbației  $\hat{W}(t)$  se consideră și interacțiile interne,  $\hat{W}_i(t)$  (dintre atomi și rețea, ciocnirile dintre atomi, molecule etc.), astfel încât

$$\hat{W}(t) = \hat{W}_i(t) + \hat{W}_e(t), \quad (10.16)$$

ecuația (10.115) conține termeni de relaxare corespunzători proceselor de interacție internă, care determină modificări ale elementelor de matrice diagonale  $\rho_{mn}$  și în absența perturbației exterioare, iar aceasta devine:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = (E_m - E_n) \rho_{mn} + [\hat{W}_e, \hat{\rho}]_{mn} + [\hat{W}_i, \hat{\rho}]_{mn}. \quad (10.17)$$

Considerând că la  $t = 0$  sistemul se află în starea inițială  $|u_i\rangle$ , elementele de matrice diagonale,  $\rho_{mn}$  încep să scadă exponențial în timp în absența perturbației exterioare, astfel încât ultimul termen în ecuația (10.117) este un termen de relaxare (aproximația Wigner–Weisskopf).

Întrucât la echilibru termic  $\rho_{mn} = 0$  pentru  $m \neq n$ ,  $W_i(t)$  modifică elementele de matrice nediagonale  $\rho_{mn}$  conform ecuației:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = \hbar \omega_{mn} \rho_{mn} + [\hat{W}_e, \hat{\rho}]_{mn} - \frac{i\hbar}{\tau_{mn}} \rho_{mn}, \quad (10.18)$$

unde  $\tau_{mn} = \tau_{nm}$ , operatorul  $\hat{\rho}$  fiind hermitic. Constanta  $\tau_{mn}$  se notează, în continuare, cu  $T_2$  și se numește  *timp de relaxare transversal*  sau timp de relaxare  *spin–spin* . Aceasta constantă este corelată cu lărgimea de bandă a tranziției și constituie astfel o măsură a timpului de coerență.

Elementele diagonale ale operatorului  $\hat{\rho}$  satisfac ecuația:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = [\hat{W}_e, \hat{\rho}]_{mn} + i\hbar \sum_n (\rho_{nn} w_{nm} - \rho_{mm} w_{mn}) \quad (10.19)$$

unde termenii de forma  $-\rho_{mm} w_{mn}$  și  $\rho_{nn} w_{nm}$  reprezintă *ratele de tranziție* care determină scăderea respectiv creșterea probabilității de ocupare a stării  $|m\rangle$ , astfel că la echilibru:

$$\rho_{mm}^e w_{mn} = \rho_{nn}^e w_{nm} \quad (10.20)$$

Definind constantele de timp

$$T_{mn} = \frac{\rho_{nn}^e}{w_{mn}} \quad (10.21)$$

și introducând notația  $T_{mn} = T_1$ , ecuația (10.19) devine:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = [W_e, \rho]_{mn} + \frac{i\hbar}{T_1} \sum_n (\rho_{mm} e - \rho_{mm}). \quad (10.22)$$

Întrucât pentru  $W_e = 0$ , sistemul se relaxează cu constanta de timp  $T_1$ , aceasta este numită  *timp de relaxare longitudinal*  sau  *spin–rețea* . Principalele procese care determină constanta de timp  $T_1$  sunt emisia spontană, interacția cu rețeaua și ciocnirile inelastice;  $T_2$  fiind cauzată în plus de ciocnirile elastice, rezultă că în general  $T_2 \leq T_1$ . (Constantele de relaxare  $T_1$  și  $T_2$  intervin în mod analog și pentru caracterizarea interacțiilor sistemelor cu spin de unde și denumirile menționate mai sus).

Dacă se evaluează derivata valorii medii a unui operator  $\hat{Q}$ , care nu depinde explicit de timp, ținându-se seama de ecuațiile (10.5), (10.14), (10.15), (10.19) și (10.22) se obține:

$$\langle \dot{\hat{Q}} \rangle + \frac{\langle \hat{Q} \rangle}{T_2} - \frac{\langle \hat{Q} \rangle^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{Q}, \hat{H}] \rangle + \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \sum_n \rho_{nn} Q_{nn}. \quad (10.23)$$

Această ecuație prezintă un interes particular în cazurile în care: a) toate elementele diagonale ale lui  $\hat{Q}$  sunt nule; b) numai elementele diagonale ale lui  $\hat{Q}$  sunt nenule.

### 10.2.2. Ecuația de mișcare pentru polarizare

Se consideră un sistem atomic sau molecular, caracterizat de stările proprii  $|n_1\rangle$  și  $|n_2\rangle$  având parități opuse, astfel că sunt posibile tranziții de dipol electric între aceste stări.

Hamiltonianul care determină tranzițiile de dipol electric în urma interacției sistemului atomic sau molecular cu câmpul electric este dat de relația:

$$\hat{W}^{DE} = -\hat{d}\vec{E} = -\sum_{i=1}^3 \hat{d}_i \vec{E}_i. \quad (10.24)$$

Ținând seama de forma nediagonală a matricei asociate operatorului dipol electric

$$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} 0 & \hat{d}_i \\ \hat{d}_i^* & 0 \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

determinată de paritățile opuse ale funcțiilor proprii nedegenerate ale sistemului cu două nivele considerat, hamiltonianul de interacție  $\hat{W}^{DE}$  se scrie sub forma:

$$\hat{W}^{DE} = \begin{bmatrix} 0 & -\sum \hat{d}_i E_i \\ -\sum \hat{d}_i^* E_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.26)$$

În cazul tranzițiilor de dipol, valoare medie a observabilei moment de dipol electric, se poate scrie sub forma:

$$\langle \hat{d}_i \rangle = \text{Urm}[\hat{\rho}, \hat{d}_i]. \quad (10.27)$$

Considerând că numărul de atomi sau molecule pe unitatea de volum a mediului este:

$$N = \frac{N_0}{V} \quad (10.28)$$

polarizarea macroscopică a mediului se obține însumând contribuțiile fiecărui dipol atomic sau molecular și mediind peste toate moleculele, astfel încât se poate scrie:

$$P_i = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N_0} \langle d_i \rangle^k = N \langle \tilde{d}_i \rangle. \quad (10.29)$$

Medierea peste toate moleculele, specificată prin linia ondulată, este necesară deoarece orientările moleculelor sunt diferite. Ecuația de mișcare pentru polarizarea macroscopică se poate obține dacă se stabilește în prealabil ecuația de mișcare pentru operatorul moment de dipol electric. Întrucât, conform relației (10.25), toate elementele diagonale ale matricei asociate acestui operator sunt nule, ecuația derivatei temporale a valorii medii a operatorului  $\hat{d}$  se obține, ținându-se seama de ecuația (10.23) sub forma:

$$\langle \dot{\hat{d}}_i \rangle + \frac{\langle \hat{d}_i \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{d}_i, \hat{H}] \rangle \quad (10.30)$$

unde  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ .

Ecuația de mișcare pentru observabila moment electric de dipol se obține considerând derivata a doua în raport cu timpul a ecuației (10.30):

$$\langle \ddot{\hat{d}}_i \rangle + \frac{\langle \dot{\hat{d}}_i \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \langle [[\hat{d}_i, \hat{H}]] \rangle \quad (10.31)$$

și înlocuind în membrul drept pe  $\langle \dot{\hat{d}}_i \rangle$  conform ecuației (10.23), rezultă:

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\hat{d}}_i \rangle + \frac{2}{T_2} \langle \dot{\hat{d}}_i \rangle + \frac{1}{T_2^2} \langle \hat{d}_i \rangle = & -\frac{1}{\hbar^2} \langle [[[\hat{d}_i, \hat{H}], \hat{H}]] \rangle + \\ & + \frac{1}{i\hbar} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \sum_i \rho_{ii} [\hat{d}_i, \hat{W}]_{ii}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Pentru cazurile de interes  $[\hat{d}_i, \hat{W}] = 0$ . Întrucât comutatorul interior din membrul drept are expresia:

$$[\hat{d}_i, \hat{H}] = [\hat{d}_i, \hat{H}_0] = \hbar\Omega \begin{bmatrix} 0 & d_i \\ -d_i^* & 0 \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

unde  $\Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$  este frecvența de tranziție și introducându-se matricea diagonală:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

astfel încât

$$\langle \hat{D} \rangle = \text{Urm}[\hat{\rho}, \hat{D}] = \rho_{11} - \rho_{22} \quad (10.35)$$

reprezintă diferența probabilităților de ocupare a stărilor proprii cu energiile  $E_1$  și  $E_2$ , se obține:

$$\left[ \hat{d}_i, H \right], \hat{H} = \hbar^2 \Omega^2 d_i - 2\hbar \Omega d_i d_j^* E_j D \quad (10.36)$$

Ținând seama de relațiile (10.33)-(10.36) ecuația de mișcare (10.32) pentru operatorul  $\hat{d}$  capătă forma:

$$\left\langle \ddot{\hat{d}}_i \right\rangle + \frac{2}{T^2} \left\langle \dot{\hat{d}}_i \right\rangle + \Omega^2 \left\langle \hat{d}_i \right\rangle = \frac{2\Omega}{\hbar} (d_i d_j^*) (\rho_{11} - \rho_{22}) E_j^{loc}. \quad (10.37)$$

În scrierea ecuației (10.37) s-a neglijat termenul  $\frac{\langle \hat{d}_i \rangle}{T_2^2}$  datorită condiției

$\Omega^2 \gg \frac{1}{T_2^2}$ ; de asemenea prin  $E_j^{loc}$  (sau  $E'_j$ ) se înțelege câmpul local văzut de o moleculă, care este diferit de câmpul macroscopic, datorită polarizării locale a substanței.

### 10.2.3. Ecuația de mișcare pentru observabila polarizare

Această ecuație se obține însumând și mediind ecuația (10.37) peste toate orientările posibile și pentru toate moleculele din unitatea de volum conform relației (10.29). Rezultă:

$$\ddot{\tilde{P}}_i + \frac{2}{T_2} \dot{\tilde{P}}_i + \Omega^2 \tilde{P}_i = \frac{2\Omega}{\hbar} (d_i d_j^*) (N_1 - N_2) E_j^{loc}. \quad (10.38)$$

În relația (10.38) s-a notat cu  $N_1 - N_2$  diferența de populație pe unitatea de volum.

$$N_1 - N_2 = N(\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (10.39)$$

considerându-se că diferența  $\rho_{11} - \rho_{22}$  este aproximativ constantă pentru toate moleculele, indiferent de orientare, iar media orientatională a produsului este egală cu produsul mediilor.

Pe de altă parte, într-un gaz izotrop format din molecule anizotrope, cum este mediul considerat în cazul de față,  $(\tilde{d}_i d_j^*) = 0$  pentru  $i \neq j$ , deoarece momentul electric de dipol indus trebuie să fie orientat în direcția câmpului aplicat astfel că ținând seama de echivalența direcțiilor  $x$ ,  $y$  și  $z$ , se poate scrie:

$$\left| \tilde{d}_{12} \right|^2 = \left| \tilde{d}_x \right|^2 + \left| \tilde{d}_y \right|^2 + \left| \tilde{d}_z \right|^2 = 3 \left| \tilde{d}_x \right|^2. \quad (10.40)$$

Ținând cont de relațiile (10.39) și (10.40) ecuația pentru observabila polarizare în medii cuantificate, (10.38) are forma:

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{2}{T_2} \dot{\vec{P}} + \Omega^2 \vec{P} = \frac{2\Omega}{\hbar} \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \vec{E}'. \quad (10.41)$$

Din relația (10.41) se observă că polarizarea mediului acționează ca un oscilator armonic având frecvența  $\Omega$ , care, în lipsa câmpului, se relaxează cu constanta de timp  $T_2$ , ca urmare a defazării interne a dipolilor individuali prin interacție mutuală. Acestui oscilator i se furnizează energie prin intermediul câmpului electric. Coeficientul de cuplaj dintre câmp și polarizare este proporțional cu diferența de populație  $(N_1 - N_2)$ , astfel că atunci când  $N_1 - N_2 \rightarrow 0$ , cuplajul dintre câmp și polarizare dispare, obținându-se transparența substanței în raport cu câmpul, caracteristică fenomenelor de saturație.

#### 10.2.4. Ecuația de mișcare pentru populații

Cu ajutorul relației (10.39) s-a definit *diferența de populație pe unitatea de volum*, care constituie o altă observabilă de importanță deosebită în studiul interacției câmp-materie. Într-adevăr, diferența de populație determină atât tăria cuplajului câmp-polarizare după cum s-a arătat anterior, cât și cantitatea de energie înmagazinată în mediul cunatificat. *Ecuația de mișcare pentru diferența de populație* se obține scriind ecuația (10.23) pentru operatorul  $\hat{D}$  având matricea diagonală (10.34) sub forma:

$$\langle \dot{\hat{D}} \rangle + \frac{\langle \hat{D} \rangle - \langle \hat{D} \rangle^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{D}, \hat{H}] \rangle \quad (10.42)$$

sau echivalent

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{D}, \hat{H}] \rangle. \quad (10.43)$$

Întrucât

$$[\hat{D}, \hat{H}] = [\hat{D}, \hat{W}] = -2E_i \begin{bmatrix} 0 & \hat{d}_i \\ -\hat{d}_i^* & 0 \end{bmatrix} \quad (10.44)$$

ținându-se seama de (10.33) se poate scrie:

$$[\hat{D}, \hat{H}] = -\frac{2E_i [\hat{d}_i, \hat{H}]}{\hbar\Omega}. \quad (10.45)$$

Din ecuația (10.30), cu condiția  $\Omega T_2 \gg 1$ , se obține:

$$\langle \dot{\hat{P}}_i \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{P}_i, \hat{H}] \rangle, \quad (10.46)$$

astfel încât ținându-se seama de (10.39), ecuația (10.43) devine:



$$\frac{\partial}{\partial t}(N_1 - N_2) + \frac{(N_1 - N_2) - (N_1 - N_2)^e}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\Omega} \dot{P}_i E'_i. \quad (10.47)$$

Ecuția (10.47) este fundamentală pentru diferența de populație în mediile cuantificate. Se observă că modificările în energia înmagazinată pe unitatea de volum:

$$\rho_E = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\hbar\Omega}{2} (N_1 - N_2) \right] \quad (10.48)$$

sunt determinate de termenul  $\vec{P} \cdot \vec{E}$  care reprezintă energia cedată de câmp mediului ce se polarizează. În absența câmpului, diferența de populație tinde către o valoare de echilibru cu constanta de timp  $T_1$  de relaxare longitudinală, energia fiind cedată termostatului atomic.

### 10.2.5. Ecuațiile de mișcare pentru câmp

În cazul unui mediu polarizabil, izotrop, neîncărcat *ecuațiile de câmp* se obțin utilizându-se ecuațiile Maxwell în care se ține seama că polarizarea totală  $\vec{P}^{tot}$  a mediului este determinată atât de polarizarea  $\vec{P}'$  corelată cu tranziția care interesează numită *sursă*, cât și de alte tranziții care au loc în mediu astfel încât se poate scrie.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}^{tot} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}' \quad (10.49)$$

unde efectul altor tranziții este luat în considerare prin înlocuirea  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$ . Înlocuind expresia (10.49) a inducției în ecuațiile lui Maxwell se obține următoarea ecuație diferențială de propagare:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{n}{c} \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}'}{\partial t^2} \quad (10.50)$$

unde  $n$  reprezintă indicele de refracție relativ al mediului, iar  $\gamma = \mu_0 \sigma c / n$  este coeficientul de atenuare. Câmpul electromagnetic progresiv este descris cu ajutorul modelului undelor plane conform descompunerii:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \frac{\vec{E}_0^{\alpha}}{2} e^{i(\omega_{\alpha} t - \vec{k}_{\alpha} \vec{r})} + c.c. \quad (10.51)$$

unde  $\alpha$  este un indice de însumare.

În cazul laserelor, însă, prezintă un interes deosebit câmpul electromagnetic închis într-o cavitate rezonantă, astfel că pentru descrierea acestuia se utilizează modelul *modurilor normale Slater de oscilație ale cavității*.

Considerând o cavitate cu pereții perfect conducători, în interiorul cavității fiind situat un mediu dielectric având permitivitatea  $\varepsilon$  și ținându-se seama de condițiile la limită ( $E_t = 0$  și  $B_n = 0$  pe suprafață), câmpul din cavitate admite dezvoltările:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_c p_c(t) \vec{E}_c(\vec{r}) \quad (10.52)$$

respectiv

$$\vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_c \omega_c q_c(t) \vec{H}_c(\vec{r}) \quad (10.53)$$

unde  $\vec{E}_c(\vec{r})$  și  $\vec{H}_c(\vec{r})$  specifică *modurile normale de oscilație*, dependența de timp a câmpului fiind exprimată de coeficienții  $p_c(t)$  și  $q_c(t)$ . Introducând dezvoltările (10.52) și (10.53) în ecuația (10.50) și ținând seama că modurile de oscilație nu sunt ortonormate, rezultă:

$$\ddot{p}_c + \frac{\gamma c}{n} \dot{p}_c + \omega_c^2 p_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int \ddot{\vec{P}}' \cdot \vec{E}_c(\vec{r}) dV. \quad (10.54)$$

Considerând că în cavitate este predominant un singur mod de oscilație al câmpului și introducând timpul de viață în cavitate al radiației  $\tau_c = \frac{n}{\gamma c}$  ecuația

(10.54) devine:

$$\ddot{\vec{E}} + \frac{1}{\tau_c} \dot{\vec{E}} + \omega_c^2 \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \vec{E}_c(\vec{r}) \int \ddot{\vec{P}}' \cdot \vec{E}_c(\vec{r}) dV \quad (10.55)$$

sau pentru o distribuție a polarizării analogă câmpului:

$$\ddot{\vec{E}} + \frac{1}{\tau_c} \dot{\vec{E}} + \omega_c^2 \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \ddot{\vec{P}}'. \quad (10.56)$$

În cazul rezonatorilor optici (cap. 5)  $\tau_c$  este determinat atât de pierderile de radiație prin oglinzile rezonatorului ( $\tau_m$ ) cât și de pierderile prin împrăștiere și absorbție ( $\tau_s$ ) la care se adaugă pierderile prin difracție ( $\tau_d$ ), astfel încât  $1/\tau_c = 1/\tau_m + 1/\tau_s + 1/\tau_d$ .

În ecuațiile (10.41), (10.47), (10.50) și (10.56) trebuie să se țină seama că intervine câmpul local  $\vec{E}'$  și polarizarea sursă  $\vec{P}'$  astfel că se impune stabilirea unor relații directe între mărimile microscopice și mărimile macroscopice corespunzătoare. Se poate arăta că:

$$\vec{P}' = \frac{n^2 + 2}{3} \vec{P} = \sqrt{L} \vec{P} \quad (10.57)$$

$$\vec{E}' = \frac{n^2 + 2}{3} \vec{E} = \sqrt{L} \vec{E}, \quad (10.58)$$

unde  $L$  reprezintă *factorul de corecție Lorentz*.

Expresia  $L = \left(\frac{n^2 + 2}{3}\right)^2$  a fost stabilită utilizându-se relația cunoscută

$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}^{tot}$ , unde  $\vec{E}$  este câmpul macroscopic. Dacă se introduce

factorul de corecție Lorentz în ecuațiile pentru polarizare, populație și câmp se obține următorul sistem de ecuații de mișcare pentru tranzițiile de dipol electric

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{2}{T_2} \dot{\vec{P}} + \Omega^2 \vec{P} = \frac{2\Omega}{\hbar} \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \vec{E}, \quad (10.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_1 - N_2) + \frac{(N_1 - N_2) - (N_1 - N_2)^e}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\Omega} \dot{\vec{P}} \vec{E}, \quad (10.60)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{n\gamma}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (10.61)$$

$$\ddot{\vec{E}} + \frac{1}{\tau_c} \dot{\vec{E}} + \omega_c^2 \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \vec{E}_c(\vec{r}) \int \ddot{\vec{P}}' \vec{E}_c(\vec{r}') dV'. \quad (10.62)$$

### 10.3. Fenomenele de absorbție rezonantă, dispersie și saturație

#### 10.3.1. Absorbția și dispersia

Fenomenele de absorbție și dispersie ale mediului pot fi caracterizate cu ajutorul vectorului inducție electrică  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$  în diferite medii, pe baza căreia se definește susceptibilitatea complexă a acestor medii conform dezvoltării

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} + \epsilon_0 (\chi \vec{E} \vec{E} + \chi \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots) = \epsilon \vec{E} + \vec{P}^{nl} \quad (10.63)$$

unde  $\vec{P}^{nl}$  reprezintă partea neliniară a polarizării.

Neglijând în primă aproximație polarizarea neliniară, *susceptibilitatea liniară* este definită de relația:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} \quad (10.64)$$

în care  $\chi(\omega)$  este o mărime complexă

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (10.65)$$

$\chi'(\omega)$  caracterizând proprietățile de *dispersie* ale mediului, iar  $\chi''(\omega)$  proprietățile de *absorbție* ale acestuia. Pentru a determina dependența explicită de frecvență a susceptibilității liniare se compară relația (10.64) cu soluția  $\vec{P}(\vec{E})$

dată de ecuația (10.59) care se obține admitând pentru polarizare și intensitatea câmpului electric la frecvențe optice expresii de forma:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{P}_0 e^{i(\omega t - kx)} + c.c. \quad (10.66)$$

respectiv

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} + c.c. \quad (10.67)$$

unde s-a considerat că  $\omega \approx \Omega$ .

În cazul regimului staționar  $\frac{\partial}{\partial t}(N_1 - N_2) = 0$  întrucât  $\omega T_1 \gg 1$  astfel încât

$$\vec{P}_0 = \frac{L}{\hbar} \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \frac{1}{(\Omega - \omega) + i\left(\frac{1}{T_2}\right)} \vec{E}_0. \quad (10.68)$$

Prin urmare

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \epsilon_0} L \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) g_L^c(\omega, \Omega) \quad (10.69)$$

unde mărimea  $g_L^c(\omega, \Omega)$  este dată de expresia:

$$g_L^c(\omega, \Omega) = \frac{1}{\pi (\Omega - \omega) + i(1/T_2)} \quad (10.70)$$

numită *funcție de formă a liniei spectrale a lui Lorentz*.

Dacă în locul ecuației (10.59) pentru mediile izotrope se utilizează ecuația (10.38) valabilă în mediile anizotrope, susceptibilitatea electrică va fi un tensor care corelează o anumită componentă a polarizării cu componentele câmpului electric după direcții diferite:

$$\vec{P}_{0i} = \frac{\pi}{\hbar} \left( \widetilde{d}_i d_j^* \right) (N_1 - N_2) g_L^c(\omega, \Omega) \vec{E}_{0j} = \epsilon_0 \chi_{ij}(\omega) \vec{E}_{0j} \quad (10.71)$$

unde  $\chi_{ij}$  sunt componentele unui tensor de ordinul al doilea.

În cele ce urmează se vor analiza proprietățile de absorbție și dispersie ale mediilor izotrope, în apropierea frecvenței de rezonanță  $\Omega$ . Astfel, din expresiile (10.65) și (10.69) ținându-se seama de (10.70), rezultă:

$$\chi'(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \epsilon_0} L \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \left[ \frac{1}{\pi (\Omega - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right] \quad (10.72)$$

respectiv

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar\epsilon_0} L \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \left[ \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\Omega - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right]. \quad (10.73)$$

Dependența dintre susceptibilitatea liniară  $\chi(\omega)$  și constanta de propagare complexă  $k(\omega)$  care intervine în soluțiile de forma (10.66) și (10.67) poate fi determinată utilizându-se ecuația de câmp (10.61) în care se introduc soluțiile menționate mai sus obținându-se relația:

$$k^2(\omega) = \frac{n^2\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{\chi(\omega)}{n^2} \right]. \quad (10.74)$$

Considerând că

$$\chi(\omega) \ll \frac{1}{n^2}, \quad (10.75)$$

acceptabilă din punct de vedere fizic și ținând seama de dezvoltarea

$$\sqrt{1 + \chi/n^2} \approx 1 + \chi/2n^2, \quad (10.76)$$

se obține

$$k = k' + ik'' \approx \frac{n\omega}{c} \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right] + i \frac{\omega\chi''(\omega)}{2nc}, \quad (10.77)$$

În figurile 10. 1. a) și b) sunt reprezentate grafic, calitativ, dependența de frecvență a mărimilor  $\chi$  respectiv  $k$ , în jurul frecvenței de tranziție, folosindu-se expresiile (10.72) și (10.73) ale lui  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$ .

Constanta de propagare  $k'(\omega)$  caracterizează proprietățile de dispersie a mediului, aceste proprietăți fiind determinate de  $\chi'(\omega)$  care se comportă la fel cu  $k'(\omega)$  în jurul frecvenței de rezonanță.

Dependența lui  $\chi'(\omega)$  de frecvență evidențiază fenomenul de dispersie anomală, caracteristic acestor medii în jurul frecvenței de tranziție  $\Omega$ .

Proprietățile de absorbție ale mediului sunt determinate de  $k''(\omega)$ . Definind coeficientul de atenuare  $\mu$  pentru intensitatea unei care se propagă în medie cu ajutorul legii

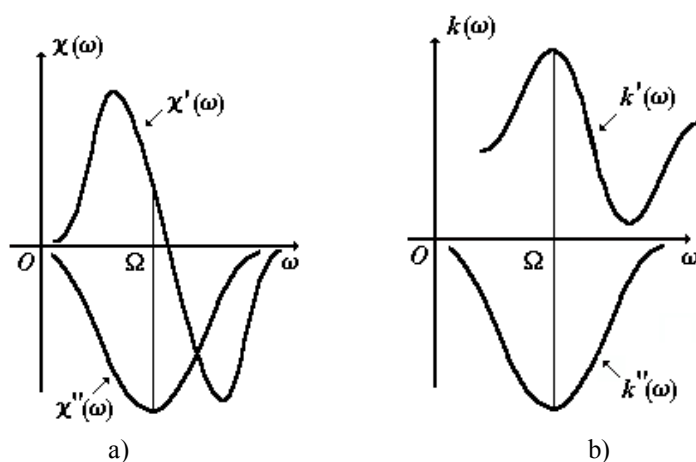
$$I = I_0 \exp(-\mu z), \quad (10.78)$$

relația de definiție a intensității fiind

$$I = \frac{nc\epsilon_0}{2} |E_0|^2 \exp(-ikz), \quad (10.79)$$

din compararea expresiilor de mai sus se obține direct dependența de frecvență a coeficientului de atenuare:

$$\mu = -2k'' = \frac{\Omega\pi}{\varepsilon_0\hbar cn} L \frac{|\vec{d}_{12}|}{3} (N_1 - N_2) g_L(\omega, \Omega). \quad (10.80)$$



**Fig. 10. 1. a), b).** Dependența de frecvență a susceptibilității (a) și constantei de propagare (b), în jurul frecvenței de tranziție.

Coeficientul de atenuare dat de relația (10.80) conține mărimea  $g_L(\omega, \Omega)$  care reprezintă *partea imaginară a funcției complexe Lorentz*  $g_L^c(\omega, \Omega)$  și are expresia:

$$g_L(\omega, \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\Omega - \omega)^2 + (1/T_2)^2}. \quad (10.81)$$

Întrucât prin intermediul lui  $\mu$ , funcția  $g_L(\omega, \Omega)$  determină forma liniei de absorbție a radiației de către mediu, ea poartă numele de *funcția de formă a liniei spectrale Lorentz*. Dependența de frecvență a funcției de formă a liniei spectrale Lorentz,  $g_L(\omega, \Omega)$  este prezentată grafic în fig. 10. 2.

Funcția de formă a liniei spectrale Lorentz intervine în studiul tuturor fenomenelor de absorbție și rezonanță optică. Se poate verifica că  $g_L(\omega, \Omega)$  dat de relația (10.81) satisface condiția de normare:

$$\int g_L(\omega, \Omega) d\omega = 1. \quad (10.82)$$

Ținând cont de relația (10.82) se poate determina lărgimea de bandă a liniei spectrale lorentziene, definită prin expresia:

$$B = 2\Delta\omega_L \quad (10.83)$$

unde  $\Delta\omega_L$  rezultă din condiția:

$$[g_L(\omega, \Omega)]_{\Delta\omega_L} = \frac{1}{2} [g_L(\omega, \Omega)]_{\max}, \quad (10.84)$$

adică  $B$  reprezintă *ecartul de frecvență* între punctele situate simetric în raport cu frecvența centrală  $\Omega$ , pe curba  $g_L(\omega, \Omega)$ , pentru care valoarea lui  $g_L(\omega, \Omega)$  se reduce la jumătate din valoarea sa maximă. Pe baza celor prezentate mai sus se obține:

$$\Delta\omega_L = \frac{1}{T_2}, \tag{10.85}$$

unde  $T_2$  reprezintă timpul de relaxare spin-spin caracteristic mediului.

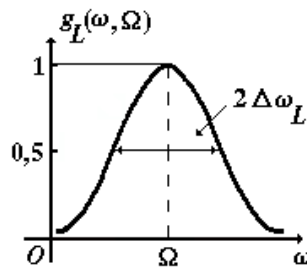


Fig. 10. 2. Dependența de frecvență a funcției  $g_L(\omega, \Omega)$ .

Din expresia lui  $\mu$  rezultă dependența liniară a coeficientului de absorbție de diferența de populație  $(N_1 - N_2)$ . *Se observă că  $N_2$  are o contribuție negativă la coeficientul de absorbție, favorizând transferul de energie de la mediu către câmpul electromagnetic, deci procesele de emisie. Pentru  $N_2 > N_1$  absorbția mediului devine negativă astfel că are loc amplificarea radiației, fenomen caracteristic funcționării laserelor și maserelor.*

Proprietățile de absorbție ale mediului sau *tăria tranzițiilor* între stările atomice implicate mai pot fi descrise și de *secțiunea eficace de absorbție per atom*, respectiv *tăria oscilatorului*. Secțiunea eficace de absorbție per atom  $\sigma_c$ , se definește pentru un mediu atomic cu două stări, având  $N_1 = N$  și  $N_2 = 0$ , prin raportul dintre *puterea absorbită per atom către puterea incidentă pe unitatea de arie*

$$\sigma_c = \frac{P}{NI} = -\frac{1}{NI} \frac{dI}{dz} = \frac{\mu}{N} \tag{10.86}$$

unde  $I$  este puterea incidentă pe unitatea de arie, iar  $P$  este puterea absorbită pe unitatea de volum. Din relația (10.116) rezultă că  $\sigma_c$  poate fi scrisă numai funcție de coeficientul de atenuare  $\mu$  și de numărul  $N$  de atomi pe unitatea de volum, ceea ce conduce la următoarea formă explicită a acestei mărimi:

$$\sigma_c = \frac{\Omega \pi}{3 \varepsilon_0 \hbar c n} L |\vec{d}_{12}|^2 g_L(\omega, \Omega). \quad (10.87)$$

Secțiunea eficace de absorbție pe atom poate fi corelată cu *tăria oscilatorului*, mărime definită prin raportul dintre secțiunile eficace de absorbție cuantică și clasică. Astfel, dacă stările implicate în tranziție sunt  $\langle m |$  și  $\langle n |$ , tăria oscilatorului  $f_{mn}$  este dată de expresia:

$$f_{mn} = \frac{(\sigma_c)_{cuantic}}{(\sigma_c)_{clasic}} = \frac{2m\Omega_{mn} |\vec{d}_{mn}|^2}{3e^2 \hbar} \quad (10.88)$$

putând avea valori pozitive sau negative funcție de natura tranziției (absorbție sau emisie),  $e/m$  fiind sarcina specifică a dipolului oscilant.

Tăriile oscilatorilor sunt deosebit de utile pentru estimarea elementelor matricei de dipol electric, atunci când lipsesc datele experimentale, utilizându-se în acest scop diferite reguli de însumare funcție de natura proceselor fizice implicate. De exemplu, pentru tranzițiile la care participă un singur electron, suma tăriilor oscilatorilor trebuie să fie unitară. În cazul în care participă la o tranziție particulară mai mulți electroni se utilizează regula de însumare Kuhn–Thomas, conform căreia suma tăriilor oscilatorilor care descriu tranzițiile pe un nivel dat este determinată de numărul electronilor implicați.

### 10.3.2. Saturația mediului atomic

Ținând cont de ecuația de polarizare (10.59) au fost deduse proprietățile de dispersie și absorbție ale mediului. Ecuațiile cuantice care descriu comportarea mediilor substanțiale trebuie să țină seama și de proprietățile de saturație ale acestor medii, care se manifestă prin *trecerea neatenuată a radiației prin mediu, când aceasta devine suficient de intensă*. Din punct de vedere fizic, proprietățile de saturație se explică astfel: energia absorbită de atomii substanței în prezența câmpurilor electrice de frecvențe egale cu frecvența de tranziție, la nivele mici ale intensităților acestora, este cedată rapid mediului datorită fenomenelor de relaxare, rămânând neschimbate proprietățile de absorbție.

Atunci când intensitatea radiației absorbite devine suficient de puternică, energia absorbită nu mai poate fi disipată prin *procesele de relaxare, astfel că are loc o redistribuție a populațiilor între nivelele care participă la tranziție, intervenind în expresiile lui  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$  prin factorul  $(N_1 - N_2)$* , în sensul *saturării* proprietăților de dispersie și absorbție. Descrierea fenomenului de saturație se poate face utilizându-se ecuația de populații (10.47):

– în *absența câmpului electric*, la regim staționar, diferența de populație  $(N_1 - N_2)$  atinge valoarea de echilibru dată de distribuția Boltzmann

$$(N_1 - N_2) = (N_1 - N_2)^e \quad (10.89)$$



– în prezența câmpului electric, se poate atinge din nou regimul staționar  $\left(\frac{\partial}{\partial t}(N_1 - N_2) = 0\right)$ , dar la o altă valoare de echilibru a diferenței de populație, determinată de ecuația:

$$\frac{\hbar\Omega}{2} \frac{(N_1 - N_2) - (N_1 - N_2)^e}{T_1} = -\frac{i\omega}{4} (\vec{P}_0 \vec{E}_0^* - \vec{P}_0^* \vec{E}_0). \quad (10.90)$$

Noua valoare de echilibru corespunde situației în care puterea medie cedată de mediul atomic, prin procesele de relaxare, coincide cu puterea primită de la câmp prin procesele de absorbție.

În acest caz, atomii nu mai absorb radiația, aceasta trecând neatenuată prin mediu. Folosind expresia:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi'(\omega) + i\chi''(\omega)] \vec{E} \quad (10.91)$$

pentru legătura dintre câmp și polarizare, din ecuația (10.90), rezultă:

$$N_1 - N_2 = \frac{(N_1 - N_2)^e}{1 + \frac{I}{I_{sat}} \cdot \frac{g_L(\omega, \Omega)}{T_2/\pi}} \quad (10.92)$$

unde  $I_{sat}$  reprezintă puterea pe unitatea de arie a unei unde care la rezonanță reduce diferența de populație la jumătate din valoarea sa nesaturată.

$$I_{sat} = \frac{n \varepsilon c}{\left(2T_1 T_2 / \hbar^2\right) L \left(|\vec{d}_{12}|^2 / 3\right)}. \quad (10.93)$$

Scăderea diferenței de populație cu creșterea intensității câmpului, peste o anumită valoare a acestuia, ca urmare a fenomenelor de saturație, reprezintă un efect nedorit pentru lasere unde se urmărește obținerea unei inversii de populație cât mai ridicate.

Din expresiile (10.80) și (10.92) rezultă că atunci când fenomenele de saturație devin importante, coeficientul de absorbție  $\mu_{sat}$  are expresia:

$$\mu_{sat} = \frac{\Omega \pi}{\hbar \varepsilon_0 c n} L \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2)^e \frac{1}{\pi (\Omega - \omega)^2 + (1/T_2)^2 (1 + I/I_{sat})}. \quad (10.94)$$

Prin urmare

$$\mu_{sat}(\Omega) = \mu(\Omega) \frac{1}{1 + I/I_{sat}}, \quad (10.95)$$

efectul saturației manifestându-se prin scăderea înălțimii liniei de absorbție.

Totodată, puterea absorbită pe unitatea de volum are valoarea:

$$P_{sat} = \frac{\hbar\Omega}{2T_1} (N_1 - N_2)^e. \quad (10.96)$$

### 10.3.3. Lărgirea omogenă și neomogenă a liniei spectrale

Linia spectrală lorentziană definită de funcția  $g_L(\omega, \Omega)$ , având expresia (10.81) se mai numește *lărgită omogen* întrucât procesele de relaxare care o determină acționează la fel pentru toți atomii, aceștia având aceeași frecvență de tranziție. Ca urmare, caracteristica de frecvență a polarizării macroscopice este identică cu cea a atomilor individuali.

Procesele tipice care determină lărgirea omogenă a liniei spectrale sunt: ciocnirile între atomi, cuplajul cu vibrațiile rețelei.

În cazul în care atomii sau moleculele unui ansamblu au frecvențe de tranziție  $\Omega_i$  diferite, linia spectrală emisă de ansamblu diferă de liniile spectrale lărgite omogen ale oscilatorilor individuali, fiind *lărgită neomogen*.

Procesele tipice care determină distribuția frecvențelor  $\Omega_i$  de tranziție sunt: efectul Doppler, defectele rețelei cristaline, neomogenitățile câmpurilor implicate etc.

De exemplu, în cazul lărgirii Doppler, mișcarea moleculelor gazului determină modificarea frecvenței de tranziție  $\omega_0 \rightarrow \Omega_i$  funcție de viteza de mișcare  $\vec{v}_i$ , pentru fiecare oscilator.

Astfel, în intervalul  $d\Omega_i$  sunt situate frecvențele de tranziție pentru  $dN$  molecule, din cele  $N$  molecule pe unitatea de volum încât:

$$dN = N g_G(\omega_0, \Omega_i) d\Omega_i \quad (10.97)$$

unde

$$g_G(\omega_0, \Omega_i) = \frac{\left[ \left( \frac{4}{\pi} \right) \ln 2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta\omega_G} \exp \left[ -4 \ln 2 \frac{(\Omega_i - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_G)^2} \right] \quad (10.98)$$

este funcția de formă gaussiană a liniei spectrale, fiind satisfăcută condiția de normare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_G(\omega_0, \Omega_i) d\Omega_i = 1. \quad (10.99)$$

Linia spectrală lărgită neomogen are lărgimea  $\Delta\omega_G$  definită prin analogie cu  $\Delta\omega_L$  (fig. 10. 3) fiind centrată pe frecvența  $\omega_0$ .

Pentru evaluarea susceptibilității liniei neomogene lărgită Doppler trebuie să se țină seama că polarizarea,  $d\vec{P}$  funcție de frecvența  $\omega$  rezultă prin însumarea contribuțiilor componentelor de forma  $d\chi(\omega, \Omega_i)$ , astfel încât se poate scrie:

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \epsilon_0} L \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{3} (N_1 - N_2) \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\omega, \Omega_i) g_G(\omega_0, \Omega_i) d\Omega_i \quad (10.100)$$

deci se pot evalua  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$ .

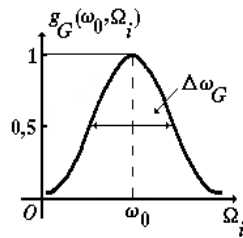


Fig. 10. 3. Dependența de frecvență a funcției  $g_G(\omega_0, \Omega_i)$ .