

9. Rezonatori laser

9.1. Considerații teoretice generale asupra rezonatorilor optici

Pentru micșorarea pierderilor mediul activ se plasează într-o *cavitate optică rezonantă (rezonator laser)* care este o structură deschisă formată din două oglinzi cu reflectivități mari așezate la distanță mare una față de alta. Cavitățile optice utilizate la fabricarea laserelor au dimensiunile mult mai mari în comparație cu lungimea de undă a radiației electromagnetice din cavitate.

Cavitatea se numește *pasivă* în absența mediului activ și *activă* în prezența acestuia. Radiația electromagnetică din cavitate rezultă în urma proceselor de dezexcitare spontană sau stimulată suferite de atomii, moleculele, ionii etc. care constituie mediul activ, care se manifestă astfel ca o sursă de energie [9.1]-[9.8].

9.1.1. Moduri de oscilație

O cavitate optică rezonantă poate suporta atât *moduri longitudinale* cât și *transversale*. Modurile de oscilație reprezintă configurații stabile ale câmpului electromagnetic din cavitate.

Specificarea modurilor de oscilație care sunt transversal electromagnetice se face cu ajutorul notației $TEM_{r,s,q}$, unde indicele q se referă la modurile longitudinale indicând numărul de noduri pentru undele staționare formate în lungul axei rezonatorului, iar indicii r, s se referă la modurile transversale, aceștia indicând numărul de noduri (schimbări de fază) ale câmpului electric pe oglindă după două direcții reciproc perpendiculare și perpendiculare pe axa rezonatorului.

În cazul unui rezonator laser de lungime L (fig. 9. 1), frecvențele, ν_q corespunzătoare diferitelor moduri de oscilație longitudinale sunt determinate de condiția:

$$L = q(\lambda_q / 2), \quad (9.1)$$

de unde rezultă

$$\nu_q = \frac{q \cdot c}{2L} \quad (9.2)$$

unde c este viteza luminii în vid.

În domeniul vizibil al spectrului radiațiilor electromagnetice numărul de moduri pentru undele staționare formate de-a lungul axei rezonatorului este de ordinul $10^4 \div 10^7$. Fiecărui mod de oscilație transversal îi corespund mai multe moduri longitudinale. Modurile longitudinale diferă unul față de altul numai prin frecvența de oscilație, pe când cele transversale se deosebesc atât prin frecvența de oscilație cât și prin distribuția câmpului într-un plan pe axa rezonatorului.

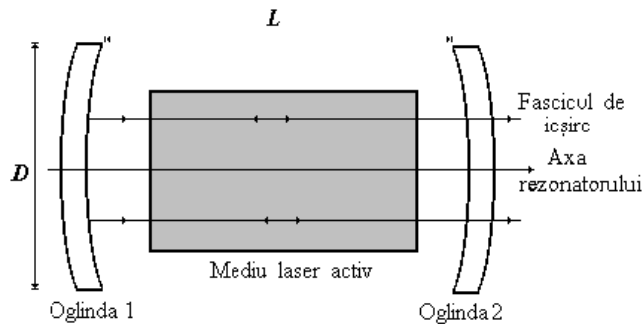


Fig. 9. 1. Cavitataea optică activă.

În urma procesului de emisie stimulată mediul activ furnizează energie acelor moduri ale cavității (ω_c) pentru care este îndeplinită condiția de prag, adică pentru care câștigul liniei spectrale emise (cu pulsația centrală Ω) depășește pierderile, iar laserul începe să oscileze pe aceste moduri, între care se manifestă procese competitive (fig. 9. 2.).

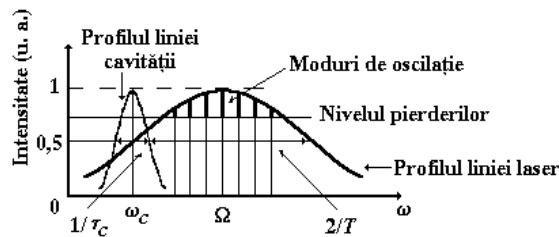


Fig. 9. 2. Profilurile modurilor cavității și a liniei laser.

Transmitanța cavității, T (fig. 9. 3) este dată de relația [9.1], [9.5]:

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - (R_1 R_2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + 4R_1 R_2 \sin^2\left(\frac{\omega}{c} L\right)} \quad (9.3)$$

unde $R_{1,2}$ sunt reflectivitățile oglinzilor.

La rezonanță, ($R_1 = R_2, T = 1$) puterea transmisă de cavitate este maximă.

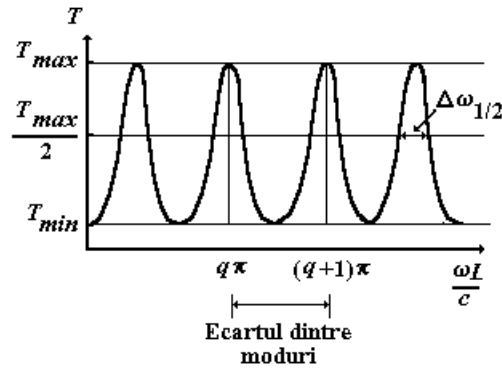


Fig. 9. 3. Transmisia cavității optice în cazul unui mediu ideal.

Întrucât în cazul rezonatorilor laser reflectivitățile oglinzilor au valori mari, (pentru ca puterea incidentă să fie egală cu cea emergentă) în cavitate se stochează energia de la sursă, ca urmare a proceselor de reflexie multiplă.

9.1.2. Caracteristicile rezonatorilor laser

Selectivitatea cavității poate fi caracterizată de *factorul de calitate* al acesteia, definit de relațiile:

$$Q = \omega_0 \frac{\text{energia stocată la rezonanță}}{\text{pierdere de putere medie}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}} \tag{9.4}$$

unde ω_0 reprezintă pulsația la rezonanță, iar $\Delta\omega_{1/2}$ caracterizează lărgimea benzii definită la semiînălțime (fig. 9. 3).

Ținând seama de relația (9.3), rezultă:

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{c}{2L} \frac{1 - (R_1 R_2)^{\frac{1}{2}}}{\pi (R_1 R_2)^{\frac{1}{4}}}, \tag{9.5}$$

unde $\frac{c}{2L}$ reprezintă ecartul dintre moduri, iar

$$Q = \frac{2\pi L}{\lambda_0} \frac{(R_1 R_2)^{\frac{1}{4}}}{1 - (R_1 R_2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{9.6}$$

Finețea cavității este definită de relația:

$$F = \frac{c}{2L \Delta\omega_{1/2}}. \quad (9.7)$$

În domeniul optic al spectrului radiațiilor electromagnetice $\Delta\omega_{1/2} \approx 10^2$ kHz, $Q = 10^8 \div 10^9$, iar $F \approx 10^2$.

Timpul de viață al fotonilor din cavitate, τ_c poate fi calculat ținând seama că pentru un parcurs dus-întors prin cavitate numărul de fotoni, n scade la valoarea nR_1R_2 , iar

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{c}{2L}(1 - R_1R_2)n. \quad (9.8)$$

In urma integrării ecuației diferențiale (9.8), rezultă:

$$n(t) = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \quad (9.9)$$

unde n_0 reprezintă numărul inițial de fotoni, iar

$$\tau_c = \frac{2L}{c(1 - R_1R_2)}. \quad (9.10)$$

este timpul de viață al fotonilor din cavitate. Ținând seama de (9.4) variația în timp a energiei stocată la rezonanță este dată de relația:

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}t\right). \quad (9.11)$$

Din (9.6) și (9.10) rezultă că relația dintre timpul de viață și factorul de calitate al cavității este:

$$\tau_c = Q/\omega_0 \text{ sau } \Delta\omega_{1/2} \cdot \tau_c = 1. \quad (9.12)$$

9.2. Distribuția modală a câmpului într-un rezonator optic

Pentru a calcula *distribuția modală a câmpului într-un rezonator optic* se consideră o cavitate optică pasivă formată din două oglinzi sferice având raza de curbură \mathcal{R} , pătrate, de latură $2a$, situate la distanța $L \gg \lambda$, λ fiind lungimea de undă a undelor electromagnetice din cavitate (fig. 9. 4).

Întrucât rezolvarea ecuațiilor Maxwell în cazul unei cavități optice cu condițiile la limită corespunzătoare implică dificultăți serioase din cauza numărului mare de moduri de oscilație A. G. Fox, T. Li [9.7], G. D. Boyd, J. P. Gordon [9.8] au dezvoltat așa-numita teorie electromagnetică care se bazează pe principiul Huygens și integrala Kirchhoff-Fresnel din teoria scalară a difracției. Pe baza acestei teorii se pot calcula distribuția câmpului optic în interiorul și în exteriorul

cavității, condiția generală de rezonanță și factorul de calitate al modurilor de oscilație.

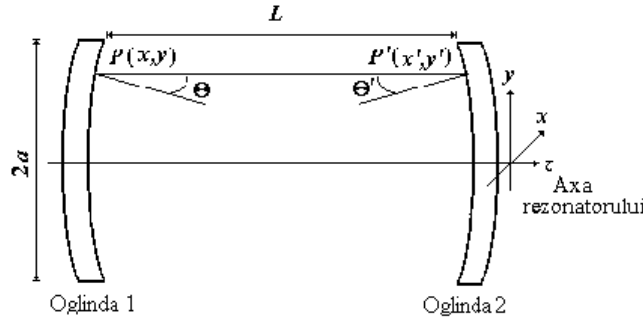


Fig. 9. 4. Cavitate optică pasivă.

Se presupune că în interiorul cavității câmpul este transversal și liniar polarizat după direcția y . Întrucât pierderile sunt mici câmpul suferă reflexii multiple pe cele două oglinzi. Câmpul $E(x, y)$ din punctul $P(x, y)$ al oglinzii 1 se poate exprima cu ajutorul ecuației integrale Kirchhoff-Fresnel din teoria scalară a difracției în funcție de câmpul $E(x', y')$ prin însumarea contribuțiilor surselor corespunzătoare tuturor punctelor $P'(x', y')$ de pe oglinda 2 sub forma:

$$E(x, y) = \int_{S'} \frac{ik(1 + \cos \theta')}{4\pi\rho} e^{-ik\rho} E'(x', y') dS' \tag{9.13}$$

unde S' este suprafața oglinzii 2, ρ este raza vectorie dintre punctele P și P' , iar θ' este unghiul făcut de direcția razei vectorie și normala la suprafața oglinzii 2.

În mod analog se poate exprima câmpul în punctele P' de pe oglinda 2:

$$E'(x', y') = \int_S \frac{ik(1 + \cos \theta)}{4\pi\rho} e^{-ik\rho} E(x, y) dS. \tag{9.14}$$

Considerând că în cazul regimului staționar funcțiile $E(x, y)$ și $E(x', y')$ reprezintă câmpul aceluiași mod de oscilație care se reproduce peste cele două oglinzi în urma reflexiilor multiple, succesive, atunci acestea trebuie să verifice ecuațiile cuplate cu valori și funcții proprii de forma:

$$\sigma E(x, y) = \int_{S'} \frac{ik(1 + \cos \theta')}{4\pi\rho} e^{-ik\rho} E'(x', y') dS' \tag{9.15}$$

$$\sigma' E'(x', y') = \int_S \frac{ik(1 + \cos \theta)}{4\pi\rho} e^{-ik\rho} E(x, y) dS. \tag{9.16}$$

În ecuațiile (9.15) și (9.16) constantele complexe σ și σ' reprezintă valorile proprii. Soluțiile ecuațiilor menționate mai sus satisfac ecuațiile Maxwell în aproximația Kirchhoff și condițiile la limită pe cele două suprafețe.

În urma rezolvării ecuațiilor (9.15) și (9.16) se pot calcula funcțiile proprii, care determină modurile de oscilație ale cavității și respectiv valorile proprii corespunzătoare care conduc la condiția de rezonanță.

Există două metode de rezolvare a ecuațiilor (9.15) și (9.16):

- *metoda numerică* care este una iterativă și a fost elaborată de A. G. Fox, T. Li;

- *metoda analitică* care constă în transformarea ecuațiilor integrale Kirchhoff în ecuații Fredholm de speța a doua pentru care soluțiile generale sunt cunoscute.

Pentru a calcula distribuția câmpului care determină modurile normale ale rezonatorului prin metoda analitică se presupune că aceasta se reproduce peste fiecare oglindă conform relației:

$$E(x, y) = \sigma_r \sigma_s f_r(x) g_s(y) E_0 \quad (9.17)$$

unde σ_r și σ_s determină schimbările de fază și amplitudine după direcțiile x și y pe care le suferă câmpul în urma reflexiilor succesive, $f_r(x)$ și $g_s(y)$ determină variațiile câmpului peste apertura oglinzilor considerate ca fiind formate din benzi (*infinite strip*) paralele cu direcțiile x și y , iar E_0 este o amplitudine constantă.

Ținând seama de (9.13) relația (9.17) se poate scrie sub forma:

$$E = \int_{S'} \frac{ik(1 + \cos \theta')}{4\pi\rho} e^{-ik\rho} E_0 f_r(x') g_s(y') dS' \quad (9.18)$$

În cazul unghiurilor θ mici și $\rho = \mathcal{R}$ relația (9.19) devine:

$$\sigma_r \sigma_s f_r(x) g_s(y) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{ik}{2\pi\mathcal{R}} e^{-ik\rho} f_r(x') g_s(y') dx' dy', \quad (9.19)$$

iar ρ poate fi calculat astfel:

$$\rho = \left[(L - \delta - \delta')^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.20)$$

unde

$$\delta = \mathcal{R} - \left(\mathcal{R}^2 - r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{r^2}{2\mathcal{R}} \quad (9.21)$$

și

$$\delta' = \mathcal{R} - \left(\mathcal{R}^2 - r'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{r'^2}{2\mathcal{R}}, \quad (9.22)$$

r și r' fiind distanțele punctelor P și P' față de originea sistemelor de axe rectangulare Oxy și $O'x'y'$ situate în planele normale pe axa rezonatorului, iar δ și δ' sunt distanțele de la aceste plane la vârful oglinzilor măsurate pe axa rezonatorului.

Relația (9.20) poate fi aproximată în cazul rezonatorului confocal, $L = \mathcal{R}$ sub forma:

$$\rho = \mathcal{R} - \frac{xx' + yy'}{\mathcal{R}}. \quad (9.23)$$

Ținând seama de relațiile (9.19) și (9.23), rezultă ecuația integrală:

$$\sigma_r \sigma_s f_r(x) g_s(y) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{ik}{2\pi\mathcal{R}} e^{-ik\mathcal{R}} e^{\frac{ikxx'}{\mathcal{R}}} e^{\frac{ikyy'}{\mathcal{R}}} f_r(x') g_s(y') dx' dy'. \quad (9.24)$$

Introducându-se coordonatele reduce:

$$X = \frac{x\sqrt{d}}{a}, Y = \frac{y\sqrt{d}}{a} \quad (9.25)$$

unde $d = \frac{a^2 k}{\mathcal{R}} = 2\pi N$, $N = \frac{a^2}{\lambda\mathcal{R}}$ fiind *numărul Fresnel*, (numărul de zone

Fresnel văzute din centrul unei oglinzi pe cealaltă oglindă) și notațiile

$$F_r(X) = f_r(x), G_s(Y) = g_s(y) \quad (9.26)$$

ecuația integrală (9.24) se scrie sub forma:

$$\sigma_r \sigma_s F_r(X) G_s(Y) = \frac{i}{2\pi} e^{-ik\mathcal{R}} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} F_r(X') e^{ikXX'} G_s(Y') e^{ikYY'} dX' dY'. \quad (9.27)$$

Ecuația (9.27) poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor pentru diferite configurații ale rezonatorului, de exemplu: dreptunghiulară, circulară etc., rezultând două ecuații de tip Fredholm de speța a doua, cu nucleu simetric, fiecare fiind valabilă pentru o oglindă de tip *infinite strip*. Întrucât în cazurile prezentate mai sus intensitatea modului scade exponențial de la centrul oglinzii spre margini influența dimensiunii finite a oglinzilor asupra configurației modurilor este neglijabilă.

Astfel, în cazul oglinzilor dreptunghiulare, introducând notația

$$\beta_r \beta_s = \sigma_r \sigma_s / (ie^{-ik\mathcal{R}}). \quad (9.28)$$

ecuația (9.27) se separă în două ecuații integrale de tip Fredholm unidimensionale de forma:

$$F_r(X) = \frac{i}{\sqrt{2\pi\beta_r}} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} F_r(X') e^{ikXX'} dX'. \quad (9.29)$$

$$G_s(Y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi\beta_s}} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} G_s(Y') e^{ikYY'} dY'. \quad (9.30)$$

Întrucât în cazul rezonatorilor laser numărul Fresnel este de ordinul zecilor se poate neglija influența dimensiunilor finite ale oglinzilor asupra configurației

modurilor, astfel că limitele de integrare în ecuațiile (9.29) și (9.30) pot fi extinse la infinit, soluțiile aproximative ale acestora fiind polinoamele de tip Hermite.

Pentru aflarea soluțiilor se pleacă de la funcția generatoare a polinoamelor de tip Hermite, H_r :

$$h(y, t) = \exp(-t^2 + 2y) = \exp(-t^2) \exp[-(t-y)^2] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_r(y)}{r!} t^r. \quad (9.31)$$

În urma înmulțirii relației (9.31) cu funcția $\exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right)$ și integrării

de la $-\infty$ la $+\infty$, rezultă egalitatea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(2yt - t^2 + ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_r(y)}{r!} t^r \exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (9.32)$$

După integrarea membrului stâng al relației (9.32), ținându-se seama de funcția generatoare (9.31) și apoi intervertirea operației de însumare cu cea de integrare, ecuația (9.32) devine:

$$\sqrt{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} H_r(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r(y) \exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (9.33)$$

Întrucât egalitatea (9.33) este valabilă pentru orice valoare a variabilei t , coeficienții aceluiași puteri ale lui t sunt egali, astfel că relația de mai sus devine:

$$H_r(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{i^r \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r(y) \exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (9.34)$$

În urma comparării relațiilor (9.29) și (9.34) se obține soluția ecuației integrale sub forma:

$$F_r(X) = H_r(X) \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right). \quad (9.35)$$

cu

$$\beta_r = i^r. \quad (9.36)$$

Procedând în mod analog în cazul ecuației (9.30), rezultă o soluție de forma:

$$G_s(Y) = H_s(Y) \exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right). \quad (9.37)$$

cu

$$\beta_s = i^s. \quad (9.38)$$

Distribuția modală a câmpului după direcțiile x , respectiv y ale oglinzii rezonatorului este determinată funcțiile proprii $F_r(X)$ și $G_s(Y)$, date de relațiile

(9.35) și (9.37). Întrucât funcțiile (9.35) și (9.37) sunt reale, suprafețele reflectătoare ale oglinzilor sunt suprafețe de fază constantă.

Condiția de rezonanță este determinată de valorile proprii ale ecuației (9.24). Astfel, din relațiile (9.28), (9.36) și (9.38) se obține *condiția de fază* sub forma:

$$\sigma_r \sigma_s = i^{r+s+1} e^{-ik\mathcal{R}}. \quad (9.39)$$

Ținând seama că al rezonanță schimbarea de fază pentru un drum dus-întors, (*round trip*) prin cavitate este $2\pi q$, unde q este un număr întreg, rezultă *condiția de rezonanță*:

$$2 \left| \frac{\pi}{2} (r+s+1) - k\mathcal{R} \right| = 2\pi q. \quad (9.40)$$

Prin introducerea factorului 2 din membrul stâng al relației (9.40) se iau în considerare cele două reflexii la un drum dus-întors al radiației prin cavitate.

Relația (9.40) poate fi scrisă sub formă echivalentă, astfel:

$$2q + (r+s+1) = \frac{4\mathcal{R}}{\lambda}.$$

Numerele r, s, q rezultate în urma rezolvării ecuației (9.28) specifică modurile de oscilație ale cavității. Modurile de oscilație notate $TEM_{r s q}$ sunt transversal electromagnetice întrucât se poate neglija componenta câmpului care oscilează după axa longitudinală z a rezonatorului și formează un set ortonormat de funcții proprii pentru orice câmp transversal electromagnetic din cavitate.

Cu ajutorul valorilor proprii σ_r și σ_s care determină și variațiile în amplitudine ale câmpului datorită difracției se poate defini un coeficient de pierderi pentru un parcurs dus-întors prin cavitate:

$$\alpha_d = 1 - |\sigma_r \sigma_s|^2. \quad (9.41)$$

Ținând seama de expresia coordonatelor reduse (9.25) se poate determina expresia explicită a funcțiilor proprii $f_r(x)$ și $g_s(y)$. Astfel:

$$f_r(x) = \text{constant} \cdot H_r(x\sqrt{2\pi/\mathcal{R}\lambda}) \exp\left(-\frac{\pi x^2}{\mathcal{R}\lambda}\right), \quad (9.42)$$

reprezintă produse dintre polinoame de tip Hermite și respectiv Gauss. O expresie analogă se poate scrie și pentru funcția $g_s(y)$.

Distribuția câmpului pe oglindă este dată de produsul dintre funcția de tip Gauss $\exp\left(-\pi \frac{x^2 + y^2}{\mathcal{R}\lambda}\right)$ și respectiv polinoamele Hermite corespunzătoare.

Expresiile polinoamelor Hermite de ordin inferior sunt prezentate în tabelul 5. 1, unde s-a făcut notația $u = x\sqrt{2\pi/\mathcal{R}\lambda}$.

Din punct de vedere calitativ în fig. 5. 5 a), b) și c) este prezentată dependența de distanță a funcției $f_r(x)$ și distribuția spațială a intensității pe suprafața oglinzii pentru modurile de oscilație TEM_{00q}, TEM_{10q} și respectiv TEM_{20q} în cazul unui rezonator cu oglinzi pătrate.

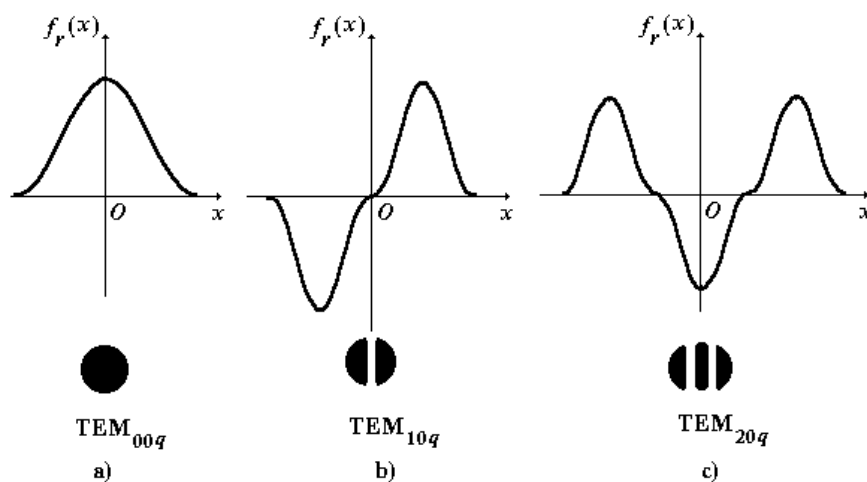


Fig. 9. 5 a), b), c). Dependența de distanță a funcției $f_r(x)$ și distribuția spațială a intensității pe suprafața unei oglinzi pătrate pentru modurile de oscilație:

a) TEM_{00q}, b)TEM_{10q} și respectiv c) TEM_{20q}.

Tabelul 5. 1.

Nr. crt.	Polinom Hermite
1.	$H_0(u) = 1$
2.	$H_1(u) = 2u$
3.	$H_2(u) = 4u^2 - 2$
4.	$H_3(u) = 8u^3 - 12u$
5.	$H_4(u) = 16u^4 - 48u^2 + 12$
6.	$H_5(u) = 32u^5 - 160u^3 + 120u$

Câmpul electric corespunzător la doi lobi alăturați are faze opuse, deci numărul de noduri după o direcție transversală indică numărul de schimbări de fază pe care le suferă câmpul electric, așa cum se poate observa din fig. 9. 6 a), b) și c) în cazul modurilor de oscilație TEM_{00q}, TEM_{10q} și respectiv TEM_{20q}.

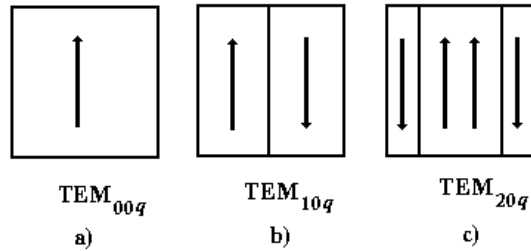


Fig. 9. 6 a), b), c). Distribuția de fază a câmpului electric pe suprafața unei oglinzi pătrate pentru modurile de oscilație: a) TEM_{00q} , b) TEM_{10q} și respectiv c) TEM_{20q} .

9.3. Stabilitatea rezonatorilor optici

9.3.1. Rezonatorul Fabry-Pérot

Pentru a deduce *condiția de stabilitate a unui rezonator optic* se consideră o cavitate formată din două oglinzi plane (Fabry-Pérot) situate la distanța L una față de alta (fig. 9. 4), rezultatele obținute în acest caz putând fi generalizate la cavitățile optice cu oglinzi de formă oarecare.

Raza de lumină care pleacă din punctul $P_1(x_1, y_1)$ al oglinzii O_1 după direcția care face unghiurile $\theta = \theta_{r1}$ și respectiv $\phi = \phi_{r1}$ cu normala în acel punct la oglindă, în planele xOz și yOz , ajunge în punctul $P_2(x_2, y_2)$ al oglinzii O_2 , după direcția care face unghiurile $\theta = \theta_{i2}$ și $\phi = \phi_{i2}$ cu normala în acel punct. De la oglinda a doua raza pleacă în direcția determinată de unghiurile θ_{r2} și respectiv ϕ_{r2} cu normala în punctul $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 9. 7).

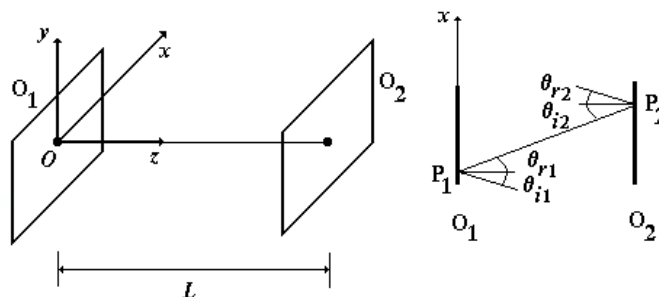


Fig. 9. 7. Rezonatorul optic cu oglinzi plane.

Propagarea dus-întors a razelor de lumină între cele două oglinzi poate fi descrisă cu ajutorul *matricelor de transfer*, T_x^{12}, T_y^{12} :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_{i2} \end{bmatrix} = T_x^{12} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (9.45)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \phi_{i2} \end{bmatrix} = T_y^{12} \begin{bmatrix} y_1 \\ \phi \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

și respectiv *matricelor de reflexie*, R_x, R_y :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_{r2} \end{bmatrix} = R_x \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \phi_{r2} \end{bmatrix} = R_y \begin{bmatrix} y_2 \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (9.48)$$

Parcursul razelor de lumină dus-întors de n ori între oglinzi este descris de matricea B^n , unde:

$$B = RT^{12}RT^{21} \quad (9.49)$$

este matricea Bertolotti.

Stabilitatea unei cavități poate fi definită punând condiția ca după n parcureri dus-întors parametrii $|x|, |y|, |\theta|, |\phi|$ să nu devină mai mari decât valorile inițiale.

Condiția de mai sus poate fi dedusă cu ajutorul matricei B^n . Întrucât prin operația de diagonalizare *urma* și *determinantul* unei matrice nu se modifică și matricea B^n poate fi diagonalizată cu ajutorul matricei transformării A sub forma:

$$B_d^n = A^{-1}B^nA = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (9.50)$$

Valorile proprii, λ_1, λ_2 ale matricei B^n se obțin în urma rezolvării ecuației:

$$\lambda^2 - s \cdot \lambda + p = 0 \quad (9.51)$$

unde

$$s = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ și } p = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \quad (9.52)$$

Pentru ca parametrii $|x|, |y|, |\theta|, |\phi|$ să nu devină mai mari decât valorile inițiale trebuie ca valorile proprii, λ_1, λ_2 să fie mai mici decât unitatea.

Într-acevăr

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (9.53)$$

de unde

$$x_1 = \lambda_1 \cdot x_1 \text{ și } x_2 = \lambda_2 \cdot x_2, \quad (9.54)$$

ceea ce implică următoarele condiții de stabilitate

$$\text{Urm}[B^n] \leq 2 \text{ și } \text{Det}[B^n] \leq 1. \quad (9.55)$$

Ținând seama de relațiile (9.43)-(9.48) în cazul unei cavități cu oglinzi pătrate, rezultă:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.56)$$

iar

$$B_d^n = A^{-1} B^n A = \begin{bmatrix} 1 & 2nL \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.57)$$

9.3.2. Rezonatorul optic cu oglinzi concave

În cazul unei cavități cu oglinzi concave având razele de curbură $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ și aflate la distanța L între unghiurile și coordonatele punctelor $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ există relațiile (fig. 9. 8):

$$x_2 = x_1 + \theta_{r1}L, \theta_{i2} = -\theta_{r1} \quad (9.58)$$

$$\theta_{r2} = -2\alpha - \theta_{i2} \approx -2x_2/\mathcal{R}_2 - \theta_{i2}. \quad (9.59)$$

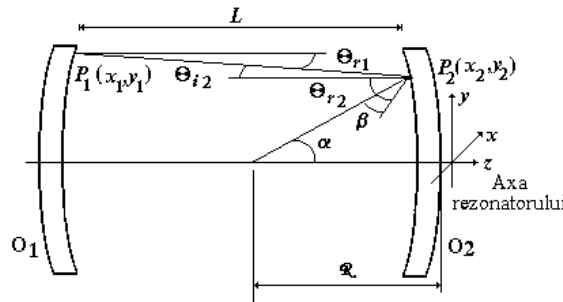


Fig. 9. 8. Rezonatorul optic cu oglinzi concave.

Matricele de transfer și respectiv de reflexie în cazul oglinzii 2 sunt:

$$T_x^{12} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/\mathcal{R}_2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9.60)$$

În final se obține matrice Bertolotti sub forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/\mathcal{R}_1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/\mathcal{R}_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.61)$$

iar

$$\text{Urm}(B) = 1 - 2L/\mathcal{R}_2 - 4L^2/\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 - 2L/\mathcal{R}_2 - 4L/\mathcal{R}_1 + 1. \quad (9.62)$$

Aplicând condițiile (9.55) asupra relației (9.62), rezultă *condiția de stabilitate* sub forma:

$$(1 - L/\mathcal{R}_1)(1 - L/\mathcal{R}_2) \leq 1 \text{ sau } 0 \leq g_1 \cdot g_2 \leq 1. \quad (9.63)$$

Într-un sistem de axe g_1, g_2 în cazul unei cavități cu oglinzi concave având razele de curbură $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ zona cuprinsă între arcele de hiperbolă echilateră și axe corespunde unor geometrii de cavități stabile, aceasta definind *diagrama de stabilitate* (fig. 9. 9).

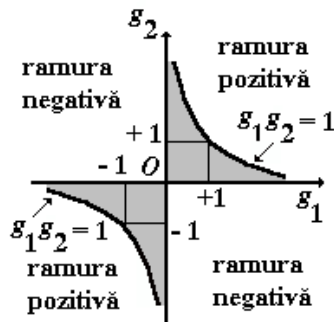


Fig. 9. 9. Diagrama de stabilitate.

9.3.3. Tipuri de rezonatori

În afara rezonatorilor cu oglinzi plane (Fabry-Pérot) și respectiv concave care au fost prezentați mai sus există și alte tipuri. Rezonatorii optici utilizați în fabricarea laserelor trebuie să aibă un factor de calitate, Q cât mai mare pentru ca pragul de oscilație să fie cât mai coborât, selectivitate ridicată a modurilor, (aceasta determinând monocromaticitatea liniei laser emise), volum optim al modurilor, (acesta determinând dimensiunile mediului activ care participă la amplificarea radiației laser emise), cuplaj optim al radiației cu exteriorul în vederea obținerii unei eficiențe cât mai ridicate a dispozitivului etc.

Câteva tipuri mai importante de rezonatori optici cu oglinzi sferice sunt prezentate în tabelul 5. 2.

În figura 5. 10 este prezentată diagrama de stabilitate pentru diferite configurații de rezonatori cu oglinzi sferice.

Rezonatorii cu oglinzi sferice sunt *stabili* dacă fasciculul reflectat de oglinzi este focalizat periodic, (rezonatorii din figura 5. 10 notați cu 1 și 2), *instabili* dacă în urma reflexiilor repetate fasciculul se lărgeste (rezonatorii din fig.

9. 10 notați cu 3, 5, 6, 7, 8 și 9) și *de graniță* (rezonatorii din figura 5. 10 notați cu 4, (concentric), 10, (confocal) și 11, (Fabry-Pérot)).

Tabel 5. 2.

Nr. crt.	Tipul rezonatorului	Razele glinzilor	Distanța dintre oglinzi
1.	Confocal	\mathcal{R}	\mathcal{R}
2.	Plan-paralel	∞	L (oarecare)
3.	Concentric	\mathcal{R}	$2\mathcal{R}$
4.	Nesimetric	$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$	$L < \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$
5.	Semiconfocal	\mathcal{R}, ∞	$\mathcal{R} / 2$
6.	Semiconcentric	\mathcal{R}, ∞	\mathcal{R}
7.	Emisferic	\mathcal{R}, ∞	\mathcal{R}

Rezonatorul confocal are pentru anumite dimensiuni cele mai mici pierderi prin difracție. De asemenea, raportul dintre pierderile prin difracție ale modurilor de ordin superior și pierderile prin difracție ale modului fundamental este mult mai mare decât la ceilalți rezonatori, acest fapt fiind important de considerat, când se dorește funcționarea pe un singur mod.

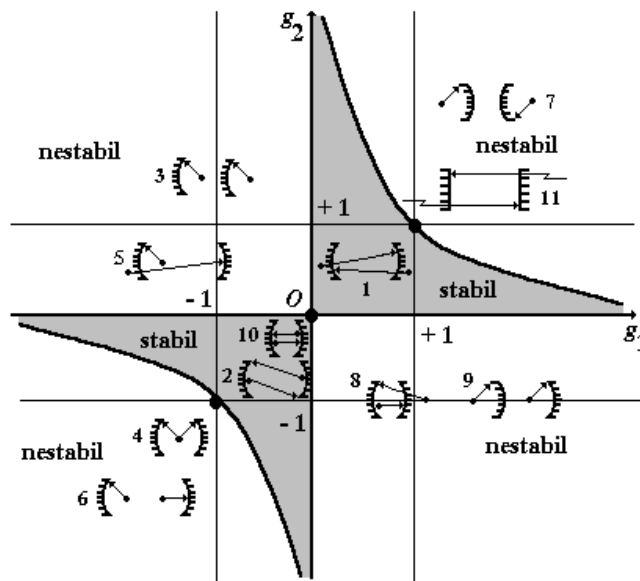


Fig. 9. 10. Diagrama de stabilitate în cazul rezonatorilor cu oglinzi sferice.

În plus, rezonatorul confocal în comparație cu alți rezonatori este mai puțin sensibil la neregularitățile elementelor optice, acest fapt determinând ușurința în alinierea oglinzilor.

Pentru a se evita o configurație instabilă în cazul rezonatorului confocal distanța dintre oglinzi, L se alege mai mare sau mai mică decât distanța confocală, obținându-se un rezonator aproape confocal, care are caracteristicile rezonatorului confocal ideal, cu oglinzi de egală curbura.

Proprietățile rezonatorului semiconfocal sunt echivalente cu cele ale rezonatorului confocal dacă oglinda plană a acestuia este suficient de mare.

Rezonatoarele cu oglinzi plane și respectiv cele cu oglinzi concentrice prezintă pierderi prin difracție relativ mari și sunt mai sensibile la neregularitățile optice decât rezonatorul confocal care este stabil.

Rezonatorul semiconcentric are caracteristici echivalente cu cele ale rezonatorului concentric, dacă oglinda plană este suficient de mare, însă este mai ușor de reglat și are un volum mai mare.

9.4. Fascicule gaussiene

9.4.1. Parametrii fasciculului gaussian

Modul fundamental TEM_{00} este caracterizat de o distribuție gaussiană. Acest rezultat s-a obținut pe baza ecuației Kirchhoff-Fresnel din optică și poate fi corelat cu faptul că transformatele Fourier ale unor funcții gaussiene (realizate prin reflexii pe oglinzi) sunt funcții gaussiene. Se obține o descriere echivalentă dacă se caută o soluție analitică aproximativă a ecuației de undă de tip Helmholtz:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (9.64)$$

unde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ este constanta de propagare în mediu.

Soluția ecuației (9.64) este de forma:

$$u(x, y, z) = u_0 U(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (9.65)$$

unde $\exp(-ikz)$ descrie o undă plană care se propagă după axa z , iar $U(x, y, z)$ reprezintă ecartul unei plane.

Considerând un ecart lent variabil după axa z , adică este îndeplinită inegalitatea

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|, \quad (9.66)$$

în urma înlocuirii soluției (9.65) în ecuația (9.64), rezultă:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} - i2k \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = 0. \quad (9.67)$$

Ținând seama de structura radială a unei gaussiene se poate considera că o soluție particulară a ecuației (9.67) este de forma:

$$U(r_{\perp}, z) = \exp[-iP(z)] \exp\left[-ik \frac{r_{\perp}^2}{q(z)}\right], \quad (9.68)$$

unde $P(z)$ este parametrul longitudinal al fascicului, $q(z)$ este parametrul radial al fascicului, iar

$$r_{\perp}^2 = x^2 + y^2. \quad (9.69)$$

În urma înlocuirii soluției particulare (9.68) în ecuația (9.67), rezultă:

$$-i \frac{2k}{q} - k^2 \frac{r_{\perp}^2}{q^2} - 2k \left[\frac{dP}{dz} - k \frac{r_{\perp}^2}{q^2} \left(\frac{dq}{dz} \right) \right] = 0. \quad (9.70)$$

Ecuația (9.70) este verificată pentru orice r_{\perp} dacă sunt realizate simultan condițiile:

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1, \quad (9.71)$$

și

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)}. \quad (9.72)$$

Ecuația (9.71) conduce la soluția:

$$q(z) = q(0) + z \quad (9.73)$$

unde $q(z=0) = q(0)$. Pentru a separa parte reală de partea imaginară se introduce mărimea:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad (9.74)$$

unde

$$\frac{1}{q(0)} = \frac{i\pi w^2(z)}{\lambda}, \quad (9.75)$$

pentru $R(0) \rightarrow \infty$, unda fiind plană în $z = 0$.

Introducând soluția (9.73) în condiția (9.72), rezultă:

$$P(z) = i \ln \left[\frac{q(0)}{q(0) + z} \right]. \quad (9.76)$$

Ținând seama de relațiile (9.74)-(9.76) soluția generală a ecuației (9.64) este de forma:

$$u = \left\{ \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \right\} \exp \left\{ -i \left[kz - \frac{1}{\text{tg} \frac{z}{z_0}} \right] \right\} \exp \left[-i \frac{kr^2}{2R(z)} \right]. \quad (9.77)$$

În relația (9.77) mărimea

$$w_0 = \left(\frac{2z_0}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.78)$$

corespunde valorii lui r pentru care amplitudinea se reduce la $1/e$ din valoarea pe axă și se numește *lărgimea fascicului* sau *raza fascicului* (fig. 9. 11).

Prin analogie cu w_0 se definește *dimensiunea fascicului* la distanța z prin expresiile echivalente:

$$w(z) = \left[\frac{2}{kz_0} (z_0^2 + z^2) \right]^{\frac{1}{2}} = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (9.79)$$

și de asemenea *raza de curbură a frontului de undă* a fascicului gaussian:

$$R(z) = \frac{1}{z} (z^2 + z_0^2) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (9.80)$$

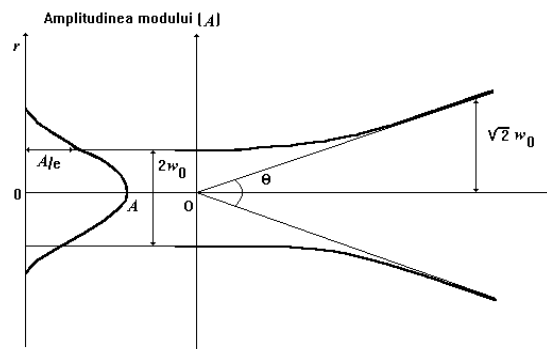


Fig. 9. 11. Parametrii fasciculelor gaussiene.

Primul factor din membrul drept al relației (9.77) descrie dependența amplitudinii modului de coordonatele r și z , de mărimea w_0 corespunzătoare secțiunii transversale minime a fascicului. Mărimea z_0 corespunde unei secțiuni transversale egale cu $\sqrt{2}w_0$.

Al doilea factor evidențiază modificările fazei undei în direcția de propagare, iar al treilea factor evidențiază faptul că planele $z = \text{constant}$ z nu sunt suprafețe echifaze, acestea fiind sferice cu *raza de curbură* $R(z)$, centrul aparent de curbură pentru fronturile de undă nefiind fix.

Lărgimea fascicului cu distanța z se poate exprima cu ajutorul *unghiului de divergență*, θ definit cu ajutorul relației:

$$\theta = 2 \frac{dw}{dz} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (9.81)$$

Amplitudinea câmpului într-un punct se reduce atât datorită dependenței de r cât și datorită divergenței fasciculului.

Soluția ecuației (9.64) scrisă cu ajutorul relației (9.77) definește modul fundamental TEM_{00} al câmpului electromagnetic din rezonatorul laser. Această soluție nu este unică dar este cea mai importantă.

Distribuția transversală a intensității calculată pe baza teoriilor elaborate de Boyd, Gordon și Kogelnik [9.7], [9.8] scade la $1/e^2$ (fig. 9. 12) pentru $x = w_s$, w_s definind *anvelopa fasciculului gaussian* (w_0 fiind lățimea minimă a fasciculului definită de relația (9.66).

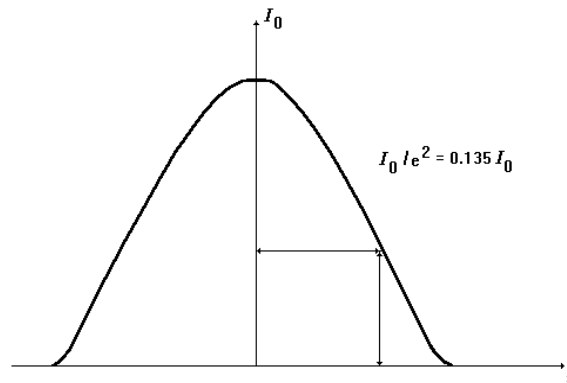


Fig. 9. 12. Distribuția transversală a intensității fasciculului laser.

9.4.2. Fascicule gaussiene în rezonatori stabili

Procesul de generare a modurilor de oscilație în rezonatorii laser stabili trebuie însoțit de cel de *adaptare* dintre razele de curbură ale oglinzilor și respectiv ale fasciculului gaussian. Adaptarea constă în reflexia pe același drum a razelor fasciculului care cad perpendicular pe suprafețele oglinzilor și determină configurația selfconsistentă stabilă caracteristică modurilor cavității.

Pentru a determina dimensiunile unei configurații stabile se consideră un rezonator cu două oglinzi sferice având razele de curbură $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, care nu sunt egale (fig. 9. 13). Astfel, trebuie determinată poziția planului $z = 0$ în raport cu oglinzile pentru care suprafețele echifaze să fie adaptate cu suprafețele oglinzilor. Problema se reduce la rezolvarea următorului sistem de ecuații:

$$z_1 + z_2 = L, \quad (9.82)$$

$$R(z) = -\mathcal{R}_1 = -z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right], \quad (9.83)$$

$$R(z) = \mathcal{R}_2 = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]. \quad (9.84)$$

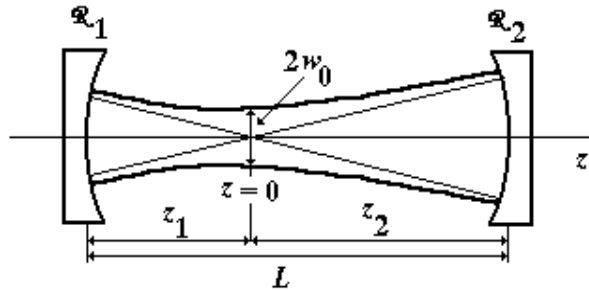


Fig. 9. 13. Reprezentarea fascicului gaussian într-un rezonator cu oglinzi sferice.

Soluțiile sistemului de ecuații (9.82)-(9.84) sunt următoarele:

$$z_0^2 = \frac{L(\mathcal{R}_1 - L)(\mathcal{R}_2 - L)(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - L)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L)^2}, \quad (9.85)$$

$$z_1 = \frac{L(\mathcal{R}_2 - L)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L}, \quad (9.86)$$

$$z_2 = \frac{L(\mathcal{R}_1 - L)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L}. \quad (9.87)$$

unde $z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$.

Problema adaptării modurilor laser, (adică a transformării unor fascicule gaussiene caracterizate de anumiți parametri determinați de geometria rezonatorului în altele, cu proprietăți date), apare și în cazul când aceste sunt injectate în alte sisteme optice, ca de exemplu cristale neliniare, interferometre Fabry-Pérot cu baleiaj etc. În cazul cel mai simplu adaptarea se poate face cu ajutorul unei lentile a cărei distanță focală f trebuie să fie mai mare decât o lungime caracteristică

$$f_0 = \frac{\pi w_1 w_2}{\lambda} \quad (9.88)$$

prin ajustarea distanței dintre lentilă și planele $z = 0$ corespunzătoare celor două fascicule de lărgimi w_1 și w_2 la aceste plane.

9.4.3. Transformarea unui fascicul laser gaussian de către o lentilă

Pentru a deduce relațiile de transformare corespunzătoare unui fascicul laser gaussian se consideră o lentilă având grosimea 2ε și distanța focală f (fig. 9. 14).

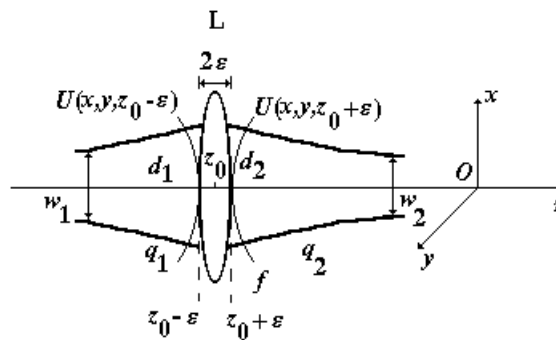


Fig. 9. 14. Reprezentarea transformării unui fascicul laser gaussian de către o lentilă.

La trecerea unei unde printr-o lentilă apare o diferență de fază, transformarea câmpului electric exprimându-se cu ajutorul relației:

$$E(x, y, z_0 - \varepsilon) = E(x, y, z_0 - \varepsilon) \exp \left[\frac{k(x^2 + y^2)}{2f} \right]. \quad (9.89)$$

Aplicând transformarea (9.89) în cazul unei unde gaussiene

$$U(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = \exp[-iP(z)] \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{q(z)} \right], \quad (9.90)$$

rezultă succesiv:

$$U(\sqrt{x^2 + y^2}, z_0 - \varepsilon) \approx \exp \left\{ -i \left[P(z) + k \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] \right\} \quad (9.91)$$

și

$$U(\sqrt{x^2 + y^2}, z_0 + \varepsilon) \approx \exp \left\{ -i \left[P(z) + k \frac{x^2 + y^2}{2} (q^{-1}(z) - f^{-1}) \right] \right\}. \quad (9.92)$$

Din relațiile (9.91) și (9.92) se observă că prin introducerea lentilei în punctul z_0 parametrul radial al fascicului, $q(z)$ devine:

$$\frac{1}{q(z_0 + \varepsilon)} = \frac{1}{q(z_0 - \varepsilon)} - \frac{1}{f}. \quad (9.93)$$

Ținând seama că înainte de lentilă raza fascicului este w_1 , iar parametrul radial

$$q_1 = i\pi \frac{w_1^2}{\lambda}, \quad (9.94)$$

și

$$q(0 - \varepsilon) = q_1 + d_1, \quad (9.95)$$

după trecerea prin lentilă rezultă succesiv:

$$\frac{1}{q(0 + \varepsilon)} = \frac{1}{q(0 - \varepsilon)} - \frac{1}{f} \quad (9.96)$$

$$q_2 = q(0 + \varepsilon) + d_2. \quad (9.97)$$

Cu ajutorul relațiilor (9.95)-(9.97) se poate exprima q_2 în funcție de q_1 :

$$q_2 = \frac{q_1 \left(1 - \frac{d_2}{f} \right) + d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}}{4 - \frac{q_1}{f} - \frac{d_1}{f}}. \quad (9.98)$$

Din relațiile (9.94) și (9.98) se pot determina poziția și raza fascicului după trecerea prin lentilă sub forma:

$$d_2 = f + \frac{(d_1 - f)f^2}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_1^2}{\lambda} \right)^2} \quad (9.99)$$

și

$$w_2^2 = f + \frac{w_1^2 f^2}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_1^2}{\lambda} \right)^2}. \quad (9.100)$$

Pe baza celor prezentate mai sus rezultă că la trecerea unui fascicul gaussian printr-o lentilă structura acestuia nu este afectată însă se modifică poziția (relația (9.99)), raza lui (relația (9.100)) și caracteristicile geometrice (divergența unde).