

7. Ecuațiile generale ale ratelor ca ecuații de bilanț

Pentru a descrie interacția dintre mediul activ (materie) și câmpul electromagnetic (radiație) în teoria laserelor există două modele: *clasic* și *cuantic*.

În cazul modelului clasic există *teoria clasică pură (fenomenologică)* când nu se consideră structura microscopică a materiei, (proprietățile acesteia fiind introduse prin constantele de material), iar câmpul este descris de ecuațiile Maxwell (procese de emisie și absorbție sunt descrise de teoria oscilatorului clasic) și *teoria microscopică (termodinamică sau a ratelor)* când se consideră că materia este formată din atomi, molecule etc., care supun distribuției Boltzmann, iar câmpul este descris de numărul de fotoni (teoria Einstein).

Modelul cuantic include *teoria semiclastică*, când materia (sistem fizic cuantic) este descrisă de formalismul Schrödinger (sau Heisenberg sau de interacție), iar câmpul este descris de ecuațiile Maxwell (procese de emisie și absorbție sunt descrise de teoria semicuantică Dirac) și *teoria cuantică pură*, când materia (sistem fizic cuantic) este descrisă de formalismul Schrödinger sau Heisenberg sau de interacție (Dirac, Tomonaga și Schwinger), iar câmpul este cuantificat (sistem fizic cuantic), interacția cu materia fiind descrisă cu ecuațiile electrodinamicii cuantice (Feynman, Tomonaga și Schwinger).

Cu ajutorul teoriei cuantice care este cea mai generală dar și cea mai dificilă din punct de vedere al formalismului matematic este posibil să se deducă în anumite condiții: lărgimea liniei laser, condiția de prag, generarea pulsurilor laser gigant, generarea de armonici, superradianța, etc. care se pot obține și în cazul formalismelor prezentate mai sus [7.1]-[7.6].

7.1. Ecuațiile ratelor pentru un mod și un sistem atomic cu două nivele

Ecuațiile ratelor reprezintă ecuații de bilanț atât pentru *densitatea de energie (numărul de fotoni, n)* a modului de oscilație considerat al câmpului electromagnetic din cavitatea Fabry-Pérot, în prezența pierderilor și a câștigului,

cât și pentru populațiile sistemului atomic cu două nivele ($N_{1,2}$) aflat în interacție cu câmpul de radiație din cavitate [7.1]-[7.8].

7.1.1. Ecuațiile de câmp

Variația în timp a numărului de fotoni ai modului, $\frac{dn}{dt}$, are loc datorită

următoarelor cauze:

- pierderile de fotoni prin oglinzile rezonatorului și prin alte mecanisme (refracție, împrăștiere, neomogenități) care sunt descrise de termenul $-2\kappa n$, unde

$-2\kappa = \frac{1}{\tau_c}$, τ_c fiind timpul de viață al fotonului în cavitate,

- emisia spontană determinată de termenul WN_2 , unde W este rata de emisie spontană pentru un singur atom,

- emisia stimulată determinată de termenul $WN_2 n$ care este proporțională cu densitatea de energie a mediului,

- absorbția, luată în considerare prin termenul $-WN_1 n$.

Prin urmare ecuația de câmp în cazul laserului cu două nivele este de forma:

$$\frac{dn}{dt} = W(N_2 - N_1)n + WN_2 - 2\kappa n. \quad (7.1)$$

(Ecuațiile ratelor pentru fotoni au fost scrise prima dată de A. Einstein, fiind aplicate la studiul laserelor de H. Statz și G. A. Mars în anul 1960).

7.1.2. Ecuațiile pentru populații

Populațiile celor două nivele energetice prezentate în figura 2. 1 se modifică în timp atât datorită emisiei stimulate și absorbției cât și datorită tranzițiilor cauzate de pompa optic și de procesele ne coerente de tipul: ciocniri de speța a doua, tranziții spontane neradiative și radiative, luate în considerare prin ratele de tranziție w_{12} sau w_{21} .

Rezultă ecuațiile:

$$\frac{dN_2}{dt} = -W(N_2 - N_1)n - N_2 w_{21} + N_1 w_{12} \quad (7.2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W(N_2 - N_1)n + N_2 w_{21} - N_1 w_{12}. \quad (7.3)$$

Introducând notațiile

$$D = N_2 - N_1 \text{ și } N_0 = N_2 + N_1 \quad (7.4)$$

din relațiile (7.2) și (7.3) se obține ecuația pentru diferența de populație, D sub forma:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2DWn \quad (7.5)$$

unde

$$w_{12} + w_{21} = \frac{1}{T} \text{ și } D_0 = \frac{w_{12} - w_{21}}{w_{12} + w_{21}} N_0. \quad (7.6)$$

Condiția de efect laser, $n > 0$ rezultă din ecuația (7.1) sub forma:

$$WD > 2\kappa. \quad (7.7)$$

Întrucât lărgimii liniei spectrale atomice $\Delta\nu$ îi corespunde în rezonatorul de volum V

$$n_m = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \Delta\nu \quad (7.8)$$

moduri de oscilație, se poate utiliza pentru W expresia:

$$W = \frac{1}{\tau_r n_m} \quad (7.9)$$

unde τ_r este *timpul de viață radiativ al atomului* (emit spontan $\frac{1}{\tau_r}$ atomi pe secundă). Deci, condiția de efect laser (7.7) se poate scrie sub forma:

$$\frac{Dc^3}{8\tau_r \pi \nu^2 V \Delta\nu} > \frac{1}{\tau_c}, \quad (7.10)$$

stabilită pentru prima dată în anul 1958 de A. Schawlow și C. H. Townes. Din condiția (7.10) rezultă influența diferiților parametri (τ_c , $\Delta\nu$, D) asupra regimului de funcționare a laserului. Dacă se neglijează emisia spontană în ecuația (7.1) se obține soluția de regim staționar:

$$\frac{dn}{dt} = 0 \text{ și } \frac{dD}{dt} = 0 \quad (7.11)$$

unde

$$n = \frac{D_0 W - 2\kappa}{4TW\kappa}. \quad (7.12)$$

În cazul unui laser cu două nivele energetice mecanismele utilizate pentru excitarea atomilor pe nivelul superior determină în același timp și dezexcitarea acestora. De exemplu, dacă pentru pompaj atomii sau moleculele ce constituie mediul activ sunt iradiați, radiația electromagnetică induce tranziții atât de pe nivelul inferior pe cel excitat (absorbție) cât și tranziții inverse (emisie stimulată). În cel mai bun caz pentru procesul de pompaj optic se pot produce același număr de atomi în starea excitată ca și în starea fundamentală, prin saturarea tranziției $1 \leftrightarrow 2$ (fig. 6. 1). În acest mod nu se poate obține o inversie de populație pozitivă în regim staționar.

Rezolvarea acestei probleme se poate face, de exemplu, prin folosirea unui mediu activ (atomi, molecule) care să aibă trei sau patru nivele energetice. Este

posibil ca timpul de viață al nivelului excitat inferior (*nivel metastabil*) să fie mai lung (de ordinul ms) în comparație cu cel al altor nivele excitate, inversia de populație realizându-se între acest nivel excitat și cel fundamental. Popularea nivelului metastabil se face în acest caz în urma unei *tranziții neradiative* (foarte rapide) a atomilor de pe celălalt nivel excitat superior, unde au fost pompați de radiația electromagnetică.

7.2. Ecuațiile ratelor pentru un sistem atomic cu trei nivele

Diagrama nivelelor energetice pentru *laserul cu trei nivele* este prezentată schematic în figura 3. 1.

Laserul cu trei nivele tipic este cel cu rubin (Al_2O_3) dopat cu Cr^{+++}

care emite o radiație cu lungimea de undă 6943 \AA .

Ecuațiile ratelor pentru laserul cu trei nivele se scriu sub forma:

$$\frac{dN_3}{dt} = W_p(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_3}{\tau_{31}}, \quad (7.13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_i(N_1 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}}, \quad (7.14)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_p(N_3 - N_1) + W_i(N_2 - N_1) + \frac{N_3}{\tau_{31}} - \frac{N_2}{\tau_{21}}, \quad (7.15)$$

$$\frac{d\rho_E}{dt} = W_i(N_2 - N_1) + K \frac{N_3}{\tau_{21}} - \frac{\rho_E}{\tau_c}, \quad (7.16)$$

unde N_i ($i = 1, 2, 3$) reprezintă populațiile celor trei nivele, W_p este rata de pompaj de pe nivelul 1 pe nivelul 3, W_i este rata de emisie indusă sau de absorbție (ambele fiind proporționale cu numărul de fotoni), τ_{ij} sunt constantele de timp de relaxare spontană între nivelele i și j (timpul de relaxare τ_{31} este suficient de mare astfel încât termenul corespunzător se poate neglija), iar ρ_E este densitatea de energie din cavitatea Fabry-Pérot. Pierderile de energie din cavitatea Fabry-Pérot sunt luate în considerare prin termenul $\frac{\rho_E}{\tau_c}$, τ_c reprezentând timpul de viață

al fotonului în cavitate. Termenii $W_i(N_2 - N_1)$ și $K \frac{N_2}{\tau_{21}}$, $\left(K = \frac{c^3}{8\pi^2 \Delta\nu V} \ll 1 \right)$ reprezintă energia primită de câmp prin emisie stimulată, respectiv prin fluorescență (K fiind fracțiunea din radiația de

fluorescență emisă în mod coerent). Coeficienții de emisie stimulată W_i depind de densitatea de energie prin relația:

$$W_i = B \left(\frac{\rho_E}{\Delta\nu} \right) = B_s \rho_E \quad (7.17)$$

unde B este coeficientul de emisie stimulată Einstein.

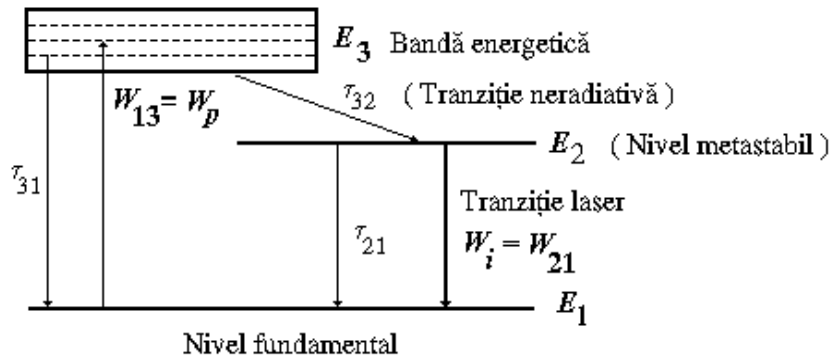


Fig. 7. 1. Diagrama nivelelor energetice ale unui laser cu trei nivele energetice.

Întrucât

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_0, \quad (7.18)$$

N_0 reprezentând numărul total de atomi (molecule) din mediul activ, se poate scrie că:

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0. \quad (7.19)$$

Ținând seama de relația (7.17) se observă că ecuațiile ratelor (7.14)-(7.16) sunt ecuații diferențiale neliniare datorită produselor de forma $\rho_E N_i$.

În cazul regimului staționar

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = \frac{d\rho_E}{dt} = 0. \quad (7.20)$$

Pentru o putere de pompare scăzută (mult sub prag) ρ_E are valori mici, astfel încât în ecuațiile (7.14)-(7.16) pot fi neglijați termenii neliniari, obținându-se pentru populații și densitatea de energie în regim staționar următoarele soluții:

$$\frac{N_3}{N_0} = \frac{\tau_{32}}{2\tau_{32} + 1/W_p + \tau_{21}} \quad (7.21)$$

$$\frac{N_2}{N_0} = \frac{\tau_{21}}{2\tau_{32} + 1/W_p + \tau_{21}} \quad (7.22)$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{\tau_{32} + 1/W_p}{2\tau_{32} + 1/W_p + \tau_{21}} \quad (7.23)$$

$$\rho_E = \frac{K(N_2/\tau_{21})}{1/\tau_c - B_s(N_2 - N_1)}. \quad (7.24)$$

Pentru o putere de pompaj ridicată, presupunând că este satisfăcută condiția

$$\rho_E/\tau_c > K(N_3/\tau_{32}) \quad (7.25)$$

în regim staționar se obține:

$$\Delta N = \frac{1}{B_s \tau_c} \quad (7.26)$$

unde

$$\Delta N = D = N_2 - N_1. \quad (7.27)$$

În acest caz soluția sistemului de ecuații (7.14)-(7.16) este de forma:

$$\frac{N_3}{N_0} = W_p \tau_{32} \left[\frac{1 - (1/N_0 B_s \tau_c)}{3W_p \tau_{32} + 2} \right] \quad (7.28)$$

$$\frac{N_2}{N_0} = \frac{1 + W_p \tau_{32} + (1/N_0 B_s \tau_c)(3W_p \tau_{32} + 1)}{3W_p \tau_{32} + 2} \quad (7.29)$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{[1 - (1/N_0 B_s \tau_c)](1 + W_p \tau_{32})}{3W_p \tau_{32} + 2} \quad (7.30)$$

$$\frac{\rho_E}{N_0} \left(\frac{\tau_{21}}{\tau_c} \right) = \frac{[W_p(\tau_{21} - \tau_{32}) - 1] - (1/N_0 B_s \tau_c)[W_p(\tau_{21} - \tau_{32}) + 1]}{3W_p \tau_{32} + 2}. \quad (7.31)$$

Presupunând că nivelul laser fluorescent are timpul de viață mult mai mare decât celelalte nivele (este metastabil) din ecuațiile (7.29)-(7.31) rezultă pentru valoarea minimă a lui W_p condiția:

$$W_p \tau_{21} \geq \frac{NB_s \tau_c + 1}{NB_s \tau_c - 1}. \quad (7.32)$$

Pentru a obține dependența de timp a densității de energie ρ_E trebuie integrată ecuația (7.16). Neglijând emisia spontană rezultă:

$$\frac{1}{\rho_E} \frac{d\rho_E}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left[\frac{\Delta N}{(\Delta N)_p} - 1 \right] \quad (7.33)$$

unde

$$N_p = (N_2 - N_1)_p = \frac{1}{B_s \tau_c} \quad (7.34)$$

este inversia de populație la pragul de oscilație. Dacă

$$\Delta N > (\Delta N)_p \quad (7.35)$$

rezultă

$$\rho_E = \rho_{E_0} \exp \left\{ \int \frac{dt}{\tau_c} \left[\frac{\Delta N}{(\Delta N)_p} - 1 \right] \right\}, \quad (7.36)$$

adică o creștere exponențială a densității de energie. Ecuția (7.36.) este dificil de integrat întrucât nu este cunoscută dependența de timp a lui ΔN . Se poate totuși

determina valoarea maximă a lui ρ_E care se obține pentru $\frac{d\rho_E}{dt} = 0$, adică

$\Delta N = (\Delta N)_p$, astfel încât ΔN este chiar valoarea de prag a inversiei de populație.

7.3. Ecuatiile ratelor pentru un sistem atomic cu patru nivele

Printre laserele cu patru nivele cele mai cunoscute se numără laserul cu ioni de neodim introduși ca impurități în cristalul de $Y_2Al_2O_{12}$ și laserul cu sticlă dopată cu neodim.

Diagrama nivelurilor energetice pentru laserul cu patru nivele este prezentată schematic în figura 3. 2.

Dezavantajul principal al laserelor cu trei nivele constă în faptul că nivelul inferior care participă la tranziția laser este nivelul fundamental, ceea ce face ca inversia de populație să se obțină greu. Acest neajuns este înlăturat în cazul laserului cu patru nivele, unde prin emisie stimulată atomii trec pe un nivel intermediar, care este în general foarte puțin populat, astfel încât inversia de populație se realizează mai ușor.

Ecuatiile ratelor pentru laserul cu patru nivele pot fi scrise sub forma:

$$\frac{dN_4}{dt} = W_p(N_1 - N_4) - \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_4}{\tau_{42}} - \frac{N_4}{\tau_{41}} \quad (7.37)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = -W_i(N_3 - N_2) + \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_3}{\tau_{31}} \quad (7.38)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_i(N_3 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} + \frac{N_4}{\tau_{42}} \quad (7.39)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_p(N_4 - N_1) + \frac{N_4}{\tau_{41}} + \frac{N_3}{\tau_{31}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} \quad (7.40)$$

$$\frac{d\rho_E}{dt} = W_i(N_3 - N_2) + K \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{\rho_E}{\tau_c} \quad (7.41)$$

unde N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) reprezintă populațiile celor patru nivele, W_p este rata de pompaj de pe nivelul 1 pe nivelul 4, W_i este rata de emisie indusă sau de absorbție (ambele fiind proporționale cu numărul de fotoni), τ_{ij} sunt constantele de timp de relaxare spontană între nivelele i și j , iar ρ_E este densitatea de energie din cavitatea Fabry-Pérot.

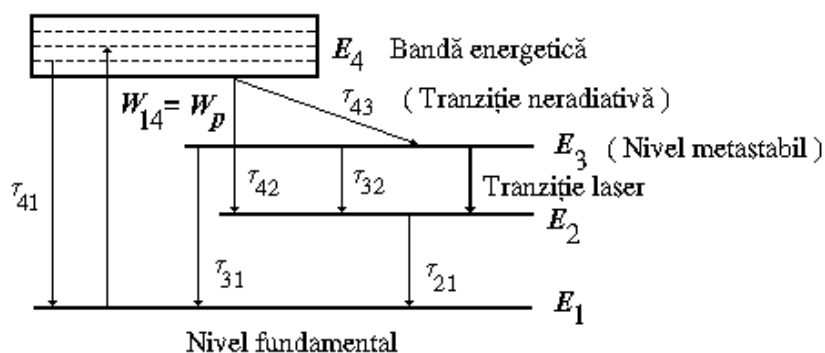


Fig. 7. 2. Diagrama nivelelor energetice ale unui laser cu patru nivele energetice.

Se poate demonstra că timpii de relaxare τ_{42} și τ_{31} se pot neglija. În plus, se consideră că nivelul laser fluorescent are timpul de viață mult mai mare decât al celorlalte nivele (este metastabil). În aceste condiții ecuațiile ratelor (7.37)-(7.41) se pot transforma și analiza conform celor corespunzătoare laserului cu trei nivele.

Se poate considera că nivelul laser inferior este *aproape populat* pentru laserul cu trei nivele și respectiv *aproape nepopulat* în cazul celui cu patru nivele. Inversia de populație are un nivel aproximativ constant în cazul laserului cu trei nivele și este proporțională cu puterea pentru laserul cu patru nivele.

Pentru a fi operative avantajele laserului cu patru nivele trebuie ca populația N_2 a nivelului laser inferior să rămână foarte mică, de unde rezultă condiția suplimentară ca timpul de relaxare τ_{21} să fie foarte scăzut. Totodată este necesară condiția de echilibru: $dN_1/dt = 0$. Cu aceste condiții ecuațiile ratelor pentru laserul cu patru nivele capătă forma:

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{21}} - W_i(N_3 - N_2) - \frac{N_3}{\tau_{32}}, \quad (7.42)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{21}} + W_i(N_3 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}}. \quad (7.43)$$

Ecuatiile (7.42)-(7.43) sunt identice cu ecuațiile unui laser cu trei nivele dacă $W_p = 1/\tau_{21}$ și $\tau_s = \tau_{32}$.

Prin integrarea sistemului de ecuații diferențiale (7.37)-(7.41) se pot calcula valoarea minimă a ratei de pompaj (de pe nivelul fundamental 1 pe cel excitat superior 4), valoarea maximă a densității de energie din cavitatea Fabry-Pérot din condiția $\frac{d\rho_E}{dt} = 0$, (adică $\Delta N = (\Delta N)_p$, unde ΔN reprezintă

diferența de populație, iar $(\Delta N)_p$ este valoarea de prag a inversiei de populație) și puterea de oscilație totală.

Utilizarea sticlei dopată cu neodim ca mediu laser activ a fost propusă de către Switzer în anul 1961.

7.4 Studiul regimului dinamic al laserelor cu ajutorul teoriei ratelor

Teoria ratelor pentru lasere dezvoltată ulterior de mai mulți autori care lucrează în domeniul laser, cele mai importante contribuții fiind cele ale lui H. Haken [7.6].

Numărul de fotoni pe unitatea de volum, în intervalul de frecvență $(\omega, \omega + d\omega)$ pe mod este:

$$n = \frac{1}{p(\omega)} \frac{dn_f}{d\omega} = \frac{\pi^2 v^3}{\hbar \omega_3} w_\omega(\omega, T) \text{ sau } n = \frac{B_{21}}{A_{21}} w_\omega(\omega, T), \quad (7.44)$$

unde

$$p(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 v^3} d\omega, \quad (7.45)$$

reprezintă numărul de moduri de oscilație a câmpului electromagnetic în intervalul

de frecvențe $(\omega, \omega + d\omega)$, $v = \frac{c}{n}$, B_{21} este coeficientul Einstein de emisie indusă

și A_{21} este probabilitatea de emisie spontană pe unitatea de timp.

Ținând seama că atomii se distribuie pe nivelele energetice conform relației Boltzmann:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} w_\omega(\omega, T)}{A_{21} + B_{21} w_\omega(\omega, T)} \quad (7.46)$$

și că $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$, rezultă:

$$\frac{g_2}{g_1} N_1 n = (1 + n) N_2, \quad (7.47)$$

adică, emisia spontană corespunde emisiei induse, dacă există un singur foton pe mod.

Ecuțiile de mai sus permit stabilirea atât deducerea condiției de prag cât și studiul *regimului staționar* și *dinamic* pentru un laser.

În cazul studiului regimului dinamic se ține seama de faptul că imediat după momentul inițial ($t \geq 0$), schimbarea populațiilor se face lent, adică, ecuația pentru *diferența de populație* D (relația (7.5)) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2DWn \cong 0 \quad (7.48)$$

obținându-se

$$D \approx D_0(1 - 2T_1Wn). \quad (7.49)$$

Introducând mărimea D din relația (7.49), în ecuația (7.1), se obține:

$$\frac{dn}{dt} \cong \left(WD_0 - \frac{1}{\tau_c} \right) n - 2D_0T_1W^2n^2. \quad (7.50)$$

În cazul regimului dinamic pot exista atât regimul de *pompaj slab* cât și cel de *pompaj puternic*.

Pompajul slab corespunde condiției:

$$WD_0 - \frac{1}{\tau_c} < 0. \quad (7.51)$$

În acest caz numărul de fotoni este foarte mic, deci:

$$2D_0T_1W^2n^2 \approx 0. \quad (7.52)$$

Ținând seama de relația (7.52), ecuația (7.50) corespunzătoare regimului dinamic devine:

$$\frac{dn}{n} = - \left(WD_0 - \frac{1}{\tau_c} \right) dt. \quad (7.53)$$

Soluția ecuației (16) este:

$$n = C \exp \left[- \left(WD_0 - \frac{1}{\tau_c} \right) t \right], \quad (7.54)$$

unde constanta C se determină din condiția ca la $t = 0$ în mediul activ să existe $n \cong n_{sp}$ fotoni (adică, fotonii emiși să fie corespunzători celor emiși spontan).

Astfel, rezultă:

$$C = n_{sp} \quad (7.55)$$

și expresia (7.54) capătă forma:

$$n = n_{sp} \exp \left[- \left(WD_0 - \frac{1}{\tau_c} \right) t \right], \quad (7.56)$$

al cărei grafic este dat în figura 3. 3. Se observă că în acest caz nu este posibilă realizarea acțiunii laser.

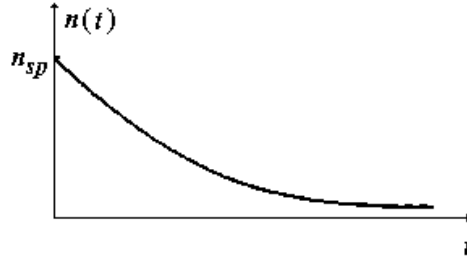


Fig. 7. 3. Numărul de fotoni funcție de timp în cazul pompajului slab.

În cazul pompajului puternic, rezultă

$$WD_0 - \frac{1}{\tau_c} > 0 \quad (7.57)$$

și

$$2D_0T_1W^2n^2 \neq 0. \quad (7.58)$$

Ținând seama de condițiile de mai sus trebuie rezolvată ecuația:

$$\frac{dn}{dt} = \left(D_0W - \frac{1}{\tau_c} \right) n - 2D_0T_1W^2n^2, \quad (7.59)$$

care evidențiază faptul că după *regimul tranzitoriu* urmează *regimul permanent* guvernat de ecuația:

$$\left(D_0W - \frac{1}{\tau_c} \right) n_0 - 2D_0T_1W^2n_0^2 = 0. \quad (7.60)$$

Soluțiile ecuației (7.60) sunt:

$$(n_0)_1 = 0 \text{ și } (n_0)_2 = n_0 = \frac{D_0W\tau_c - 1}{2D_0W^2T_1\tau_c}. \quad (7.61)$$

Ținând seama de soluția a doua din relația (7.61), ecuația (7.59) se poate scrie sub forma

$$\frac{dn}{dt} = 2D_0T_1W^2(n_0 - n)n. \quad (7.62)$$

În stabilirea regimului permanent, n_0 , se trece prin *regimul tranzitoriu* plecând, inițial, de la un număr de fotoni mai mic decât cei din *regimul permanent* sau de la un număr de fotoni mai mare decât cei din *regimul permanent*.

În cazul în care numărul de fotoni inițial este mai mic decât numărul de fotoni din regimul permanent, ecuația (7.62) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dn}{n(n_0 - n)} = 2D_0T_1W^2 dt, \quad (7.63)$$

a cărei soluție este:

$$-\frac{1}{n_0} \ln \left| \frac{n_0}{n} - 1 \right| = 2D_0T_1W^2 t + C. \quad (7.64)$$

Punând condiția ca la $t = 0$ în mediul activ să existe $n = n_f < n_0$ fotoni, se obține:

$$C = -\frac{1}{n_0} \ln \left| \frac{n_0}{n_f} - 1 \right|. \quad (7.65)$$

Din relațiile (7.63) și (7.65), rezultă:

$$n = \frac{\frac{n_0 n_f}{n_0 - n_f} \exp[2D_0T_1W^2 n_0 t]}{1 + \frac{n_f}{n_0 - n_f} \exp[2D_0T_1W^2 n_0 t]}, \quad (7.66)$$

iar graficul este prezentat în figura 3. 4.

Din relația (7.66) se observă că la $t = 0$ există $n = n_f$ fotoni, iar pentru $t \rightarrow \infty$, se obțin $n = n_0$ fotoni. Deci, după emisia spontană de fotoni, datorită pompajului puternic utilizat, există centri activi suficienți și datorită emisie stimulate care apare, se ajunge la regimul staționar în care $n_0 \gg n_f$.

În cazul în care numărul de fotoni la momentul inițial este mai mare decât numărul de fotoni în regim permanent, ecuația (7.62) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dn}{n(n - n_0)} = -2D_0T_1W^2 dt. \quad (7.67)$$

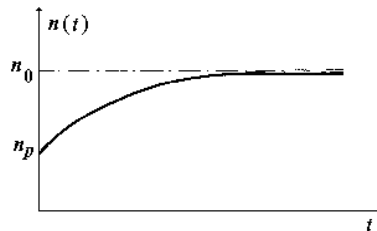


Fig. 7. 4. Numărul de fotoni funcție de timp în cazul pompajului puternic când numărul inițial de fotoni este mai mic decât cel corespunzător regimului staționar.

Soluția ecuației (7.67) este

$$\frac{1}{n_0} \ln \left| 1 - \frac{n_0}{n} \right| = -2D_0 T_1 W^2 t + C. \quad (7.68)$$

Dacă la momentul $t = 0$ există $n = n_m > n_0$ fotoni se obține

$$C = \frac{1}{n_0} \ln \left| 1 - \frac{n_0}{n_m} \right|, \text{ care introdusă în expresia (7.68), conduce la}$$

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{n_m - n_0}{n_m} \exp[-2D_0 T_1 W^2 n_0 t]}. \quad (7.69)$$

Dependența $n = n(t)$ dat de relația (7.69) este prezentată în figura 3. 5.

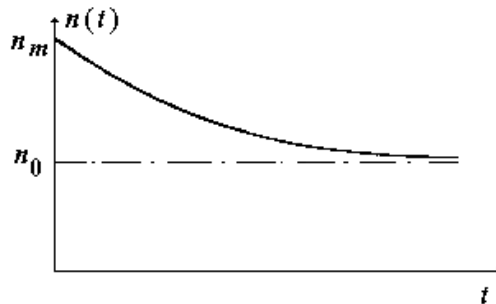


Fig. 7. 5. Numărul de fotoni funcție de timp în cazul pompajului puternic când numărul inițial de fotoni este mai mare decât cel corespunzător regimului staționar.

Ținând seama de relația (7.69), rezultă că la $t = 0$, există $n = n_m$ fotoni, iar pentru $t \rightarrow \infty$, se obțin $n = n_0$ fotoni.

Din figura 3. 5 se observă că oricât de mare ar fi numărul inițial de fotoni, regimul permanent de funcționare a laserului se stabilește la numărul de fotoni n_0 dictat de numărul de centri activi corespunzători pompajului existent.

3.5. Ecuatiile generale ale ratelor pentru mai multe moduri și un sistem cu mai multe nivele energetice

Ecuatiile ratelor (7.1)–(7.3) pentru laserul cu două nivele se pot generaliza în cazul unui sistem cu mai multe nivele energetice. În scrierea acestor ecuații trebuie să se țină seama de existența mai multor moduri, având o distribuție spațială dată, care interacționează cu atomii mediului activ cu mai multe nivele, a căror distribuție în spațiu trebuie, de asemenea, specificată.

Cele M moduri ale cavității sunt specificate cu indicele r , iar cele P nivele energetice ale atomilor sunt specificate de indicele s . Astfel, în cazul general ecuațiile (7.1)–(7.3) pentru laserul cu două nivele devin (fig. 7. 6):

– *ecuația de câmp:*

$$\frac{dn_r}{dt} = -2\kappa_r n_r + n_r \underbrace{\sum_s W_{mn,r,s} (N_m - N_n)}_{\text{emisie stimulată}} + \underbrace{\sum_s W_{mn,r,s} N_{n,s}}_{\text{emisie spontană}}, \quad (7.70)$$

– *ecuațiile de populații:*

– *pentru nivelele între care are loc tranziția laser*

$$\frac{dN_{m,s}}{dt} = \sum_{l \neq m} w_{lm,s} N_{l,s} - N_{m,s} \sum_{l \neq m} w_{ml,s} - \sum_s n_r W_{mn,r,s} (N_m - N_n)_s, \quad (7.71)$$

$$\frac{dN_{n,s}}{dt} = \sum_{l \neq n} w_{lm,s} N_{l,s} - N_{n,s} \sum_{l \neq n} w_{nl,s} - \sum_r W_{mn,r,s} (N_m - N_n)_s, \quad (7.72)$$

– *pentru alte nivele utilizate pentru pompaj*

$$\frac{dN_{j,s}}{dt} = \sum_{l \neq j} w_{lj,s} N_{l,s} - N_{j,s} \sum_{l \neq j} w_{jl,s}, \quad (7.73)$$

unde termenul $-2\kappa_r n_r$ reprezintă rata de pierderi a modului r , iar $N_{m,s}$ este numărul de ocupare al nivelului laser superior.

În relațiile (7.70)–(7.72) rata de emisie pentru un singur atom în aproximația de dipol electric este dată de relația:

$$W_{mn,r,s} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\Omega_s - \Omega_r)^2} |g_{sr}|^2 \quad (7.74)$$

unde

$$g_{sr} = i \sqrt{\frac{2\pi\omega_r}{\hbar}} \vec{e}_r \vec{d}_{nm} U_r(\vec{x}_s) \quad (7.75)$$

sau

$$|g_{sr}|^2 = g^2 V |U_r(\vec{x}_s)|^2. \quad (7.76)$$

Ecuațiile (7.71)–(7.73) nu sunt independente, iar acest fapt este exprimat cu ajutorul condiției:

$$\sum_{l=1}^P N_{l,s} = \text{const.} \quad (7.77)$$

În relația (7.74) mărimea $U_r(\vec{x}_s)$ reprezintă amplitudinea modului în punctul \vec{x}_s , V este volumul cavității, \vec{d}_{nm} este elementul de matrice al tranziției de dipol electric, \vec{e}_r este versorul direcției de polarizare a modului, ω_r este

frecvența modulului, Ω_s este frecvența de tranziție a atomului s , iar γ este semilărgimea liniei spectrale lorentziene ($\gamma = 1/T_2 = \Delta\omega_L$).

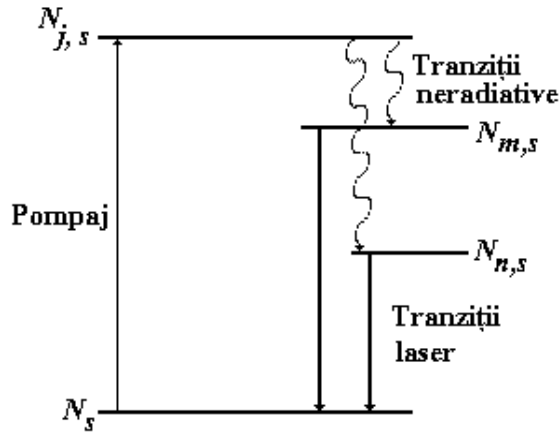


Fig. 7. 6. Diagrama nivelelor energetice ale unui laser cu mai multe nivele energetice.

Dacă se neglijează emisia spontană în ecuația (7.70), cu condiția de regim staționar

$$\frac{dn_r}{dt} = \frac{dN_{l,s}}{dt} = 0 \tag{7.78}$$

se obține expresia inversiei de populație sub forma:

$$\Delta N_{mn,s} = \frac{A_s}{B_s + \left(\sum_r^M n_r W_{mn,r,s} \right) C_s} \tag{7.79}$$

unde A_s, B_s, C_s sunt factori independenți de n_r .

Pentru a determina numărul de fotoni pe mod funcție de pompaj, la regim staționar, se introduce relația (7.79) în ecuația (7.70) obținându-se un sistem de M ecuații având ca necunoscute mărimile $n_r > 0$. Prin particularizarea ecuațiilor de mai sus se obțin rezultatele cunoscute pentru laserul cu două, trei sau patru nivele.