

## 3. Optica ondulatorie

### 3.1. Teoria câmpului electromagnetic a lui Maxwell

#### 3.1.1. Vectorii câmpului electromagnetic

*Câmpul electromagnetic* reprezintă o formă de existență a materiei într-un domeniu din spațiu caracterizat de patru vectori: *intensitatea câmpului electric*,  $\vec{E}(x, y, z, t)$ , (unde  $x, y, z$  reprezintă coordonatele carteziene, iar  $t$  este timpul), *inducția electrică*,  $\vec{D}(x, y, z, t)$ , *intensitatea câmpului magnetic*,  $\vec{H}(x, y, z, t)$  și *inducția magnetică*,  $\vec{B}(x, y, z, t)$ . Acesta este format, ca ansamblu indisolubil, din *câmpul electric* și *câmpul magnetic*, poate exista atât în interiorul corpurilor cât și în vid și poate fi generat atât de corpurile care se găsesc în anumite stări sau poate avea o existență independentă. Vectorii prezentați mai sus sunt continui în funcție de coordonatele carteziene și de timp în orice punct al spațiului, iar derivatele acestora sunt de asemenea continue. Relațiile matematice pe care le satisfac acești vectori nu pot fi deduse, aceste trebuind să fie obținute din experiență. Vectorii  $\vec{E}(x, y, z, t)$  și  $\vec{B}(x, y, z, t)$  sunt considerați *vectori de câmp fundamentali*, iar vectorii  $\vec{D}(x, y, z, t)$  și  $\vec{H}(x, y, z, t)$  se pot obține din primii, împreună cu proprietățile electrice și magnetice care caracterizează mediul în care se manifestă câmpul [3.1]-[3.5].

Relațiile fundamentale dintre vectorii de mai sus sunt reprezentate de *ecuațiile Maxwell* și de *legile de material*.

#### 3.1.2. Bazele experimentale ale teoriei câmpului electromagnetic

Din punct de vedere al teoriei macroscopice câmpul electromagnetic este generat de o distribuție de sarcini și de curenți electrici.

În electromagnetism *sarcina electrică* este o mărime fundamentală la fel ca masa, lungimea și timpul din mecanică. Sarcinile electrice aflate în repaus și (sau)

în mișcare exercită forțe asupra altor sarcini electrice aflate în mișcare și (sau) repaus. Aceste forțe se numesc *forțe electromagnetice*, iar câmpurile corespunzătoare, *câmpuri electromagnetice*.

Din punct de vedere experimental se demonstrează că: 1) există două tipuri de sarcini electrice, (pozitive și negative), 2) orice sarcină este un multiplu întreg al sarcinii electrice elementare care are valoarea  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  și 3) sarcina electrică se conservă și este un invariant scalar. Sarcina electrică netă,  $q$  conținută într-un volum  $V$  poate fi exprimată funcție de *densitatea de sarcină volumică*  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  sub forma:

$$q = \int_V \rho \cdot dV. \quad (3.1)$$

Sarcinile electrice aflate în mișcare generează *curenți electrici*. *Intensitatea curentului electric* reprezintă cantitatea de sarcină netă (pozitivă sau negativă) care traversează o suprafață în unitatea de timp și este definită de relația:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.2)$$

Intensitatea curentului electric poate fi exprimată funcție de *densitatea de curent electric*,  $\vec{J}$  (care specifică în fiecare punct atât intensitatea fluxului de sarcini prin suprafața  $S$  cât și direcția mișcării acestora) sub forma:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS. \quad (3.3)$$

Ținând seama de teorema Gauss în cazul unei suprafețe închise  $\Sigma$  care determină un volum  $V_\Sigma$ , (curentul fiind un flux de sarcini care traversează suprafața) din relațiile (3.1) și (3.3), rezultă:

$$\int_\Sigma \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = - \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \rho \cdot dV \quad (3.4)$$

sau

$$\int_{V_\Sigma} \left( \text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \cdot dV = 0. \quad (3.5)$$

Întrucât volumul  $V_\Sigma$  este arbitrar relația

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

reprezintă *ecuație de continuitate pentru sarcina electrică* (conservarea sarcinii electrice într-un punct al spațiului). Dacă  $\rho = \text{const.}$ , rezultă:

$$\text{div} \vec{J} = 0. \quad (3.7)$$

La baza teoriei câmpului electromagnetic stau nouă experiențe care au fost sintetizate de către James Clark Maxwell în 1873. În continuare sunt prezentate cele nouă experiențe în ordine logică.

**Experiența I (legea Coulomb).** Din studiul experimental efectuat cu ajutorul unei balanțe de torsiune Coulomb a stabilit că *forța de interacțiune dintre două particule încărcate electric,  $F$  este direct proporțională cu produsul sarcinilor electrice,  $q_1, q_2$  cu care sunt încărcate corpurile* (prima etapă) și *respectiv invers proporțională cu pătratul distanței,  $r$  dintre corpuri* (etapa a doua). În vid expresia matematică a acestei legi este:

$$\vec{F}_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (3.8)$$

unde  $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12}$  F/m reprezintă *permitivitatea absolută a vidului*, iar  $\frac{\vec{r}}{r}$  este un vector cu modulul egal cu unitatea și se numește *versor al direcției  $r$* .

Legea Coulomb (3.8) este valabilă numai pentru corpuri a căror dimensiuni sunt mici (neglijabile) în raport cu distanța dintre acestea. Forțele de interacție sunt orientate după direcția care unește cele două corpuri, iar sensul acestora depinde de semnul ambelor sarcini. Dacă sarcinile particulelor au același semn (ambele pozitive sau ambele negative) forța este de respingere (fig. 3. 1 a)), iar dacă au semne contrare, forța este de atracție (fig. 3. 1 b)).

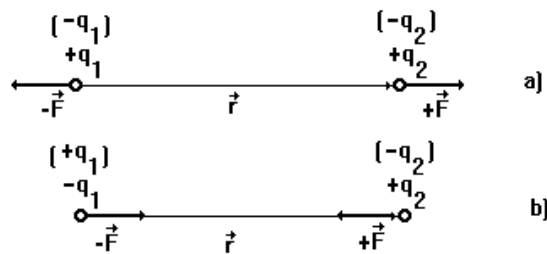


Fig. 3. 1 a), b). Orientarea forțelor de interacțiune electrică.

În cazul când cele două sarcini se află într-un mediu omogen oarecare, legea Coulomb în SI se scrie sub forma:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} \quad (3.9)$$

unde  $\epsilon$  reprezintă *permitivitatea absolută a mediului*. Făcând raportul între modulele forțelor date de relațiile (3.8) și (3.9) se obține:

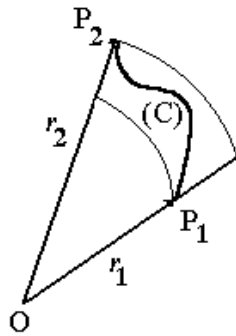
$$\frac{F_0}{F} = \frac{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r, \quad (3.10)$$

unde  $\epsilon_r$  este *permitivitatea relativă a mediului*, aceasta indicând de câte ori forța de interacțiune dintre două corpuri încărcate electric este mai mare în vid decât într-un mediul respectiv.

**Experiența II (lucrul mecanic al forțelor electrice).** *Lucrul mecanic*,  $L$  efectuat la deplasarea unei *sarcini de probă* (mică),  $q$  între două puncte  $P_1$  și  $P_2$  pe un drum finit  $(C)$  în câmpul creat de sarcina  $Q$  (fig. 3. 2) este:

$$L = q \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} \right). \quad (3.11)$$

Din relația (3.11) rezultă că lucrul mecanic al forțelor electrice nu depinde decât de pozițiile inițială și finală între care are loc deplasarea sarcinii de probă și nu depinde de forma drumului.



**Fig. 3. 2.** Reprezentarea drumului (C) parcurs de sarcina de probă.

Dacă sarcina de probă se întoarce în punctul inițial (parcurgând o curbă închisă  $\Gamma$ ) lucrul efectuat de sarcina împotriva câmpului este recuperat prin întoarcerea în punctul inițial, iar

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3.12)$$

Ținând seama că intensitatea câmpului electric este dată de relația

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad (3.13)$$

rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3.14)$$

Pe baza teoremei Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS, \quad (3.15)$$

se obține

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (3.16)$$

Din relația (3.16) rezultă că în cazul unei sarcini punctiforme fixe câmpul electrostatic este irotațional și poate fi scris sub forma:

$$\vec{E} = -\text{grad} V, \quad (3.17)$$

unde scalarul  $V$  reprezintă *potențialul electric* corespunzător câmpului electric  $\vec{E}$ , care este un câmp potențial.

**Experiența III (fluxul intensității câmpului electric printr-o suprafață închisă).** Pe baza acestei experiențe s-a stabilit că sarcina electrică totală  $q$  conținută într-un volum  $V$ , închis de suprafața  $\Sigma$  poate fi măsurată, deci pe baza relațiilor de mai sus:

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_{\Sigma}} \rho \cdot dV. \quad (3.18)$$

Ținând seama de teorema Gauss, rezultă:

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \int_{V_{\Sigma}} \text{div} \vec{E} \cdot dV, \quad (3.19)$$

sau

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

Verificarea acestei experiențe se face măsurând sarcinile electrice cu un cilindru Faraday și câmpurile cu un corp de probă.

**Experiența IV (inducția electrică).** Dacă o sarcină electrică  $q$  este închisă de o suprafață care conține medii diferite, efectul substanțelor dielectrice asupra câmpurilor electrostatice poate fi exprimat cu ajutorul relației:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (3.21)$$

unde  $\vec{D}$  este *inducția electrică*. Pe baza celor prezentate mai sus, rezultă:

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{u}_n dS = q = \int_{V_{\Sigma}} \rho \cdot dV, \quad (3.22)$$

de unde se obține:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.23)$$

**Experiența V (legea Ohm).** Pentru o porțiune de circuit cu *rezistența*  $R$  conectată la o *tensiune*  $U$ , Ohm a demonstrat experimental că intensitatea curentului,  $I$  verifică relația:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.24)$$

Ținând seama de expresia rezistenței electrice:

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{l}{\sigma S}, \quad (3.25)$$

(unde  $l$  este *lungimea conductorului*,  $S$  este *aria secțiunii transversale a conductorului*,  $\rho$  este *rezistivitatea materialului*, iar  $\sigma$  este *conductivitatea*), de relația (3.3) și de faptul că  $dU = E \cdot dr$ , legea Ohm mai poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.26)$$

**Experiența VI (legea Ampère).** Studiind experimental interacțiunea dintre un conductor cu lungimea  $l$  parcurs de curentul cu intensitatea  $I$  situat într-un câmp magnetic cu inducția magnetică  $\vec{B}$ , Ampère a stabilit că *forța electromagnetică*,  $\vec{F}$  exercitată asupra conductorului este:  $\vec{F} = Il(\vec{u}_l \times \vec{B})$ . Considerând că  $\vec{v}$  este viteza fiecărei sarcini care trece prin conductor și ținând seama de definiția intensității curentului, relația  $\vec{F} = Il(\vec{u}_l \times \vec{B})$  mai poate fi scrisă și sub forma:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.27)$$

**Experiența VII (legea Faraday).** În anul 1831 Faraday a stabilit o relație între câmpul electric și magnetic:

$$U_{em} = \oint \vec{E}_{in} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (3.28)$$

unde  $U_{em}$  este *tensiunea electromotoare*, iar

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (3.29)$$

este fluxul magnetic. În cazul unui circuit închis

$$U_{em} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS, \quad (3.30)$$

Aplicând teorema Stokes (3.15) relației (3.30), rezultă:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.31)$$

**Experiența VIII.** Utilizând un fluxmetru pentru a suma inducția magnetică normală pe o suprafață închisă se poate demonstra că suma rezultantă este întotdeauna nulă de unde se poate trage concluzia că liniile de flux magnetic nu au început și sfârșit, formând curbe închise. Astfel, din punct de vedere matematic se poate scrie că  $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$ .

Aplicând teorema Gauss (3.19) relației  $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$  se obține:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.32)$$

Relația (3.32) evidențiază faptul că un câmp magnetostatic este un câmp fără surse (fără divergență) sau solenoidal.

**Experiența IX.** Pe baza acestei experiențe s-a stabilit o relație între curent și câmpul de inducție magnetică căruia aceasta îi dă naștere sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS, \quad (3.33)$$

unde

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (3.34)$$

reprezintă *intensitatea câmpului magnetic*, iar

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (3.35)$$

este *permeabilitatea magnetică absolută a mediului*,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m fiind *permeabilitatea absolută a vidului*, iar  $\mu_r$ , permeabilitatea magnetică relativă a mediului.

Aplicând teorema Stokes (3.15) relației (3.34), rezultă:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}. \quad (3.36)$$

### 3.1.3. Ecuațiile Maxwell pentru câmpul electromagnetic

Teoria câmpului electromagnetic se bazează pe relațiile care se pot stabili între câmpurile sursă  $\rho$  și  $\vec{J}$ , pe de o parte și câmpurile,  $\vec{E}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{D}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{H}(x, y, z, t)$  și  $\vec{B}(x, y, z, t)$ , pe de altă parte și a fost elaborată pentru prima dată de către J. C. Maxwell. Maxwell a făcut următoarele ipoteze: a) inducția electrică,  $\vec{D}$  are divergența proporțională cu densitatea de sarcină și în regim dinamic pe baza generalizării rezultatelor experienței IV, b) inducția magnetică,  $\vec{B}$  are divergența nulă și în regim dinamic pe baza generalizării rezultatelor experienței VIII, c) prin analogie cu legea inducției electromagnetice

unde variația în timp a fluxului magnetic generează tensiunea electromotoare indusă, se consideră că în cazul dinamic general și variația inducției electrice  $\vec{D}$  generează un curent electric pe baza generalizării rezultatelor experienței IX.

### 3.1.4. Forma integrală a ecuațiilor Maxwell

**Legea inducției electromagnetice (legea Faraday).** Pe baza experienței II prima ecuație Maxwell poate fi scrisă sub formă integrală:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS. \quad (3.37)$$

Pe baza acestei legi *tensiunea electromotoare instantanee de-a lungul oricărei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu viteza instantanee a fluxului magnetic care străbate orice suprafață deschisă  $S$ , limitată de curba  $\Gamma$ , cu condiția ca în decursul timpului conturul  $\Gamma$  să rămână același și suprafața  $S$  să fie simplu conexă.*

**Legea circuitului magnetic sau legea curentului total (legea Ampère).** Ținând seama de experiența IX și de prima ecuație Maxwell, rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS + \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{D} \cdot \vec{u}_n dS. \quad (3.38)$$

Pe baza ecuației (3.38) *tensiunea magnetomotoare instantanee de-a lungul oricărei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu suma dintre intensitățile instantanee ale curenților de conducție și de deplasare (hertzian) care trec prin orice suprafață  $S$ , limitată de curba  $\Gamma$ , cu condiția ca în decursul timpului conturul  $\Gamma$  să rămână același și suprafața  $S$  să fie simplu conexă.*

**Legea fluxului inducție magnetice (legea Gauss pentru câmpul magnetic).** Generalizând rezultatul experienței VII și în cazul dinamic se poate scrie a treia ecuație Maxwell sub forma:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0. \quad (3.39)$$

Din relația (3.39), rezultă că *fluxul magnetic instantaneu care trece prin orice suprafață închisă  $\Sigma$  este nul.*

**Legea fluxului inducție electrice (legea Gauss pentru câmpul electric).** Considerând că experiențele III și IV sunt valabile și în cazul dinamic se poate scrie că:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{u}_n dS = \int_{V_{\Sigma}} \rho dV. \quad (3.40)$$



Pe baza relației (3.40), rezultă că *fluxul inducției electrice instantaneu care trece prin orice suprafață închisă  $\Sigma$  este egal cu sarcina electrică totală aflată în interiorul suprafeței  $\Sigma$ . Dacă sarcina electrică  $q > 0$ , fluxul lui  $\vec{D}$  este spre exteriorul suprafeței  $\Sigma$ , iar dacă  $q < 0$  este spre interiorul suprafeței  $\Sigma$ .*

### 3.1.5. Forma diferențială a ecuațiilor Maxwell

Ecuțiile Maxwell pentru câmpul electromagnetic scrise sub formă integrală sunt utile pentru a rezolva acele tipuri de probleme care cer o simetrie completă, cum ar fi simetria sferică, cilindrică și rectangulară. Această limitare a ecuațiilor electromagnetismului sub forma integrală se datorește faptului că ele sunt legi care descriu proprietățile câmpului într-o regiune întinsă a spațiului.

Pentru ca ecuațiile electromagnetismului să fie utile și în cazul general pentru oricare tip de problemă, este necesar să se stabilească relații între vectorii câmpului în puncte arbitrare ale spațiului și la momente arbitrare de timp. Forma diferențială a ecuațiilor lui Maxwell pentru câmpul electromagnetic se obține din forma integrală a acestora, (3.37)-(3.40), utilizând teorema lui Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_{S_{\Gamma}} (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{u}_n dS \quad (3.41)$$

și teorema lui Gauss,

$$\oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{u}_n dS = \int_{V_{\Sigma}} \text{div } \vec{A} dV. \quad (3.42)$$

Pe baza celor prezentate mai sus se obțin ecuațiile:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.43)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.44)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (3.45)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (3.46)$$

Pentru scrierea ecuațiilor câmpului electromagnetic sub formă diferențială, este necesar ca vectorii de câmp să fie funcții de poziție și timp, cu o singură valoare, mărginite, continue și cu derivate continue. În general, vectorii câmpului electromagnetic au aceste proprietăți în tot spațiul, cu excepția punctelor în care există schimbări brusce în distribuțiile de curent și/sau de sarcină. Relațiile între discontinuitățile vectorilor de câmp și variațiile abrupte în distribuția curenților și/sau sarcinilor sunt cunoscute ca fiind *condiții la limită*. Discontinuitățile vectorilor de câmp apar la interfața dintre medii cu proprietăți fizice diferite. În cazul unei anumite probleme de electromagnetism, soluția se obține utilizând legile sub forma diferențială și conduce la rezolvarea de sisteme de ecuații diferențiale. Soluția generală a fiecărei ecuații diferențiale conține termeni (constante sau

funcții) care pot fi evaluați numai din cunoașterea comportării variabilelor la condițiile la limită spațiale și/sau la *condițiile inițiale*.

**Teorema de conservare a sarcinii electrice.** În ecuațiile Maxwell teorema de conservare a sarcinii electrice este conținută în mod implicit, aceasta rezultând în urma aplicării divergenței ecuației (3.44) sub forma:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.47)$$

sau

$$0 = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}). \quad (3.48)$$

Ținând seama de ecuația (3.46), relația (3.48) devine:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.49)$$

aceasta evidențiind faptul că sarcina electrică și curentul electric nu pot fi specificate independent unul de celălalt și exprimă matematic conservarea sarcinii electrice în vecinătatea unui punct. În urma integrării ecuației (3.49) pe un volum  $V$ , închis de o suprafață netedă  $\Sigma$ , rezultă:

$$\int_{V_{\Sigma}} \nabla \cdot \vec{J} \, dV = - \int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV, \quad (3.50)$$

sau

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS = - \frac{d}{dt} \int_{V_{\Sigma}} \rho \, dV. \quad (3.51)$$

Forma integrală a ecuației de continuitate se obține ținând seama de definiția densității de sarcină volumică (3.1) și de relația (3.51):

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS = - \frac{d\rho}{dt}, \quad (3.52)$$

Considerând legea conservării sarcinii exprimată prin (3.51), atunci din relațiile (3.43) și (3.44) se obțin ecuațiile (3.45) și (3.46). Astfel, aplicând divergența ecuației (3.43), rezultă:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.53)$$

sau

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{const.} = 0 \quad (3.54)$$

întrucât câmpul magnetic de inducție  $\vec{B}$  nu a fost niciodată nenul în trecut.

Aplicând divergența ecuației (3.44) și integrând, rezultă:

$$\operatorname{div} \vec{D} - \rho = \operatorname{const.} \quad (3.55)$$

Considerând ca și în cazul precedent, că în trecut, câmpul electric de inducție  $\vec{B}$  a fost sau va fi nul la un moment oarecare, se obține ecuația (3.46).

Pe baza celor prezentate mai sus ca legi generale ale câmpului electromagnetic pot fi considerate fie ecuațiile (3.37)-(3.40) fie ecuațiile (3.43),(3.44) și (3.49).

### 3.1.6. Definiția vectorilor fundamentali ai câmpului electromagnetic $\vec{E}$ și $\vec{B}$ .

Cuplajul dintre câmpul electromagnetic și lumea mecanică poate fi caracterizat de legea forței Lorentz care se obține din prima experiență și experiența a șasea, presupunând că asupra unei sarcini în mișcare se exercită în același timp o forță electrică și o forță magnetică, adică:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + Il\vec{u}_l \times \vec{B}. \quad (3.56)$$

Întrucât intensitatea curentului electric  $I$  se datorește sarcinii electrice  $q$  care este în mișcare în direcția  $\vec{u}_l$  cu viteza  $\vec{v}$ , se poate scrie:

$$Il\vec{u}_l = q\vec{v}, \quad (3.57)$$

iar legea forței Lorentz are expresia:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.58)$$

Considerând că sarcina este distribuită într-un volum cu o densitate macroscopică continuă  $\rho$ ,  $\vec{E}$  poate fi definit prin forța mecanică care acționează asupra unei sarcini, adică:

$$\vec{F}_e = \int_V \rho \vec{E} dV, \quad (3.59)$$

această forță fiind distribuită cu densitatea volumică:

$$\vec{f}_e = \rho \vec{E}. \quad (3.60)$$

De asemenea, forța magnetică,  $\vec{F}_m$ , se poate scrie sub forma:

$$\vec{F}_m = \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) dV, \quad (3.61)$$

această forță fiind distribuită cu densitatea volumică:

$$\vec{f}_m = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (3.62)$$

Pe baza relațiilor (3.60) și (3.62), forma diferențială a legii forței Lorentz este:

$$\vec{f} = \vec{f}_e + \vec{f}_m = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (3.63)$$

Ținând seama de relațiile (3.1) și (3.58) forma diferențială a legii Lorentz se poate exprima și prin relația:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.64)$$

Pe baza celor prezentate mai sus rezultă că definiția arbitrară a vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  prin relațiile (3.59) și (3.61) este inevitabilă întrucât dacă forțele mutuale care se exercită între sarcini sau între curenți sunt măsurabile, vectorii câmpului nu sunt accesibili observației directe.

### 3.1.7. Legile de material

**În spațiul vid.** În spațiul vid,  $\vec{D}$  nu diferă de  $\vec{E}$ , respectiv  $\vec{H}$  de  $\vec{B}$ , decât printr-un factor constant, deci se poate scrie că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (3.65)$$

respectiv,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad (3.66)$$

valorile și dimensiunile constantelor  $\varepsilon_0$  și  $\mu_0$  depinzând de sistemul de unități adoptat.

Considerând că  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt vectorii principali ai câmpului electromagnetic, ecuațiile Maxwell (3.43)-(3.46) în spațiul vid se scriu sub forma:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.67)$$

$$\text{rot } \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.68)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (3.69)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (3.70)$$

**În substanță.** Starea electromagnetică a unui eșantion de substanță (un corp în câmpul electromagnetic) poate fi descriă cu vectorii polarizație electrică,  $\vec{P}$  și magnetizație,  $\vec{M}$ , definiți prin ecuațiile:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \quad (3.71)$$

și respectiv

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H}. \quad (3.72)$$

Pe baza celor prezentate mai sus se observă că definindu-i în acest mod, vectorii  $\vec{P}$  și  $\vec{M}$  sunt legați de substanță și se anulează în spațiul liber, conform relațiilor (3.65) și (3.66). Exprimând vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$  funcție de  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$ , respectiv  $\vec{B}$  și  $\vec{M}$ , ecuațiile Maxwell (3.43)-(3.46), în substanță, devin:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.73)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \right), \quad (3.74)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.75)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \vec{P}). \quad (3.76)$$

Pe baza ecuațiilor (3.73)-(3.76) rezultă că prezența substanței într-un câmp electromagnetic este echivalentă cu o distribuție de sarcini electrice având densitatea  $-\operatorname{div} \vec{P}$ , plus o distribuție de curenți electrice având densitatea  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}$ . Dacă se cunosc vectorii  $\vec{P}$  și  $\vec{M}$ , se poate studia structura

câmpului electromagnetic în prezența substanței. Vectorii  $\vec{P}$  și  $\vec{M}$ , respectiv  $\vec{J}$ , sunt exprimați prin legile de material: *legea polarizației electrice*, *legea magnetizației* și *legea conducției electrice*.

**Legea polarizației electrice.** Din teoria microscopică rezultă că se pot distinge două tipuri de polarizație electrică: *polarizație electrică permanentă*, când un dielectric este polarizat intrinsec, indiferent de plasarea sa în câmp electric și *polarizație electrică temporară*, când dielectricul este polarizat sub efectul câmpului electric. Polarizația electrică permanentă este condiționată de cauze neelectrice, este măsurabilă direct și în cazul câmpului în dielectrici, intervine ca o constantă cunoscută a materialului în condițiile date. Polarizația electrică temporară depinde de intensitatea câmpului electric. Pentru rezolvarea problemelor de câmp în dielectrici, este necesară cunoașterea explicită a acestei dependențe.

Legea polarizației electrice temporare stabilește relația de dependență dintre polarizația electrică temporară și intensitatea câmpului electric:

$$\vec{P}_t = P_t(\vec{E}) \quad (3.77)$$

Pe baza relației (3.77) se poate face o clasificare a dielectricilor.

**a) Medii dielectrice liniare.** Experimental, se poate arata că în cazul mediilor dielectrice (medii care nu sunt parcurse de curent continuu), între polarizația electrică temporară și intensitatea câmpului electric există o relație de proporționalitate:

$$\vec{P}_t = P_t(\vec{E}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (3.78)$$

unde  $\chi_e$  este *susceptivitatea electrică*.

**b) Medii dielectrice liniare și izotrope.** În cazul mediilor dielectrice liniare și izotrope, susceptivitatea electrică este un scalar adimensional, caracteristic materialului considerat. Vectorul polarizație electrică  $\vec{P}$  este:

$$\vec{P} = \vec{P}_t + \vec{P}_p, \quad (3.79)$$

unde  $\vec{P}_p$  este polarizația electrică permanentă. Din relațiile (3.71) și (3.78), rezultă:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} + \vec{P}_p = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} + \vec{P}_p, \quad (3.80)$$

unde  $\varepsilon_r$  este *permitivitatea relativă* a materialului considerat. Ținând seama că

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e, \quad (3.81)$$

se poate defini permitivitatea absolută a dielectricului

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad (3.82)$$

iar relația (3.80) devine:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}_p. \quad (3.83)$$

În cazul corpurilor dielectrice nepolarizate permanent, (bachelită, cauciuc, mică, sticlă etc.), cazul cel mai frecvent în aplicațiile practice, relația (3.83) se scrie sub forma:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (3.84)$$

**c) Medii dielectrice liniare și anizotrope.** Există anumite materiale cristaline în care fiecare componentă a polarizației electrice temporare depinde în general de toate componentele intensității câmpului electric, dependența între polarizația temporară  $\vec{P}_t$  și intensitatea  $\vec{E}$  a câmpului electric fiind liniară. În acest caz se poate scrie că:

$$\begin{aligned} P_{t_x} &= \varepsilon_0 \chi_{e_{xx}} E_x + \varepsilon_0 \chi_{e_{xy}} E_y + \varepsilon_0 \chi_{e_{xz}} E_z, \\ P_{t_y} &= \varepsilon_0 \chi_{e_{yx}} E_x + \varepsilon_0 \chi_{e_{yy}} E_y + \varepsilon_0 \chi_{e_{yz}} E_z, \\ P_{t_z} &= \varepsilon_0 \chi_{e_{zx}} E_x + \varepsilon_0 \chi_{e_{zy}} E_y + \varepsilon_0 \chi_{e_{zz}} E_z, \end{aligned} \quad (3.85)$$

sau

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \overline{\chi}_e \vec{E}, \quad (3.86)$$

unde:

$$\overline{\chi}_e = \begin{pmatrix} \chi_{e_{xx}} & \chi_{e_{xy}} & \chi_{e_{xz}} \\ \chi_{e_{yx}} & \chi_{e_{yy}} & \chi_{e_{yz}} \\ \chi_{e_{zx}} & \chi_{e_{zy}} & \chi_{e_{zz}} \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

este *matricea tensorului susceptivității electrice*.

În acest caz inducția electrică  $\vec{D}$  este dată de relația:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left( \vec{1} + \overline{\overline{\chi_e}} \right) \vec{E} = \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{E} + \vec{P}_p, \quad (3.88)$$

tensorul permitivității electrice absolute având matricea:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \left( \vec{1} + \overline{\overline{\chi_e}} \right) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_{e_{xx}} & \chi_{e_{xy}} & \chi_{e_{xz}} \\ \chi_{e_{yx}} & 1 + \chi_{e_{yy}} & \chi_{e_{yz}} \\ \chi_{e_{zx}} & \chi_{e_{zy}} & 1 + \chi_{e_{zz}} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Pentru majoritatea mediilor, polarizația permanentă este foarte mică, iar relația (3.88) se poate scrie sub forma:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (3.90)$$

**d) Medii dielectrice neliniare.** În natură există și dielectrice neliniari (printre care se numără feroelectricii) pentru care relațiile (3.78) și (3.86) se abat de la liniaritate iar relația de dependență între  $\vec{P}_t$  și  $\vec{E}$  este dată de un *ciclu de histerezis electric*.

**Legea magnetizației.** Din punct de vedere al proprietăților între materialele dielectrice și magnetice se poate stabili o analogie. Materialele magnetice sunt caracterizate de două tipuri de magnetizații: *magnetizație permanentă*, când materialul este magnetizat intrinsec, chiar fără a fi plasat în câmp magnetic, aceasta fiind condiționată de cauze nemagnetice și *magnetizație temporară*, când materialul este magnetizat sub efectul unui câmp magnetic, aceasta depinzând de intensitatea câmpului exterior.

Pe baza legii magnetizației temporare există o relație între magnetizația (polarizația) magnetică și intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H}). \quad (3.91)$$

Ținând seama de relația (3.91) se poate face o clasificare a materialelor magnetice.

**a) Medii magnetice liniare.** În cazul materialelor magnetice liniare există o relație de proporționalitate între magnetizația temporară și intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{M}_t = \chi_m \vec{H}, \quad (3.92)$$

unde  $\chi_m$  reprezintă o constantă scalară adimensională care caracterizează materialul și se numește *susceptivitatea magnetică*.

**b) Medii magnetice liniare și izotrope.** În acest caz vectorul magnetizație poate fi scris sub forma:

$$\vec{M} = \vec{M}_t + \vec{M}_p, \quad (3.93)$$

unde  $\vec{M}_p$  este magnetizația (polarizația) permanentă.

Din relațiile (3.72) și (3.92), rezultă:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{M}_p, \quad (3.94)$$

unde  $\mu_r$  este *permeabilitatea relativă* a materialului considerat.

Ținând seama că

$$\mu_r = 1 + \chi_m, \quad (3.95)$$

se poate defini permeabilitatea absolută a materialului

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \quad (3.96)$$

iar relația (3.94) devine:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{M}_p. \quad (3.97)$$

În cazul materialelor magnetice liniare și izotrope nemagnetizate relația (3.97) se scrie sub forma:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (3.98)$$

**c) Medii magnetice liniare și anizotrope.** Există anumite materiale magnetice cristaline în care dependența dintre magnetizația temporară și intensitatea câmpului magnetic este liniară, însă fiecare componentă a magnetizației temporare depinde de toate componentele intensității câmpului magnetic. În acest caz se poate scrie că:

$$\begin{aligned} M_{t_x} &= \chi_{m_{xx}} H_x + \chi_{m_{xy}} H_y + \chi_{m_{xz}} H_z, \\ M_{t_y} &= \chi_{m_{yx}} H_x + \chi_{m_{yy}} H_y + \chi_{m_{yz}} H_z, \\ M_{t_z} &= \chi_{m_{zx}} H_x + \chi_{m_{zy}} H_y + \chi_{m_{zz}} H_z, \end{aligned} \quad (3.99)$$

sau

$$\vec{M}_t = \overline{\overline{\chi}}_m \vec{H}, \quad (3.100)$$

unde

$$\overline{\overline{\chi}}_m = \begin{pmatrix} \chi_{m_{xx}} & \chi_{m_{xy}} & \chi_{m_{xz}} \\ \chi_{m_{yx}} & \chi_{m_{yy}} & \chi_{m_{yz}} \\ \chi_{m_{zx}} & \chi_{m_{zy}} & \chi_{m_{zz}} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

este *matricea tensorului susceptivității magnetice*.

În acest caz inducția magnetică  $\vec{B}$  este dată de relația:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{1} + \overline{\overline{\chi}}_m) \vec{H} + \vec{M}_p = \overline{\overline{\mu}} \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_p, \quad (3.102)$$

tensorul permitivității magnetice absolute având matricea:



$$\vec{\mu} = \mu_0 \left( \vec{1} + \vec{\chi}_m \right) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_{m_{xx}} & \chi_{m_{xy}} & \chi_{m_{xz}} \\ \chi_{m_{yx}} & 1 + \chi_{m_{yy}} & \chi_{m_{yz}} \\ \chi_{m_{zx}} & \chi_{m_{zy}} & 1 + \chi_{m_{zz}} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Pentru majoritatea mediilor, magnetizația (polarizația) permanentă este foarte mică, iar relația (3.103) se poate scrie sub forma:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (3.104)$$

**d) Medii magnetice neliniare.** În natură există și magnetici neliniari (printre care se numără feromagneticii, antiferomagneticii, feritele) pentru care relațiile (3.98) și (3.104) se abat de la liniaritate iar relația de dependență între  $\vec{M}$  și  $\vec{H}$  este dată de un *ciclu de histerezis electric*.

**Legea conducției electrice.** Sub formă locală legea conducției electrice stabilește relația de dependență dintre densitatea curentului de conducție și intensitatea câmpului electric:

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}) \quad (3.105)$$

Pe baza relației (3.105) se poate face o clasificare a conductorilor.

**a) Medii conductoare liniare.** Experimental, se poate arata că în cazul mediilor conductoare liniare între densitatea de curent electric și intensitatea câmpului electric există o relație de proporționalitate:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i), \quad (3.106)$$

unde  $\sigma$  este *conductivitatea electrică*, iar  $\vec{E}_i$  este *intensitatea câmpului electric imprimat* (produs de alte cauze, în afară de cele de natură electromagnetică).

**b) Medii conductoare liniare și izotrope.** Pentru medii conductoare liniare și izotrope, omogene (fizic și chimic), neaccelerate:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (3.107)$$

În cazul conductoarelor filiforme liniare și izotrope relația (3.107) se scrie sub forma:

$$u + u_e = Ri. \quad (3.108)$$

unde  $R = \rho \frac{l}{S}$  este rezistența electrică a conductorului,  $u$  este tensiunea electrică

de pe conductor, iar  $u_e$  este tensiunea electromotoare a câmpului electric imprimat conductorului. Dacă nu se imprimă câmp electric conductorului relația (3.108) devine:

$$u = Ri. \quad (3.109)$$

**c) Medii conductoare liniare și anizotrope.** Există anumite materiale cristaline (cu excepția celor cu rețea cubică) pentru care relația (3.106) este de forma:

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma_{xx}(E_x + E_{ix}) + \sigma_{xy}(E_y + E_{iy}) + \sigma_{xz}(E_z + E_{iz}), \\ J_y &= \sigma_{yx}(E_x + E_{ix}) + \sigma_{yy}(E_y + E_{iy}) + \sigma_{yz}(E_z + E_{iz}), \\ J_z &= \sigma_{zx}(E_x + E_{ix}) + \sigma_{zy}(E_y + E_{iy}) + \sigma_{zz}(E_z + E_{iz}), \end{aligned} \quad (3.110)$$

sau

$$\vec{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\vec{E} + \vec{E}_i), \quad (3.111)$$

unde

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

este matricea tensorului conductivității electrice.

**d) Medii conductoare neliniare.** În natură există diferite medii conductoare neliniare pentru care relația dintre intensitatea curentului electric,  $I$  și tensiunea electrică aplicată,  $U$  (caracteristica curent-tensiune) este neliniară, cum ar fi: semiconductorii (prezențați la capitolul III al acestui volum) pentru care

$$I = I_0 \exp\left(\frac{U}{U_0} - 1\right) \quad (3.113)$$

unde  $I_0$  și  $U_0$  depind de natura semiconductorului, tuburile electronice, pentru care

$$I = aU^{3/2}, \quad (3.114)$$

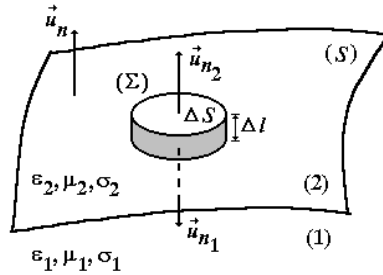
unde  $a$  este o constantă caracteristică dispozitivului, tuburile cu descări în gaze, becurile cu incandescență etc., care au multiple aplicații în tehnică.

### 3.1.8. Condițiile la limită

În cele prezentate mai sus s-a postulat valabilitatea ecuațiilor câmpului electromagnetic pentru punctele unui mediu în vecinătatea cărora proprietățile fizice ale mediului variază sub o formă continuă. În cele ce urmează, este necesar să se țină seama de faptul că la traversarea unei suprafețe care limitează un corp separând un mediu de alt mediu, parametrii  $\epsilon$ ,  $\mu$  și  $\sigma$  suferă variații bruște. Aceste variații la scară microscopică pot fi considerate ca discontinuități și, ca atare, este de presupus că și vectorii de câmp vor suferi discontinuități. Comportările vectorilor câmpului electromagnetic la suprafețele de discontinuitate

în medii sunt numite *condiții la limită*. Condițiile la limită sunt necesare pentru a completa ecuațiile diferențiale (3.43)-(3.46) ale câmpului electromagnetic.

Se consideră suprafața  $S$  (fig. 3. 3), care separă mediul (1), caracterizat de parametrii  $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ , de mediul (2), caracterizat de parametrii  $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ .



**Fig. 3. 3.** Reprezentarea schematică a condițiilor la limită pentru componenta normală a inducției magnetice.

Considerând o pătură de tranziție foarte fină (cilindrul cu suprafața bazei  $\Delta S$  și înălțimea  $\Delta l$ ), în interiorul căreia  $\varepsilon$ ,  $\mu$  și  $\sigma$  variază rapid dar continuu de la valorile lor corespunzătoare mediului (1), în vecinătatea suprafeței  $S$ , la valorile lor din mediul (2), în vecinătatea aceleiași suprafețe, se poate studia comportarea vectorilor  $\vec{B}$  și  $\vec{D}$ .

Aplicând legea fluxului magnetic (3.39) pentru suprafața închisă  $\Sigma$  (formată din suprafața laterală a cilindru și cele două suprafețe ale bazelor acestuia), se obține:

$$(\vec{B} \cdot \vec{u}_{n_1} + \vec{B} \cdot \vec{u}_{n_2}) \cdot \Delta S + \text{contribuția suprafeței laterale} = 0. \quad (3.115)$$

Contribuția suprafeței laterale este proporțională cu  $\Delta l$ . Reducând, acum, pătura cilindrică la suprafața ( $\Delta S$ ), este necesar ca  $\Delta l \rightarrow 0$ . Atunci, valoarea lui  $\vec{B}$  în mediul (1) pe suprafața ( $S$ ) este  $\vec{B}_1$ , iar în mediul (2), pe aceeași suprafață, va fi  $\vec{B}_2$ . Deoarece  $\vec{u}_n = \vec{u}_{n_2} = -\vec{u}_{n_1}$ , când  $\Delta l \rightarrow 0$  și  $\Delta S \rightarrow 0$ , rezultă:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{u}_n = 0. \quad (3.116)$$

Astfel, la traversarea unei suprafețe de discontinuitate în mediu, componenta normală a inducției magnetice  $\vec{B}$  este continuă. Același raționament se poate face și asupra inducției electrice  $\vec{D}$ . Legea fluxului electric (3.40), în cazul suprafeței închise  $\Sigma$  (fig. 2. 3), are forma:

$$(\vec{D} \cdot \vec{u}_{n_1} + \vec{D} \cdot \vec{u}_{n_2}) \cdot \Delta S + \text{contribuția suprafeței laterale} = \rho \cdot \Delta l \cdot \Delta S, \quad (3.117)$$

$\rho \cdot \Delta l \cdot \Delta S$  fiind sarcina distribuită în interiorul suprafeței de tranziție cu densitatea  $\rho$ . Definind *densitatea de sarcină electrică de suprafață*,  $\rho_s$ , prin:

$$\rho_s = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} (\rho \cdot \Delta l) \quad (3.118)$$

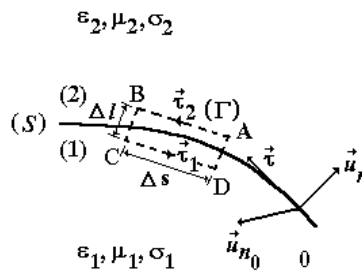
și punând condițiile  $\Delta l \rightarrow 0$  și  $\Delta S \rightarrow 0$ , din (3.117), rezultă:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{u}_n = \rho_s. \quad (3.119)$$

Ecuția (3.119) evidențiază faptul că la traversarea unei suprafețe de discontinuitate, componenta normală a inducției electrice  $\vec{D}$  suferă o discontinuitate, egală cantitativ cu densitatea de sarcină de suprafață la interfața dintre cele două medii.

Pentru a studia comportarea componentelor tangențiale ale vectorului câmpului electromagnetic la suprafața de separare a celor două medii, este necesar să se înlocuiască cilindrul din fig. 2. 3 cu un contur rectangular (fig. 3. 4). Dreptunghiul ABCD constituie conturul ( $\Gamma$ ), de-a lungul căruia legea inducției electromagnetice (3.37),  $\vec{u}_{ne} \perp S_\Gamma$  și  $\vec{\tau}_1$  și  $\vec{\tau}_2$  fiind vectori unitari în sensul circulației, se poate scrie sub forma:

$$(\vec{E} \vec{\tau}_1 + \vec{E} \vec{\tau}_2) \Delta S + \text{contribuția extremităților} \Delta l = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \Delta S \cdot \Delta l \cdot \vec{u}_{n0}. \quad (3.120)$$



**Fig. 3. 4.** Reprezentarea schematică a condițiilor la limită pentru componenta tangențială a inducției magnetice.

Dacă dreptunghiul ABCD se reduce la o curbă pe suprafața ( $S$ ), contribuția extremităților, proporțională cu  $\Delta l$ , se anulează. Ținând seama că  $\vec{\tau} = \vec{u}_{ne} \times \vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_{ne} \times \vec{u}_n \cdot \vec{E} = \vec{u}_{ne} \cdot \vec{u}_n \times \vec{E}$  și punând condițiile  $\Delta l \rightarrow 0$  și

$\Delta s \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  fiind nenul și finit, prin definiție, atunci relația (3.110) devine:

$$\vec{u}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0. \quad (3.121)$$

La interfața dintre două medii oarecare, componenta tangențială a intensității câmpului electric  $\vec{E}$  este continuă.

Analog, se obțin informații asupra componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic  $\vec{H}$ . De-a lungul conturului dreptunghiular ABCD se poate scrie:

$$\left(\vec{H}_{\vec{\tau}_1} + \vec{H}_{\vec{\tau}_2}\right)\Delta s + \text{contribuția extremităților} \Delta l = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right)\Delta s \cdot \Delta l \cdot \vec{u}_{n_e} \quad (3.122)$$

aceasta fiind legea circuitului magnetic (3.38).

Întrucât  $\vec{\tau} = \vec{u}_{n_e} \times \vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_{n_e} \times \vec{u}_n \cdot \vec{H} = \vec{u}_{n_e} \cdot \vec{u}_n \times \vec{H}$ ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  este nenul și finit, iar

$$\lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \vec{J} \rightarrow \infty}} (\vec{J} \cdot \Delta l) = \vec{J}_s \quad (3.123)$$

este *densitatea superficială de curent electric*, atunci, punându-se condițiile  $\Delta l \rightarrow 0$  și  $\Delta s \rightarrow 0$ , relația (3.122) se transformă:

$$\vec{u}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s. \quad (3.124)$$

Ecuția (3.124) stabilește că la interfața dintre două medii, componenta tangențială a intensității câmpului magnetic este discontinuă cu o cantitate egală cu densitatea superficială de curent electric în punctul respectiv. Dacă conductivitățile mediilor în contact sunt finite,  $\vec{J}_s = 0$ , deoarece  $\vec{E}$  este finit și  $\sigma \vec{E} \Delta l \rightarrow 0$ , când  $\Delta l \rightarrow 0$ . Astfel, pentru conductivități finite (care este, de fapt, cazul general), rezultă:

$$\vec{u}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0, \quad (3.125)$$

Pe baza celor prezentate mai sus condițiile care guvernează trecerea componentelor normale ale lui  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  la suprafața de separație a două medii, sunt:

$$\vec{u}_n \left( \vec{E}_2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \vec{E}_1 \right) = \frac{1}{\epsilon_2} \rho_s, \quad (3.126)$$

respectiv

$$\vec{u}_n \left( \vec{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \right) = 0, \quad (3.127)$$

iar relațiile care guvernează trecerea componentelor tangențiale ale lui  $\vec{D}$  și  $\vec{B}$  la suprafața de separare a două medii sunt:

$$\vec{u}_n \times \left( \vec{D}_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \vec{D}_1 \right) = 0, \quad (3.128)$$

respectiv

$$\vec{u}_n \times \left( \vec{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_1 \right) = \mu_2 \vec{J}_s. \quad (3.129)$$

Condițiile (3.116), (3.119), (3.121), (3.124) și (3.126)-(3.129), împreună cu legile diferențiale Maxwell (3.44)-(3.46), descriu complet proprietățile unui câmp electromagnetic. Dacă  $\vec{D}$  și  $\vec{B}$  se exprimă în funcție de vectorii de polarizație  $\vec{P}$  și, respectiv, de magnetizație  $\vec{M}$ , atunci relațiile (3.116) și (3.119) se transformă în:

$$\vec{u}_n \varepsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \rho_s + \vec{u}_n (\vec{P}_1 - \vec{P}_2), \quad (3.130)$$

respectiv

$$\vec{u}_n (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{u}_n (\vec{M}_1 - \vec{M}_2). \quad (3.131)$$

De asemenea, se poate stabili o condiție adițională, obținută prin aplicarea ecuației de continuitate. Făcând același raționament ca în cazul inducției electrice  $\vec{D}$  (fig. 2. 3), rezultă:

$$\begin{aligned} & (\vec{J} \vec{u}_{n_1} + \vec{J} \vec{u}_{n_2}) \Delta S + (\text{contribuția suprafeței laterale a cilindrului}) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \Delta V_1 + \rho_2 \Delta V_2 + \rho_s \cdot \Delta S), \end{aligned} \quad (3.132)$$

într-un punct oarecare. Volumele  $\Delta V_1$  și  $\Delta V_2$  sunt proporționale cu  $\Delta l$ . De asemenea, contribuția suprafeței laterale a cilindrului este proporțională cu  $\Delta l$ . Deci, când  $\Delta l \rightarrow 0$ , rezultă:

$$\vec{u}_n (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_s. \quad (3.133)$$

Astfel, componenta normală a lui  $\vec{J}$  este discontinuă cu rata cu care sarcinile libere se formează pe suprafață.

### 3.1.9. Proprietățile câmpurilor electromagnetice

Câmpurile electromagnetice au următoarele proprietăți:

– verifică ecuațiile Maxwell, care sunt ecuații liniare. Deci, dacă într-un mediu se suprapun două sau mai multe câmpuri, fiecare satisfăcând ecuațiile Maxwell, și câmpul rezultat va satisface aceleași ecuații (*principiul suprapunerii*). Dacă fiecare din câmpuri satisface același set de condiții la limită, și câmpul rezultat va satisface aceleași condiții la limită;

– într-o anumită regiune limitată din spațiu, soluția ecuațiilor Maxwell este unică, adică există o singură soluție care satisface condițiile la limită respective. Cunoașterea valorilor inițiale ale vectorilor de câmp electric și magnetic în regiunea studiată, precum și cunoașterea valorilor componentelor tangențiale ale vectorului electric sau magnetic la limita regiunii, la toate momentele de timp  $t \geq 0$ , duc la obținerea unei soluții unice în cazul general al unui câmp variabil în timp, dacă proprietățile regiunii sunt liniare și izotrope.

### 3.1.10. Tipuri de câmpuri electromagnetice

Există următoarele tipuri de câmpuri electromagnetice: câmpuri electromagnetice *statice*, câmpuri *dinamice* și câmpuri *cuasistatice*. Câmpurile electromagnetice statice se împart la rândul lor în: câmpuri *electrostatice*, *magnetostatice* și *electrostatice*.

În cazul când sursa de câmp este o distribuție statică de sarcini, câmpul este electrostatic. Acest câmp are următoarele proprietăți:

– singurii vectori de câmp nenuli sunt intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și inducția electrică  $\vec{D}$ ;

– câmpul este conservativ, adică, pentru orice contur  $\Gamma$  închis, rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{r} = 0, \quad (3.134)$$

sau

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (3.135)$$

de unde

$$\vec{E} = -\text{grad } V, \quad (3.136)$$

$V(x, y, z, t)$  reprezintă *potențial scalar* al câmpului electromagnetic. În acest caz,

$$V = V(x, y, z);$$

– inducția electrică  $\vec{D}$  se obține din relațiile (3.40) sau (3.46);

– conductoarele nu pot avea un câmp electrostatic intern și, de aceea suprafețele lor sunt suprafețe echipotențiale (fac excepție conductoarele electrolitice).

În cazul când sursa de câmp este o distribuție de curenți electrici și regiunea unde există distribuția de curenți are o conductivitate mare, astfel intensitatea câmpului electric din regiunea respectivă poate fi neglijată, câmpul este magnetostatic. Acest câmp are următoarele proprietăți:

– singurii vectori de câmp nenuli sunt inducția magnetică  $\vec{B}$  și intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ ;

– câmpul nu este conservativ, dar este solenoidal, adică, pentru orice suprafață  $\Sigma$  închisă, există relația (3.39), respectiv (3.45);

– intensitatea câmpului magnetic poate fi calculată cu relațiile (3.33), respectiv (3.34).

Un câmp electrostatic și un câmp magnetostatic nu sunt cuplate, adică sunt complet

independente unul de celălalt.

Dacă sursele de câmp sunt curenți independenți de timp, ce circulă într-o regiune conductoare a cărei conductivitate este mică, astfel încât intensitatea câmpului electric din regiunea conductoare nu poate fi neglijată. *Câmpul electromagnetostatic* are următoarele proprietăți:

– toți vectorii de câmp sunt nenuli;

– câmpul electric este electrostatic, iar câmpul magnetic este magnetostatic, cele două câmpuri fiind cuplate prin relația (3.107);

– câmpul electric produce în regiunea conductoare o distribuție statică de sarcini, de obicei pe suprafața conductoarelor care devin sursele câmpurilor electrostatice.

*Câmpurile dinamice* sunt câmpurile variabile în timp. Ele au următoarele proprietăți:

– câmpurile electric și magnetic sunt întotdeauna cuplate;

– cuplajul dat de relația (3.104) rămâne în regiunile conductoare, dar mai

apare un cuplaj important prin intermediul derivatelor în raport cu timpul,  $\frac{\partial B}{\partial t}$  și

$\frac{\partial D}{\partial t}$ , care intervin în ecuațiile Maxwell (3.44), respectiv (3.45);

– câmpurile se propaga sub forma unor unde cu o viteză finită. Aceste efecte apar cu o întârziere în timp, numită *retardare*;

– energia electromagnetică propagată sub formă de unde poate fi ghidată prin mediu (de linii de transmisie) sau poate fi radiată (de antene).

*Câmpurile variabile în timp*, pentru care se pot neglija fenomenele ondulatorii, viteza de propagare și de atenuare în timp, sunt câmpurile cuasistatice. Viteza de propagare a undelor electromagnetice este totdeauna finită. Ca atare, într-un spațiu infinit, câmpurile variabile în timp nu sunt niciodată cuasistatice. Câmpurile variabile în timp pot fi cuasistatice într-o anumită regiune din spațiu, caracterul cuasistatic fiind definit pe baza dimensiunilor regiunii și în funcție de rata de variație în timp și de viteza de propagare.

### 3.1.11. Potențiale electromagnetice

Ecuatiile Maxwell conțin patru vectori de câmp rezultat,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$  și două câmpuri de sursă,  $\rho$  și  $\vec{J}$ . Ecuatiile Maxwell împreună cu legile de material dau, din punct de vedere matematic, informații suficiente pentru ca vectorii de câmp să se exprime funcție de  $\rho$  și de  $\vec{J}$ . În multe cazuri calculele sunt ușurate dacă se introduc *potențialele electromagnetice*:  $\vec{A}$ , numit *potențial vector* și un câmp scalar  $V$ , numit *potențial scalar*, astfel încât să se determine mai întâi  $A(x, y, z, t)$  și  $V(x, y, z, t)$ , cunoscând pe  $\vec{J}$  și pe  $\rho$  și apoi să se calculeze vectorii de câmp  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$  din  $\vec{A}$  și  $V$ . Utilizarea potențialelor electromagnetice este avantajoasă în cazul mediilor omogene și izotrope. În cele ce urmează, se utilizează teorema Helmholtz conform căreia: *un câmp vectorial este determinat dacă i se cunosc rotorul și divergența, iar un câmp scalar se poate determina până la o constanta aditivă dacă i se cunoaște gradientul*.

Din ecuația (3.45) rezultă că  $\vec{B}$  este totdeauna un câmp solenoidal, deci se poate defini prin:



$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_0. \quad (3.137)$$

Ecuția (3.137) nu este suficientă pentru a defini pe  $\vec{A}_0$ , deoarece se poate scrie:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (3.138)$$

unde

$$\vec{A} = \vec{A}_0 - \text{grad } \psi \quad (3.139)$$

este o funcție arbitrară de punct. Introducându-se  $\vec{B}$  din relația (3.138) în (3.44), rezultă:

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.140)$$

respectiv

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.141)$$

Din relațiile (3.140) și (3.141) se observă că  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t}$  și  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  sunt câmpuri irotaționale, adică:

$$\vec{E} = -\text{grad } V_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \quad (3.142)$$

și

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.143)$$

cele două funcții  $V$  și  $V_0$  fiind legate între ele prin:

$$V = V_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.144)$$

aceasta rezultând din relațiile (3.139) și (3.143). Funcțiile  $\vec{A}$  reprezintă potențialele vector ale câmpului electromagnetic, iar funcțiile  $V$  sunt potențialele scalar, iar funcțiile  $\vec{A}_0$  și  $V_0$  reprezintă o pereche de potențiale determinate. Plecând de la aceste potențiale, se pot deduce vectorii de câmp cu ajutorul expresiilor (3.138) și (3.143). De asemenea, se observă că plecând de la relațiile (2,139) și (3.144), rezultă că există o infinitate de potențiale la același câmp. Considerând un mediu omogen și izotrop pentru care  $\epsilon$  și  $\mu$  sunt independente de intensitățile câmpului electromagnetic și ținând seama de relațiile (3.138) și (3.143), rezultă:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \left( \text{grad } V_0 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (3.145)$$

respectiv

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}. \quad (3.146)$$

Introducând relațiile (3.145) și (3.146) în (3.44), precum și pe (3.145) în (3.46), se obține relația:

$$\text{rot rot } \vec{A} + \varepsilon \mu \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon \mu \text{grad} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{J} \quad (3.147)$$

și, respectiv

$$\Delta V + \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (3.148)$$

Când condițiile la limită sunt aceleași, soluțiile particulare ale ecuațiilor (3.147) și (3.148) conduc la același câmp electromagnetic. Aceste soluții diferă între ele prin funcția arbitrară  $\psi$ . Ținând seama de *condiția Lorentz (etalonarea Lorentz)*:

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (3.149)$$

rezultă că funcția  $\psi$  trebuie să satisfacă ecuația:

$$\Delta \psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } \vec{A}_0 + \varepsilon \mu \frac{\partial V_0}{\partial t}, \quad (3.150)$$

$\vec{A}_0$  și  $V_0$  fiind soluții particulare ale ecuațiilor (3.147) și (3.148). Ținând seama de (3.149) și de relația:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \nabla \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (3.151)$$

ecuațiile (3.147) și (3.148) devin:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (3.152)$$

$$\Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (3.153)$$

În urma rezolvării ecuațiilor (3.152) și (3.153) se deduc potențialul vector  $\vec{A}$ , respectiv potențialul scalar  $V$ , dacă se cunosc distribuțiile de curenți, respectiv de sarcină, iar în final se pot calcula vectorii de câmp  $\vec{B}$  și  $\vec{E}$ , respectiv vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$ .

Întrucât relațiile (3.138) și (3.142), relative la vectorii  $\vec{B}$  și  $\vec{E}$ , nu sunt generale, este necesar ca să le adăugăm orice soluție particulară a ecuațiilor omogene:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.154)$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \quad (3.155)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.156)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (3.157)$$

Sistemul de ecuații (3.154)-(3.157) fiind simetric, se poate scrie:

$$\vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{A}^* \quad (3.158)$$

și

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \vec{V}^* - \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t}. \quad (3.159)$$

Pe baza relațiilor (3.158), (3.159) și ținând seama de (3.145) și (3.146), rezultă:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^*, \quad (3.160)$$

respectiv

$$\vec{B} = -\mu \left( \operatorname{grad} \vec{V}^* + \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} \right). \quad (3.161)$$

Introducând condiția Lorentz,

$$\operatorname{div} \vec{A}^* + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} = 0, \quad (3.162)$$

potențialele  $\vec{A}^*$  și  $V^*$  satisfac ecuațiile:

$$\Delta \vec{A}^* - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^*}{\partial t^2} = 0, \quad (3.163)$$

respectiv

$$\Delta \vec{V} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.164)$$

În final vectorii de câmp se exprimă prin:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^*, \quad (3.165)$$

$$\vec{B} = -\operatorname{rot} \vec{A} - \mu \left( \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} + \operatorname{grad} V^* \right), \quad (3.166)$$

$$\vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{A}^* - \varepsilon \left( \operatorname{grad} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (3.167)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} - \left( \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} + \operatorname{grad} V^* \right), \quad (3.168)$$

unde  $\vec{A}^*$  și  $V^*$  reprezintă potențialele unei distribuții de sarcini și de curenți, care este complet exterioară regiunii considerate. Dacă  $\Sigma \rightarrow \infty$ , se pune  $\vec{A}^* = V^* = 0$

și potențialele tuturor sarcinilor, fie că ar fi la distanță, fie ca ar fi locale, sunt reprezentate de  $V$  și  $A$ . În orice punct în care  $\rho = 0$  și  $\vec{J} = 0$ , un câmp electromagnetic posibil este dat de:  $V_0 = 0$  și  $\vec{A}_0 = 0$ , iar (3.150) devine:

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.169)$$

Întrucât în acest caz,  $V$  satisface aceeași ecuație (3.169), în același punct se poate afla  $\psi$  astfel ca  $V = 0$ , iar câmpul electromagnetic poate fi exprimat în funcție de un singur potențial vector  $\vec{A}$ , adică:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (3.170)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.171)$$

$$\vec{D} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.172)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}. \quad (3.173)$$

Potențialul vector  $\vec{A}$  trebuie să satisfacă ecuațiile:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.174)$$

și (condiția de etalonare Coulomb):

$$\nabla \vec{A} = 0. \quad (3.175)$$

### 3.1.12. Energia electromagnetică

În cazul unui sistem fizic format din două sarcini  $q_1$  și  $q_2$ , imobile, în vid, situate la o distanță  $r_{12}$  una de cealaltă *energia electrică* este dată de relația:

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}. \quad (3.176)$$

Generalizând relația (3.176) în cazul unui sistem format din  $n$  sarcini, rezultă:

$$W = \sum W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \quad (3.177)$$

unde sumarea asupra lui  $i$  și  $j$  are loc numai pentru  $i \neq j$  (fiecare sarcină neavând nici o acțiune asupra ei însăși) și se ia semisuma, deoarece  $W_{ij} = W_{ji}$  nu dau decât o contribuție. Relația (3.177) mai poate fi scrisă sub forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (3.178)$$

unde

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n \frac{q_i}{\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (3.179)$$

În medii materiale caracterizate de o distribuție continuă, (conform teoriei fenomenologice), energia electrică este dată de relația:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V \, dV. \quad (3.180)$$

Ținând seama de relațiile corespunzătoare câmpului electrostatic,  $\vec{E} = -\text{grad}V$  și  $\text{div} \vec{D} = \rho$ , relația (1.79) devine:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_V V \text{div} \vec{D} \, dV = \frac{1}{2} \int_V [\text{div} (V\vec{D}) - \vec{D} \text{grad} V] \, dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} V \cdot D_n \, dS. \end{aligned} \quad (3.181)$$

Întrucât

$$D_n = \frac{\partial D}{\partial u_n} = -\rho_s. \quad (3.182)$$

al doilea termen din relația (3.181) se scrie sub forma:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} V D_n \, dS = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} V \rho_s \, dS. \quad (3.183)$$

**Densitatea de energie electrică și magnetică.** Considerând valabilă relația  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  în cazul unei suprafețe  $\Sigma$  care limitează volumul  $V$ , destul de mare, se poate scrie:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV = \int_V w_e \, dV, \quad (3.184)$$

*densitatea de energie electrostatică fiind*

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2. \quad (3.185)$$

De asemenea, considerând că este valabilă relația  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  și procedând în același mod ca mai sus, evaluarea *energiei magnetice* conduce la formula:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int W_m dV, \quad (3.186)$$

unde densitatea de energie a câmpului magnetic este

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2. \quad (3.187)$$

Admițând că energiile câmpurilor electric și magnetic se adună fără a modifica reciproc valorile lor, în cazul general al unui câmp electromagnetic densitatea de energie electromagnetică este dată de relația:

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2). \quad (3.188)$$

**Fluxul de energie. Teorema Poynting.** Considerând că ipoteza distribuției de energie în câmp este valabilă, o variație a intensității câmpului și a densității de energie trebuie să fie asociată la un flux de energie mergând către sursă sau ieșit din aceasta. Ținând seama de ecuațiile generale ale câmpului electromagnetic (3.37)-(3.40), înmulțind relația (3.37) cu  $\vec{H}$ , iar pe (3.38) cu  $\vec{E}$  și scăzând din prima relație obținută pe cea de-a doua, rezultă:

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J} = -\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.189)$$

În urma integrării relației (3.189) într-un volum  $V$  limitat de o suprafață  $\Sigma$ , se obține:

$$\int_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) \vec{u}_n dS + \int_{V_{\Sigma}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \int_{V_{\Sigma}} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (3.190)$$

Relația (3.190) a fost stabilită de Poynting în 1884 și, în același an, în mod independent, de Heaviside. Din relația (3.190) rezultă că rata de scădere în timp a energiei înmagazinate în câmpul electromagnetic este egală cu fluxul *vectorului Poynting*,

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.191)$$

sau fluxul energiei electromagnetice prin suprafața  $\Sigma$  plus pierderile prin efect Joule. Considerând că  $\sigma$  este conductivitatea mediului și  $\vec{E}_i$  intensitatea câmpurilor electrice imprimare (intensitatea tensiunilor electromotoare aplicate și datorată pilelor), rezultă:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (3.192)$$

sau

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} - \vec{E}_i. \quad (3.193)$$

Ținând seama de (3.193), relația (3.189) se poate scrie sub forma:

$$\vec{E}_i \vec{J} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 \right), \quad (3.194)$$

aceasta reprezentând *teorema Poynting sub formă diferențială*, în absența substanțelor feromagnetice, relațiile dintre intensitățile câmpului și inducții fiind, în general, liniare. Sub formă integrală, teorema Poynting este:

$$\int_{V_\Sigma} \vec{E}_i \vec{J} dV = \int_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) \vec{u}_n dS + \int_{V_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Sigma} \left( \frac{\varepsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 \right) dV. \quad (3.195)$$

Din relația (3.195) rezultă că energia electromagnetică produsă în volumul  $V_\Sigma$  este cheltuită pe seama fluxului de energie prin efect Joule și a existenței unei energii variabile în timp a câmpului electromagnetic. Notând puterea cheltuită, sub formă termochimică, pe unitatea de volum cu

$$Q = \frac{1}{\sigma} \vec{J}^2 - \vec{E}_i \vec{J}, \quad (3.196)$$

teorema Poynting pentru un câmp electromagnetic în care nu există fenomene de histerezis, se poate scrie sub forma:

$$\operatorname{div} \vec{S}_p + \frac{\partial w}{\partial t} + Q = 0. \quad (3.197)$$

În cazul unui câmp staționar,  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ , iar relația (3.197) devine:

$$\operatorname{div} \vec{S}_p + Q = 0. \quad (3.198)$$

Dacă  $Q > 0$ , energia electromagnetică intră în volumul  $V_\Sigma$  și în cazul în care  $Q < 0$ , energia electromagnetică iese din volumul  $V_\Sigma$ .

Pe baza teoremei Poynting, se poate da ecuațiilor  $\vec{D} = D(\vec{E})$ ,  $\vec{J} = J(\vec{E})$  și  $\vec{H} = H(\vec{B})$  și o altă justificare. Teorema lui Poynting (3.189) este o consecință directă a ecuațiilor lui Maxwell și se poate scrie sub forma:

$$-\oint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) \vec{u}_n dS = \oint_{V_\Sigma} \vec{E} \vec{J} dV + \oint_{V_\Sigma} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV, \quad (3.199)$$

exprimând puterea totală care intră într-o suprafață închisă  $\Sigma$ . Membrul drept al teoremei Poynting conține trei termeni. Termenul din stânga este interpretat ca fiind puterea totală netă livrată la volumul  $V_\Sigma$  de către sursele exterioare sau câmpuri. dacă fluxul net livrat este negativ, se interpretează ca fiind acea putere medie care este livrată de la volumul  $V_\Sigma$  la sursele exterioare sau câmpuri.

Vectorul  $\vec{S}_p$  este numit *vectorul Poynting* și este interpretat ca fiind densitatea de

flux de putere în fiecare punct al suprafeței  $\Sigma$ . Integrala de volum  $\oint_{V_\Sigma} \vec{E} \vec{J} dV$ ,

care pentru curentul de convecție se scrie sub forma:

$$\oint_{V_\Sigma} \vec{E} \vec{J} dV = \oint_{V_\Sigma} \vec{E} (\rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-) dV, \quad (3.200)$$

reprezintă rata cu care câmpul electric efectuează lucru asupra sarcinilor electrice în volumul  $V_\Sigma$ . Acest termen poate fi pozitiv și, atunci, o cantitate netă de lucru pe unitatea de timp este efectuat de câmp asupra sarcinilor, sau poate fi negativ și, atunci, o cantitate de putere este transferată de sarcinile electrice la câmp. În cazul în care volumul  $V_\Sigma$  nu conține decât materiale conductoare,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , și

$$\oint_V \vec{E} \vec{J} dV = \oint_V \sigma \vec{E}^2 dV > 0 \quad (3.201)$$

reprezintă pierderile ohmice în volumul  $V$ , adică, conversia energiei electromagnetice în căldură. În cazul în care volumul  $V$  din relația (3.195) este ocupat de baterii atunci  $\oint_{V_\Sigma} \vec{E} \vec{J} dV < 0$  și aceasta reprezintă rata de conversie a

energiei chimice (sau de altă natură) în energie electromagnetică. Termenul  $\oint_V \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV$  reprezintă rata netă cu care energia crește în volum

datorită câmpului electromagnetic. Dacă între vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$ , respectiv  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  există relații liniare, rezultă:

$$\int_V \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) dV. \quad (3.202)$$

Întrucât puterea este rata în timp a schimbării energiei, energia electromagnetică totală înmagazinată în volumul  $V$  este:

$$W_{em} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) dV. \quad (3.203)$$

Din relația (3.203) rezultă că energia electromagnetică include energia electrică distribuită cu densitatea  $w_e = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2$  în volumul  $V$  și energia magnetică distribuită cu densitatea  $w_m = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2$ . Atât densitățile de energie, cât și forma diferențială a teoremei Poynting, privită ca fiind conservarea energiei într-un punct, este necesar să fie considerate din punct de vedere microscopic (distribuție continuă a energiei în volumul  $V$ ).



Teorema Poynting rezultă din ecuațiile de câmp și reprezintă conservarea energiei electromagnetice sub forma: *fluxul net al puterii interioare din volumul  $V_\Sigma$  prin suprafața închisă  $\Sigma$  este egal cu puterea împărțită la sarcini în volum închis de suprafață, plus rata de schimbare a energiei înmagazinate în volumul  $V$ .* Dacă în relația (3.202) se introduc expresiile pentru vectorii  $\vec{B}$  și, respectiv  $\vec{E}$ , rezultă:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \int_V \left( V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV - \oint_\Sigma \left( V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \vec{u}_n dS. \quad (3.204)$$

Întrucât sursele sunt interiorul volumului  $V$  la o distanță finită de origine, când timpul variază lent, vectorii de câmp variază cu  $\frac{1}{r^2}$ ,  $r$  fiind distanța de la sursă la punctul de observație. Potențialele variază cu  $\frac{1}{r}$  și considerând suprafața  $\Sigma$  ca fiind o sferă a cărei rază crește fără limită, atunci integrala:

$$\oint_\Sigma \left( V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \vec{u}_n dS \rightarrow 0 \text{ la fel } \frac{1}{r}, \text{ când } r \rightarrow \infty, \quad (3.205)$$

iar

$$W_{em} = \int_0^t \frac{\partial W_{em}}{\partial t} dt = \int_0^t \left[ \int_V \left( V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV \right] dt. \quad (3.206)$$

Schimbând ordinea de integrare în relația (3.206) și ținând seama de relația:

$$\left( V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt = V \delta \rho + \vec{J} \delta \vec{A}, \quad (3.207)$$

formula (344) devine:

$$W_{em} = W_e + W_m = \int_V \left( \int_0^\rho V \delta \rho \right) dV + \int_V \left( \int_0^{\vec{A}} \vec{J} \delta \vec{A} \right) dV. \quad (3.208)$$

În cazul mediilor liniare, se poate considera că  $d\rho = \rho dk$  și  $d\vec{A} = \vec{A} dk$ , unde  $k \in [0, 1]$ , iar:

$$\int_0^\rho V \delta \rho = \int_0^1 V \rho k dk = \frac{1}{2} V \rho \quad \text{și} \quad \int_0^{\vec{A}} \vec{A} \delta \vec{A} = \int_0^1 \vec{J} \vec{A} k dk = \frac{1}{2} \vec{J} \vec{A}, \quad (3.209)$$

și relația (3.208) devine:

$$W_{em} = \int_V \frac{1}{2} V \rho dV + \int_V \frac{1}{2} \vec{J} \vec{A} dV. \quad (3.210)$$

## 3.2. Teoria electromagnetică a luminii

În cadrul *teoriei electromagnetice a luminii* sunt utilizate numai proprietățile clasice ale câmpurilor electrice, pe baza acestora explicându-se pe deplin fenomenele de *interferență, difracție, reflexie, refracție, absorbție* și de *dispersie*. Există și alte fenomene cum ar fi *emisia și absorbția radiațiilor optice, efectele fotoelectric și Compton* etc, în care intervine sub o formă detaliată interacțiunea dintre lumină și atomi, molecule, care nu pot fi explicate pe baza teoriei electromagnetice a luminii (Maxwell) și este necesară teoria cuantică. *Domeniul optic al spectrului radiațiilor electromagnetice* cuprinde toate radiațiile care pot fi manipulate cu mijloace optice: lentile, oglinzi, prisme, rețele de difracție, lame etc. și se întinde între aproximativ  $100 \text{ \AA}$  (razele X moi) și  $1 \text{ mm}$  (radar), fiind împărțit în: UV vid, exclusiv pentru gaze și vapori ( $100 \text{ \AA} \div 1150 \text{ \AA}$ ), UV și pentru materia condensată ( $1150 \text{ \AA} \div 1850 \text{ \AA}$ ), UV ( $1850 \text{ \AA} \div 4000 \text{ \AA}$ ), vizibil ( $4000 \text{ \AA} \div 7500 \text{ \AA}$ ), IR apropiat ( $0,7 \text{ \mu m} \div 3 \text{ \mu m}$ ), IR ( $3 \text{ \mu m} \div 50 \text{ \mu m}$ ), IR îndepărtat ( $50 \text{ \mu m} \div 1000 \text{ \mu m}$ ).

### 3.2.1. Propagarea undelor electromagnetice

**Ecuția de propagare.** Ecuția de propagare a unei unde electromagnetice se poate obține plecând de la ecuațiile Maxwell (3.43)-(3.46) și legile de material (3.84), (3.98). Astfel, în cazul unui mediu fără sarcini spațiale ( $\rho = 0$ ) și fără curenți electrici ( $\vec{j} = 0$ , cazul unui mediu izolant, omogen, presupus perfect din punct de vedere electric și magnetic), ținând seama de relațiile:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.211)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.212)$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad (3.213)$$

$$\nabla \vec{D} = 0, \quad (3.214)$$

rezultă:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.215)$$

De asemenea, este verificată relația:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \cdot \nabla \vec{E} - \Delta \vec{E}. \quad (3.216)$$

Ținând seama de relațiile (3.215) și (3.216), rezultă *ecuația de propagare a unei unde electromagnetice* sub forma:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.217)$$

unde

$$v = (\epsilon \mu)^{-1/2} \quad (3.218)$$

reprezintă *viteza de propagare* a mărimii  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Eliminând pe  $\vec{E}$  din ecuațiile Maxwell (3.211)-(3.214) și ținând seama de legile de material, rezultă o *ecuație de undă* pentru  $\vec{H}$ , identică ecuației (3.217). Analog, se pot obține ecuații de undă pentru  $\vec{B}$  sau pentru  $\vec{D}$ . În cele ce urmează, se consideră  $\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)$ .

Ținând seama că în vid,  $\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  [S.I.] și  $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$  [S.I.], rezultă:

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (3.219)$$

deci, se găsește exact aceeași viteză ca cea a luminii în vid, aceasta fiind o confirmare strălucită a ipotezei lui Maxwell că lumina este datorată propagării undelor electromagnetice (*natura electromagnetică a luminii*). Într-un mediu transparent, altul decât vidul, caracterizat de  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  și  $\mu = \mu_0 \mu_r \approx \mu_0$ , se poate defini *indicele de refracție al mediului* prin relațiile:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (3.220)$$

$$n^2 = \epsilon_r, \quad (3.221)$$

care sunt verificate pentru frecvențe foarte joase (I. R. îndepărtat). În cazul frecvențelor mari (I. R. apropiat, V., U.V. etc.), se constată că  $\epsilon_r = \epsilon_r(\nu)$ .

**Integrala generală a ecuației de propagare.** Considerând cazul particular al problemei în care  $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ , ecuația undelor (3.7) se reduce la:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.222)$$

a cărei integrală generală, prin analogie cu ecuația undelor mecanice (volumul I), este:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{f}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{\Phi}\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (3.223)$$

Integrala generală (3.223) reprezintă suprapunerea a două perturbații. Propagarea perturbației reprezentate prin  $\vec{f}\left(t - \frac{x}{v}\right)$  sau  $\vec{\Phi}\left(t + \frac{x}{v}\right)$  este o undă specială, prin aceea că forma perturbației este nealterată în timpul propagării prin

mediu. Pe baza celor prezentate mai sus se poate afirma că, regiunea din mediu, care este sediul undelor electromagnetice, se numește *câmp electromagnetic*. Locul geometric al punctelor din mediu care sunt la un moment dat în fază poartă numele de *front al unde electromagnetice*.

### 3.2.2. Tipuri de unde electromagnetice

**Unde electromagnetice sferice.** În cazul unei simetrii sferice ecuațiile Maxwell (3.43)–(3.46) se scriu în coordonate sferice. Considerând un mediu fără sarcini electrice libere ( $\rho = 0$ ) ecuația de propagare verificată de potențialul scalar  $V$  devine:

$$\square V = \left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V = 0, \quad (3.224)$$

În coordonate sferice ecuația (3.224) se scrie:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (3.225)$$

și admite soluții de forma:

$$V = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \exp[i\omega t] \quad (3.226)$$

Dacă  $V = V(r, t)$ , ecuația (3.225) se scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.227)$$

și admite soluțiile:

$$V = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{v}\right). \quad (3.228)$$

Considerând că unda care se propagă în sensul lui  $r$  crescător (unda progresivă) reprezintă o formă simplă a undei plane:

$$f\left(t - \frac{r}{v}\right) = A \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right], \quad (3.229)$$

potențialul într-un punct  $P(r, t)$  creat de sursa  $S$  considerată în originea sistemului de coordonate, este dat de relația:

$$V(r, t) = A \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)\right]}{r}. \quad (3.230)$$

Pe baza principiului lui Huygens: o suprafață de undă, având centrul în sursa  $S_0$  (fig. 3. 5), emite unde secundare la un moment, acesta fiind ales ca origine și fiecare din aceste suprafețe de unde secundare are o rază  $vt$  la momentul  $t$ , iar anvelopa tuturor undelor secundare formează o nouă suprafață

care constituie frontul de undă la momentul  $t$ ; perturbația trimisă în  $P$  de elementul de suprafață  $dS$  este proporțională cu  $dS$ . Ținând seama de relația (3.23 0), amplitudinea unei în punctul  $M$  este:

$$V(r_1, t) = A \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r_1}{v}\right)\right]}{r_1}, \quad (3.231)$$

unde  $r_1$  este distanța de la sursa  $S_0$  la punctul  $M$ .

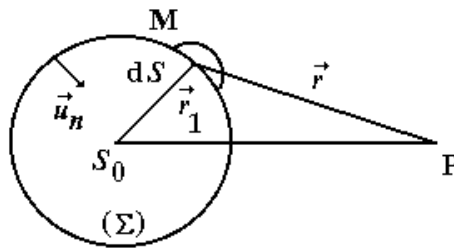


Fig. 3. 5. Reprezentarea schematică a unei unde sferice.

Potențialul în punctul  $P$  aflat la distanța  $r$  de punctul  $M$  este dat de relația:

$$V(P) = \int \frac{A}{r r_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{v}\right)\right] dS. \quad (3.232)$$

Ținând seama de faptul că potențialul satisface ecuația (3.224), rezultă:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left\{ \left[ \frac{1}{v} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{\left(t - \frac{r}{v}\right)} + \frac{V\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right] \cos(\vec{u}_n, \vec{r}) + \left( \frac{\partial V}{\partial \vec{u}_n} \right)_{\left(t - \frac{r}{v}\right)} \right\} dS. \quad (3.233)$$

Ținând seama de relația (3.232), potențialul  $V$  pe suprafața  $\Sigma$ , la momentul  $t - \frac{r}{v}$  devine:

$$V_{\left(t - \frac{r}{v}\right)} = \frac{A}{r_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{v}\right)\right] \quad (3.234)$$

Din relația (3.234) se obțin:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t - \frac{r}{v}} = i\omega \frac{A}{r_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{v}\right)\right] \quad (3.235)$$

și

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{u}_n}\right)_{t-\frac{r}{v}} = -A \cos(\vec{u}_n, \vec{r}_1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{i\omega}{v}\right) \frac{1}{r_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r+r_1}{v}\right)\right]. \quad (3.236)$$

În urma introducerii relațiilor (3.236)-(3.237) în (3.234), rezultă:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{A}{rr_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r+r_1}{v}\right)\right] dS \left[ \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v}\right) \cos(\vec{u}_n, \vec{r}) - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{i\omega}{v}\right) \cos(\vec{u}_n, \vec{r}_1) \right]. \quad (3.237)$$

Considerând  $r \gg \lambda$  și  $r_1 \gg \lambda$ , unde

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega}, \quad (3.238)$$

(situație întâlnită cel mai des în practică, mai ales în optică), relația (3.237) devine:

$$V(P) = \int \frac{A}{rr_1} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r+r_1}{v}\right)\right] dS \frac{i}{2\lambda} [\cos(\vec{u}_n, \vec{r}) - \cos(\vec{u}_n, \vec{r}_1)]. \quad (3.239)$$

În urma comparării relației (3.29), rezultată din soluția exactă a ecuațiilor Maxwell și relația (3.233), obținută, cu ajutorul principiului Huygens, se observă că factorul corectiv  $\frac{i}{2\lambda} [\cos(\vec{u}_n, \vec{r}) - \cos(\vec{u}_n, \vec{r}_1)]$  nu a fost prevăzut de către principiul lui Huygens. Acest factor corectiv evidențiază faptul că amplitudinea undelor secundare, care sosesc în punctul  $P$  de la sursă, depinde de unghiurile făcute de  $\vec{r}$  și  $\vec{r}_1$  cu normala  $\vec{u}_n$ , precum și de lungimea de undă. Utilizând relația (3.233) se pot rezolva probleme de difracție uzuale, aceasta fiind o aplicație a principiului Huygens. Relațiile (3.238) și (3.239), care sunt soluții ale ecuației d'Alembert (3.224), dau o expresie matematică exactă a principiului Huygens, aducându-i corecțiile necesare. Dacă între sursa  $S_0$  și punctul  $P$  se pun ecrane în care sunt practicate orificii (fante), expresia (3.239) conduce la previziuni corecte ale figurilor de difracție.

**Unde electromagnetice plane. Unda armonică plană.** Unda electromagnetică plană, progresivă, prin analogie cu cea mecanică (volumul I), este descrisă de ecuația:

$$E_p(\xi, t) = \text{const.} \cdot f\left(t - \frac{\xi}{v}\right) \quad (3.240)$$

sau

$$\vec{E}_p(\xi, t) = \vec{E}_0 f\left(t - \frac{\xi}{v}\right). \quad (3.241)$$

În cazul unei armonice plane se utilizează și expresiile:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{u}_k \vec{r}}{v} \right) \right], \quad (3.242)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A} \exp [i(\omega t - \vec{k} \vec{r})], \quad (3.243)$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{A} \exp [i(\omega t - kx)]. \quad (3.244)$$

**Ecuția atemporală a undelor electromagnetice.** Pe baza analogiei cu undele mecanice ecuația atemporală a undelor electromagnetice este:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (3.245)$$

intensitatea câmpului electric, care reprezintă o undă armonică plană, putând fi pusă sub forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp[i\omega t] \quad (3.246)$$

**Unde produse de perturbații de durată finită și de perturbații de durată infinită.** În cazul unei perturbații de forma (fig. 3. 6):

$$E(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \in \left( -\infty, -\frac{\Delta t}{2} \right); \\ E_0 \exp[i\omega_0 t], & \text{pentru } t \in \left( -\frac{\Delta t}{2}, +\frac{\Delta t}{2} \right); \\ 0, & \text{pentru } t \in \left( +\frac{\Delta t}{2}, \infty \right), \end{cases} \quad (3.247)$$

rezultă:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp[-i\omega t] dt = E_0 \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \exp[-i(\omega_0 - \omega)t] dt = \\ &= E_0 \cdot \Delta t \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \Delta\omega \cdot \Delta t\right)}{\frac{1}{2} \Delta\omega \cdot \Delta t} \end{aligned} \quad (3.248)$$

unde  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ . Reprezentând intensitatea unei  $|E(\omega)|^2$  funcție de  $1/2 \Delta\omega \cdot \Delta t$  (fig. 3. 7), se observă că unda electromagnetică este compusă dintr-o infinitate de perturbații de frecvențe diverse  $\omega$ , unde

$$\omega \in \left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right). \quad (3.249)$$

În cazul când banda de frecvență în care  $E(\omega)$  are valori semnificative este limitată abateră maximă  $\Delta\omega$  a frecvențelor față de  $\omega_0$  este dată de relația:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi. \quad (3.250)$$

Din relația (3.250) se observă că în cazul perturbațiilor de durată finită, se obține un spectru de frecvențe și în cazul particular în care  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t$  fiind durata perturbației), rezultă  $\Delta\omega \rightarrow \infty$ , adică, întregul spectru de frecvențe.

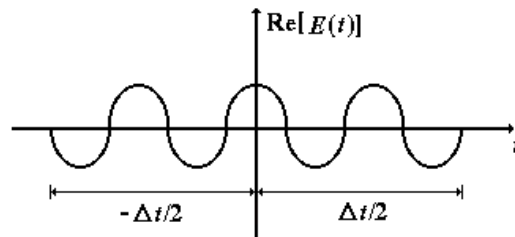


Fig. 3. 6. Reprezentarea grafică a unei perturbații finite.

În cazul când  $\Delta t$  este foarte mare, se obține un spectru mic de frecvențe, în jurul frecvenței  $\omega_0$ , iar pentru  $\Delta t \rightarrow \infty$ , rezultă  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega = \omega_0$  (cazul unei armonice plane).

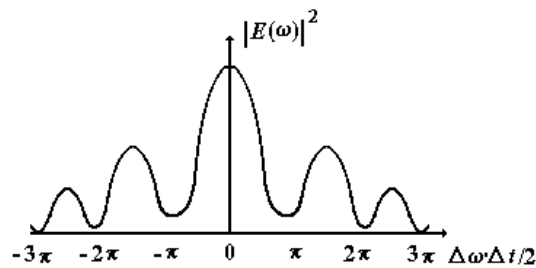


Fig. 3. 7. Dependența intensității undei de  $\Delta\omega \cdot \Delta t / 2$ .

### 3.3. Tipuri de propagare

**Propagarea liberă. Regimuri staționare.** La fel ca în cazul undelor mecanice, și în cazul undelor electromagnetice, propagarea liberă corespunde unei perturbații sinusoidale pure, de frecvență  $\omega$ . În cazul unui mediu de întindere infinită ( $x \rightarrow \infty$ ), rezultă:

$$\vec{E} = \vec{E}_p = \vec{u}_x E(z) \exp[i\omega t] \quad (3.251)$$



unde

$$E(z) = A \exp[-ikz]. \quad (3.252)$$

Dacă mediul are întinderea finită  $x = L$ , prin analogie cu undele mecanice (volumul I), și în cazul undelor electromagnetice există un regim staționar, deoarece bilanțul transmisiei energiei într-un anumit punct din mediu este nul.

În cazul existenței de reflexii atât în  $x = L$ , cât și în  $x = 0$ , apare *regimul rezonant*,  $E_n(z)$  existând pentru anumite valori ale parametrului  $\omega$ ,  $\omega_n$ , numite *valori proprii*. Soluțiile  $E(z)$ , corespunzătoare valorilor proprii  $\omega_n$ , poartă numele de *funcții proprii*.

**Propagarea într-un mediu dispersiv.** În cazul unei perturbații de durată finită care se propagă în mediu are o amplitudine de valori semnificative în domeniul de frecvențe  $\omega \in \left[ \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$ , prin analogie cu undele mecanice se obține:

$$E(z, t) = E_0(x, t) \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (3.253)$$

unde

$$E_0(z, t) = A \Delta\omega \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)], \quad (3.254)$$

iar

$$\alpha = \left[ t - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] \frac{\Delta\omega}{2}. \quad (3.255)$$

La fel ca în cazul undelor mecanice și în cazul undelor electromagnetice se definesc: *viteza de fază*,

$$v = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad (3.256)$$

și *viteza de grup*

$$U = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}, \quad (3.257)$$

între acestea existând relația Rayleigh:

$$U = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3.258)$$

$U$  fiind viteza de propagare a amplitudinii, adică, viteza de propagare a energiei oscilației rezultante. *Pachetul de unde* există, practic, pentru:

$$-\pi \leq \left( t - \frac{z}{U} \right) \frac{\Delta\omega}{2} \leq \pi, \quad (3.259)$$

adică

$$Ut - l \leq z \leq l + Ut \quad (3.260)$$

unde

$$l = \frac{2\pi U}{\Delta\omega}, \quad (3.261)$$

trenul de unde (pachetul de unde) fiind cuprins între punctele  $Ut - l$  și  $Ut + l$  și are lungimea  $2l$ . Pentru deducerea relațiilor de mai sus s-a presupus că  $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 1$ ,

adică  $\frac{l}{\lambda} \geq 1$ , numai în acest caz, trenul de unde se deplasează fără deformație, amplitudinea sa fiind o funcție periodică care se deplasează cu viteza  $U$ .

### 3.3.1. Structura undei electromagnetice

În cele ce urmează se consideră o undă electromagnetică care se propagă în direcția  $\vec{u}_n$  și că  $\vec{u}_n$  este perpendicular la planul  $P$  (fig. 3. 8). Ecuația undei descrisă mai sus este:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.262)$$

unde  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, \vec{u}_n, t)$ . Din fig. 4. 8 se observă că:

$$\vec{r} \vec{u}_n = xu_x + uu_y + zu_z \quad (3.263)$$

și

$$\frac{\partial}{\partial x} = u_x \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = u_y \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = u_z \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.264)$$

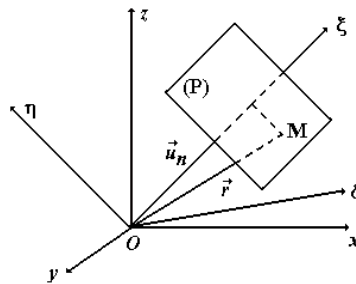


Fig. 3. 8. Reprezentarea schematică a propagării unei unde electromagnetice.

### 3.3.2. Transversalitatea intensităților câmpurilor electric și magnetic

Ținând seama de relația (3.264), ecuația (3.262) devine:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.265)$$

Făcând schimbările de variabilă  $\xi - vt = \alpha$  și  $\xi + vt = \beta$ , rezultă:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \alpha \cdot \partial \beta} = 0, \quad (3.266)$$

adică

$$\vec{E} = \vec{E}_p(\alpha) + \vec{E}_r(\beta) = \vec{E}_p(\vec{u}_n \vec{r} - vt) + \vec{E}_r(\vec{u}_n \vec{r} + vt). \quad (3.267)$$

Unda progresivă este descrisă de ecuațiile:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r} \vec{u}_n - vt) \quad (3.268)$$

și

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r} \vec{u}_n - vt). \quad (3.269)$$

În cazul unei armonice plane, relațiile (3.268) și (3.269) devin:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v} \right) \right], \quad (3.270)$$

respectiv

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v} \right) \right]. \quad (3.271)$$

Întrucât  $\rho = 0$ , rezultă:

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad (3.272)$$

și, deoarece  $\nabla \vec{B} = 0$ , atunci:

$$\nabla \vec{H} = 0. \quad (3.273)$$

Pe baza relațiilor (3.272) și (3.273) se poate scrie că:

$$\vec{u}_n \cdot \vec{E} = 0 \text{ și } \vec{u}_n \cdot \vec{H} = 0, \quad (3.274)$$

adică, atât intensitatea câmpului electric, cât și intensitatea câmpului magnetic ale unei sunt perpendiculare pe direcția de propagare a acesteia, undele electromagnetice fiind unde transversale.

**Relațiile dintre intensitățile câmpurilor electric și magnetic.** În urma schimbării de variabilă

$$u = \vec{r} \cdot \vec{u}_n - vt, \quad (3.275)$$

relațiile (3.262) devin:

$$\vec{E} = \vec{E}(u) \text{ și } \vec{H} = \vec{H}(u). \quad (3.276)$$

Pe baza legii inducției electromagnetice (3.43) și a magnetizației (3.66), rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.277)$$

Întrucât

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial u} \frac{du}{dt} = -v \vec{H}'_u \quad (3.278)$$

și

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i} = E'_{j_u} u_{x_i}, \quad (3.279)$$

unde  $j, i = x, y, z$  relația (3.277) devine:

$$\vec{u}_n \times \vec{E}' = \mu v \vec{H}'_u, \quad (3.280)$$

care, prin integrare, conduce la:

$$\vec{u}_n \times \vec{E} = \mu v \vec{H}' \quad (3.281)$$

sau

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{u}_n \times \vec{E}. \quad (3.282)$$

De asemenea, ținând seama de legea circuitului magnetic (3.44) și de legea polarizației electrice (3.65):

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.283)$$

Ținând seama de relația  $\vec{H} = \vec{H}(u)$  și făcând același raționament ca în cazul expresiei (3.277), se obține:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{u}_n \times \vec{H}. \quad (3.284)$$

Întrucât în cazul undelor regresive  $u = \vec{u}_n \vec{r} + vt$ , rezultă:

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{u}_n \times \vec{E}, \quad (3.285)$$

respectiv

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{u}_n \times \vec{H}. \quad (3.286)$$

Pe baza celor prezentate mai sus rezultă că intensitățile câmpurilor electric și magnetic sunt perpendiculare atât pe direcția de propagare, cât și între ele, raportul lor fiind constant, triedrul  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{v} = \vec{u}_n v)$  fiind un triedru direct. Acest ansamblu ortogonal al vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  constituie o *undă electromagnetică plană, polarizată rectiliniu*.

**Impedanța vidului. Intensitatea unei electromagnetice.** Pe baza teorema energiei electromagnetice rezultă că pentru  $\vec{E}_i = 0$  și în absența pierderilor

$$\nabla \vec{S}_p = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) \quad (3.287)$$

unde

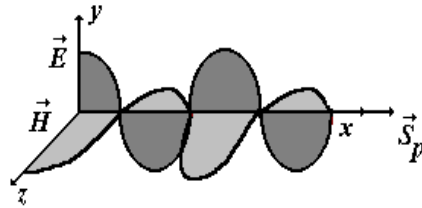
$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.288)$$

este vectorul lui Poynting. În cazul unei unde electromagnetice armonice plane, (fig. 3. 9), rezultă:

$$E_x = 0; E = E_y = E_m \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]; E_z = 0 \quad (3.289)$$

și

$$H_x = 0; H_y = 0; H_z = H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (3.290)$$



**Fig. 3. 9.** Reprezentarea schematică a unei unde electromagnetice armonice plane.

Introducând, prin definiție, *impedanța de undă* a mediului:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}, \quad (3.291)$$

unde  $Z_0$  ( $\approx 376,6 \Omega$ ) este impedanța vidului, atunci se constată că între modulul vectorului lui Poynting și intensitatea câmpului electric există relația:

$$S_p = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}^2. \quad (3.292)$$

Întrucât intensitatea unei sau media în timp a intensității este proporțională cu  $|\vec{E}|^2$  și cu fluxul de energie este  $\frac{1}{2} \frac{E_m^2}{Z}$  sau  $\frac{1}{2} Z H_m^2$ , rezultă că intensitatea unei este proporțională cu modulul vectorului lui Poynting.

### 3.4. Starea de polarizare a luminii

#### 3.4.1. Bazele experimentale

Este cunoscut faptul că lumina prezintă caracteristici care nu pot fi puse în evidență cu ochiul. de multe ori fiind necesare, chiar pentru informații calitative, aparate optice care să prelucreze informația și s-o transmită ochiului. Din punct de vedere experimental, se constată că două fascicule de lumină cu aceeași distribuție a intensității într-un anumit domeniu de frecvență pot interacționa în mod diferit cu aceleași elemente optice. În general, interacțiunile pot fi puse în evidență printr-o inegalitate a direcției de propagare, o modificare a spectrelor lor sau o combinație a acestora. Acea caracteristică a luminii la care ochiul nu este sensibil, dar pentru care există elemente optice sensibile, este cunoscută sub numele de *polarizare* (*stare de polarizare*).

Un fascicul de lumină emis de sursă transportată la detector atât informații despre sursă, cât și despre oricare interacțiune pe care o suferă pe drumul de la sursă la detectorul. Informațiile ne furnizează cunoștințe despre condițiile emisie și procesele fizice care au loc în interacțiunea cu mediul. Pentru a căpăta informația necesară, trebuie făcute atât măsurătorile asupra observabilelor: intensitatea radiației,  $I = I(\omega)$ , gradul de polarizare,  $P = P(\omega)$  și numărul de undă  $\vec{k} = \vec{k}(\omega)$ , care caracterizează direcția de propagare

Pentru a descrie clasic o undă electromagnetică, este necesar să se cunoască intensitatea, frecvența, direcția de propagare, orientarea vibrațiilor față de aceeași axă cunoscută și variațiile intensității, frecvenței, direcției de propagare și orientării vibrațiilor față de aceeași axă cunoscută, iar pentru a specifica orientarea vibrațiilor față de o axă cunoscută, este necesar să se aleagă unul din vectorii intensitate câmp electric sau intensitate câmp magnetic. Pe baza experienței elaborată de Wiener rezultă că vectorul intensitate câmp electric  $\vec{E}$  joacă rolul dominant în măsurătorile optice. Caracteristicile de orientare ale acestui vector în timp și în spațiu sunt numite *polarizarea undei*. Fixând un punct particular al fascicului undei prin locul geometric al vârfului vectorului electric la acel punct, se obține o măsură a polarizării. *Planul de propagare* este planul care conține direcția vibrației și direcția de propagare.

#### 3.4.2. Unda electromagnetică plană și armonică

Este cunoscut faptul că orice undă electromagnetică poate fi considerată ca o suprapunere de unde electromagnetice plane armonice. În cele ce urmează se consideră o undă electromagnetică plană armonică, pentru care  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  au forma:

$$a \cos(\tau + \delta) \quad (3.293)$$

unde  $\tau$  este partea variabilă a factorului de fază, adică:

$$\tau = \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_n}{v} \right) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} . \quad (3.294)$$

Alegând axa  $Oz$  paralelă cu direcția  $\vec{u}_n$  (fig. 3. 10), componentele după axele  $Ox$  și  $Oy$  ale lui  $\vec{E}$  și cele corespunzătoare lui  $\vec{H}$  sunt nenule, întrucât câmpul este transversal. În cele ce urmează se studiază natura curbei (locul geometric) care este descrisă de vârful vectorului intensității câmpului electric ca punct tipic în spațiu. Această curbă este locul punctelor ale căror coordonate sunt:

$$E_x = E_{x_0} \cos(\tau + \delta_x) = \operatorname{Re} \{ E_{x_0} \exp[i(\tau + \delta_x)] \}, \quad (3.295)$$

$$E_y = E_{y_0} \cos(\tau + \delta_y) = \operatorname{Re} \{ E_{y_0} \exp[i(\tau + \delta_y)] \}, \quad (3.296)$$

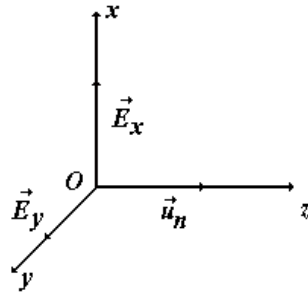
$$E_z = 0. \quad (3.297)$$

Pe baza celor prezentate mai sus, rezultă:

$$\frac{E_x}{E_{x_0}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x, \quad (3.298)$$

și

$$\frac{E_y}{E_{y_0}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y. \quad (3.299)$$



**Fig. 3. 10.** Reprezentarea schematică a direcției de propagare a unei unde electromagnetice.

În urma amplificării relației (3.298) cu  $\sin \delta_y$  și (3.299) cu  $-\sin \delta_y$  și adunării rezultatelor, rezultă:

$$\frac{E_x}{E_{x_0}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{y_0}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin \delta \quad (3.300)$$

De asemenea, în urma amplificării relației (3.298) cu  $\cos \delta_y$  și pe (3.299) cu  $-\cos \delta_x$  și adunând rezultatele, se obține:

$$\frac{E_x}{E_{x_0}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{y_0}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin \delta, \quad (3.301)$$

unde

$$\delta = \delta_y - \delta_x. \quad (3.302)$$

Din relațiile (3.301) și (3.302), după ridicarea acestora la pătrat și adunarea lor, rezultă:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x_0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y_0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x_0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y_0}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (3.303)$$

relație care reprezintă ecuația unei conice.

### 3.4.3. Polarizarea eliptică

Determinantul corespunzător conice din relația (3.303) este:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\delta \\ \frac{E_x^2}{E_{x_0}^2} & -\frac{E_x E_y}{E_{x_0} E_{y_0}} \\ \cos\delta & 1 \\ -\frac{E_x E_y}{E_{x_0} E_{y_0}} & \frac{E_y^2}{E_{y_0}^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{E_{x_0}^2 E_{y_0}^2} (1 - \cos^2\delta) = \left(\frac{\sin\delta}{E_x E_{y_0}}\right)^2 \geq 0, \quad (3.304)$$

acesta reprezentând o elipsă înscrisă într-un dreptunghi ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate (fig. 3. 11) și ale căror lungimi sunt  $2E_{x_0}$  și  $2E_{y_0}$ , elipsa atingând laturile acestui dreptunghi în punctele:

$$(\pm E_{x_0}; \pm E_{y_0} \cos\delta) \quad (3.305)$$

și

$$(\pm E_{x_0} \cos\delta; \pm E_{y_0}). \quad (3.306)$$

unda reprezentată de relațiile (3.295) și (3.297) fiind *polarizată eliptic*.

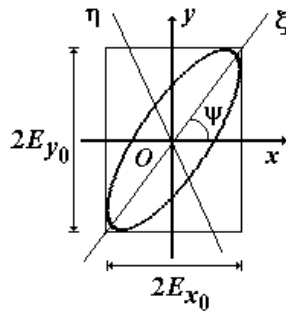


Fig. 3. 11. Reprezentarea schematică a unei polarizate eliptic.

Intensitatea câmpului magnetice  $\vec{H}$  se comportă la fel ca intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ , deoarece:



$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{y_0} \cos(\tau + \delta_y), \quad (3.307)$$

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{x_0} \cos(\tau + \delta_x), \quad (3.308)$$

$$H_z = 0. \quad (3.309)$$

Pe baza celor prezentate mai sus rezultă că vârful vectorului intensitate câmp magnetic,  $\vec{H}$ , descrie o elipsă într-un dreptunghi ale cărui laturi sunt paralele la direcțiile  $Ox$  și  $Oy$  și ale căror lungimi sunt  $2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{y_0}$  și, respectiv

$2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{x_0}$ . Se demonstrează că:

$$\operatorname{tg} 2\Psi = 2 \frac{E_{x_0} E_{y_0}}{E_{x_0}^2 - E_{y_0}^2} \cos \delta = 2 \frac{\frac{E_{y_0}}{E_{x_0}}}{\left(\frac{E_{y_0}}{E_{x_0}}\right)^2} \cos \delta, \quad (3.310)$$

unde  $\Psi$  este unghiul dintre direcția  $Ox$  și  $O\xi$ . De asemenea, se poate defini un unghi auxiliar care specifică forma și orientarea elipsei.

### 3.5. Interferența luminii

*Interferența* reprezintă fenomenul de suprapunere a undelor. În regiunea de suprapunere intensitatea luminii variază de la un punct la altul între maxime care depășesc suma intensităților fasciculelor și minime care pot fi nule, obținându-se *franje de interferență*. *Intensitatea luminii*,  $I$  este definită ca fiind media în timp a energiei care traversează unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția fluxului de energie în unitatea de timp. În cazul interferenței, comparând intensitățile radiațiilor în același mediu, rezultă că mărimea  $\langle E^2 \rangle$ , unde  $E$  este intensitatea câmpului electric, este o măsură a intensității. Pentru ca să se producă fenomenul de interferență undele trebuie să aibă aceeași pulsație și să fie *coerente*.

#### 3.5.1. Coerența undelor luminoase

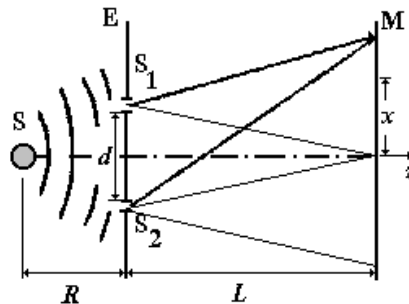
*Coerența* reprezintă proprietatea undelor de a avea aceeași lungime de undă și o diferență de fază constantă în timp. În cazul suprapunerii undelor coerente ia naștere fenomenul de *interferență staționară*.

**Coerența totală și coerența parțială. Interferometrul Young.** Pentru punerea în evidență a fenomenului de interferență și evaluarea *gradului de coerență* al unei radiații optice se utilizează un *interferometru Young* (fig. 3. 12). Se consideră undele emise de sursele secundare  $S_1$  și  $S_2$ , reprezentate, din punct de vedere optic, prin vectorii intensitate a câmpului electric  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$ , și suprapuse într-un punct oarecare M din planul în care se observă interferența. Intensitatea radiantă  $I$  rezultantă în punctul respectiv este definită prin relația:

$$I = \left\langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \right\rangle = I_1 + I_2 + 2\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \quad (3.311)$$

unde  $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle$  este intensitatea radiantă în punctul M, în absența undei  $\vec{E}_2$  și  $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle$  este intensitatea radiantă în același punct în absența undei  $\vec{E}_1$ . Se pot prezenta două situații:

- a)  $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ , caz în care  $I \neq I_1 + I_2$ , adică, există interferență între undele  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$ ;
- b)  $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle = 0$ , caz în care  $I = I_1 + I_2$  adică, undele  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  nu interferă.



**Fig. 3. 12.** Dispozitivul Young de interferență prin divizarea frontului de undă inițial pe un ecran E cu două fante; S este sursa de radiații, iar  $S_1$  și  $S_2$  sunt sursele secundare.

Pentru ca undele considerate  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  să poată interfera, este necesar ca acestea să aibă o proprietate numită coerență. Această noțiune de coerență este echivalentă matematic cu existența unei relații stabile în spațiu și/sau timp între mărimi fizice care caracterizează radiația optică. În optica clasică, prin coerență se înțelege corelația parametrilor câmpului undei luminoase (faza și frecvența), considerați în diferite puncte ale spațiului, pe același front de undă (*coerență spațială*) sau în diferite momente de timp (*coerență temporală*). Coerența spațială și cea temporală sunt proprietăți independente.

Pentru caracterizarea fenomenului de coerență se consideră două unde electromagnetice monocromatice plane, de aceeași pulsație  $\omega$ , și considerăm, pentru simplitate, că cele două unde au aceeași amplitudine  $E_0$  și, în plus, că sunt plan-polarizate după aceeași direcție, ceea ce permite considerarea componentelor scalare ale vectorilor intensitate a câmpului electric:

$$E_1 = E_0 \cos(\varphi_1 - \omega t), \quad E_2 = E_0 \cos(\varphi_2 - \omega t). \quad (3.312)$$

Dacă  $E_0$  și  $\varphi_{1,2}$  depind de timp și dacă se consideră numai variația fazei cu timpul, se poate calcula media temporală a produsului  $E_1 E_2$  pe timpul de răspuns al fotodetectorului sub forma:

$$\langle E_1 E_2 \rangle = E_0^2 \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \quad (3.313)$$

și, în consecință:

$$I = E_1^2 + E_2^2 + 2\langle E_1 E_2 \rangle = 2I_0 [1 + \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle]. \quad (3.314)$$

Cu cât  $\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle$  este mai apropiat de zero, cu atât mai slab este efectul de interferență (cu atât mai redus este gradul de coerență al unde). La limită, când  $\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = 0$ , în general, *coerența nu există*. Pentru

$\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \pm 1$ , avem *coerență totală*. Toate cazurile intermediare posibile între cazurile limită (absența coerenței și coerență totală) corespund unei *coerențe parțiale*.

Dacă ne punem problema coerenței reciproce a undelor luminoase provenite de la  $S_1$  și  $S_2$ , trebuie să ținem seama de faptul că undele parcurg distanțe diferite  $S_1 M \neq S_2 M$ , în durate de timp diferite  $\tau_1$  și, respectiv,  $\tau_2$ . Astfel, câmpul electromagnetic în punctul M, la momentul de timp  $t$ , poate fi reprezentat prin:

$$E(t) = E_1(t - \tau_1) + E_2(t - \tau_2). \quad (3.315)$$

Intensitatea unde luminoase în punctul M, exprimată ca medie temporală a modulului pătrat al expresiei (3.315) este:

$$\begin{aligned} I &= \left\langle [E_1(t - \tau_1) + E_2(t - \tau_2)][E_1(t - \tau_1) + E_2(t - \tau_2)]^* \right\rangle = \\ &= \left\langle E_1(t - \tau_1) E_1^*(t - \tau_1) \right\rangle + \left\langle E_2(t - \tau_2) E_2^*(t - \tau_2) \right\rangle + \\ &+ \left\langle E_1(t - \tau_1) E_2^*(t - \tau_2) + E_1^*(t - \tau_1) E_2(t - \tau_2) \right\rangle = \\ &= \left\langle E_1(t) E_1^*(t) \right\rangle + \left\langle E_2(t) E_2^*(t) \right\rangle + \left\langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) + E_1^*(t + \tau) E_2(t) \right\rangle = \\ &= I_1 + I_2 + 2\text{Re} \left\langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.316)$$

unde  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ . Efectul de coerență mutuală, care condiționează obținerea interferenței undelor, este descris de ultimul termen din relația (3.316). Astfel, introducând notația:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_1(t+\tau)E_2^*(t) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (3.317)$$

unde  $\gamma_{12}(\tau)$  este numit *grad complex de coerență reciprocă* a undelor ce interferează. Introducerea acestei funcții permite exprimarea intensității radiante a unei rezultate prin interferență în punctul M sub forma:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} \quad (3.318)$$

unde:

- a)  $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$  corespunde unei *coerențe complete (totale)*;
- b)  $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$  corespunde unei *coerențe parțiale*.
- c)  $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$  corespunde *absenței interferenței*, adică necoerenței

totale;

Deci, mărimea  $|\gamma_{12}(\tau)|$  poate caracteriza cantitativ gradul de coerență.

Astfel, se poate scrie:

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \exp\{i[\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}]\}, \quad (3.319)$$

unde  $\varphi_{12}(\tau)$  este diferența de fază dintre cele două unde în punctele surselor secundare  $S_1$  și  $S_2$ , iar  $\varphi_{\Delta}$  este diferența de fază dintre aceste unde în punctul M, datorită diferenței de drum  $\Delta = S_2M - S_1M$  a celor două unde electromagnetice, adică:

$$\varphi_{\Delta} = k(S_2M - S_1M) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M) \quad (3.320)$$

unde  $k$  este modulul vectorului de propagare al undei rezultante. Pentru a deduce argumentul  $\varphi_{12}(\tau)$  al gradului *complex de coerență reciprocă (grad complex de coerență)*,  $\gamma_{12}(\tau)$ , se ține seama de faptul că, în lumina monocromatică, franjele strălucitoare corespund diferenței de fază  $\varphi'_{\Delta} = 2n\pi$ , iar în lumina cvasimonocromatică, diferenței de fază  $\varphi_{12}(\tau) + \varphi_{\Delta} = 2n\pi$ ,  $n$  fiind un număr întreg.

Astfel, există o deplasare a franjelor de interferență când se trece de la lumină monocromatică la lumină cvasimonocromatică,

$$\Delta\varphi_{\Delta} = \varphi'_{\Delta} - \varphi_{\Delta} = \varphi_{12}(\tau). \quad (3.321)$$

Dacă pentru diferența de fază de  $2\pi$  există o deplasare a unei franje cu distanța  $\Delta x$ , la o diferență de fază  $\Delta\varphi_{\Delta}$  există o deplasare  $\Delta x'$  oarecare, rezultând:

$$\Delta\varphi_{\Delta} = 2\pi \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \varphi_{12}(\tau). \quad (3.322)$$

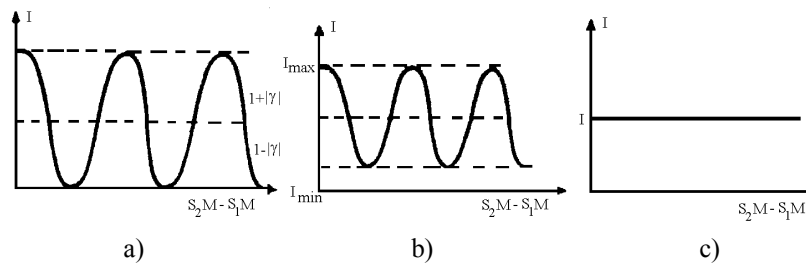
Deci, măsurând deplasarea  $\Delta x'$  și intervalul  $\Delta x$  dintre două franje, se poate deduce argumentul  $\varphi_{12}(\tau)$  al gradului complex de coerență  $\gamma_{12}(\tau)$ . Ținând seama de expresia (3.322), relația (3.318) devine:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}] \quad (3.323)$$

Relația (3.323) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} I &= |\gamma_{12}(\tau)| \left\{ I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}] \right\} + \\ &+ [1 - |\gamma_{12}(\tau)|] (I_1 + I_2) = \\ &= I_{\text{coerent}} + I_{\text{necoerent}} \end{aligned} \quad (3.324)$$

unde  $I_{\text{coerent}}$  se poate considera că provine din suprapunerea coerentă a două unde electromagnetice, cu intensitățile  $|\gamma_{12}(\tau)|I_1$  și  $|\gamma_{12}(\tau)|I_2$ , și a căror diferență de fază relativă este  $\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}$ , iar  $I_{\text{necoerent}}$  provine din suprapunerea necoerentă a două unde cu intensitățile  $[1 - |\gamma_{12}(\tau)|]I_1$  și  $[1 - |\gamma_{12}(\tau)|]I_2$ . Deci, radiația electromagnetică în punctul M poate fi privită ca un amestec de unde coerente și necoerente. În fig. 3. 13 este reprezentată distribuția intensității radiante (funcție de distanța  $\Delta = S_2M - S_1M$ ) în cazul interferenței, pentru cazul realizabil experimental  $I_1 = I_2$  în situațiile: a), b), și c).



**Fig. 3. 13.** Dependența intensității radiante a unei rezultate prin interferență de tip Young în punctul M de diferența de drum geometric între unde, în cazurile: a) coerența totală a celor două unde, b) coerența parțială și c) lipsa totală de coerență.

Când are loc fenomenul de interferență, pe ecranul în care se află punctul M, se observă franje (maxime și minime de intensitate radiantă, provenite din suprapunerea fasciculelor de lumină obținute de la sursele secundare  $S_1$  și  $S_2$ ). Examinându-se două franje de interferență vecine, una strălucitoare, a cărei intensitate în centru este  $I_{\max}$  și alta întunecată, a cărei intensitate în centru este

$I_{\min}$ , se poate defini *vizibilitatea*  $V$  a franjelor de interferență în apropierea punctului ales M prin relația:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (3.325)$$

Măsurând în punctul M pe  $V$ , se poate determina pentru punctul respectiv modulul funcției de coerență reciprocă

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{I_{\text{coerent}}}{I_{\text{necoerent}}}. \quad (3.326)$$

Într-adevăr, ținând seama că, în relația (3.324),  $I = I_{\max}$  pentru  $\cos[\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}] = 1$  și  $I = I_{\min}$  pentru  $\cos[\varphi_{12}(\tau) - \varphi_{\Delta}] = -1$ , se obține:

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{1}{2}V \cdot \left( \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \right). \quad (3.327)$$

În relația (3.327) mărimile  $V$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  pot fi determinate experimental.

**Coerența spațială.** Coerența spațială este determinată de proprietățile transversale ale undelor electromagnetice. În general, *funcția de coerență mutuală* în cazul a două câmpuri  $E(\vec{r}_1, \tau_1)$  și  $E(\vec{r}_2, \tau_2)$  în punctele diferite  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  și la momentele diferite  $\tau_1, \tau_2$  este:

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau_1, \tau_2) = \left\langle E_1^*(\vec{r}_1, \tau_1) E_2(\vec{r}_2, \tau_2) \right\rangle \quad (3.328)$$

Pentru a separa caracteristicile spațiale de cele temporale ale funcției mutuale de coerență se consideră  $\tau_1 = \tau_2$ , deci  $\tau = 0$ . În acest caz,  $(\tau = 0)$ ,  $\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ , *funcția de coerență spațială* caracterizează coerența mutuală a câmpurilor în două puncte diferite din spațiu,  $S_1$  și  $S_2$  la același moment de timp (fig. 4. 12).

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \frac{\left\langle E_1^*(t) E_2(t) \right\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (3.329)$$

Noțiunea de coerență spațială caracterizează și sursele luminoase. Astfel, funcția de coerență mutuală (3.328) caracterizează sursele staționare. În cazul când în experimentul cu dispozitivul Young (fig. 3. 12) sursa S aflată la distanța  $R$  de ecranul E este înlocuită cu două surse punctiforme, independente, una fiind situată pe axa  $z$  a dispozitivului, iar cealaltă la distanța  $\rho$  de aceasta, diferența de fază corespunzătoare radiațiilor emise de cele două surse este:

$$\varphi = 2\pi \frac{\rho d}{\lambda R}. \quad (3.330)$$

Sursa punctiformă de pe axa  $z$  produce pe ecranul de observație situat la distanța  $L$  față de ecranul E franje cu vizibilitate perfectă ( $V = 1$ ). În cazul când  $L \gg \rho$  franjele de interferență produse de a doua sursă sunt deplasate față de cele produse de prima sursă cu distanța  $\frac{\rho L}{R}$ . Câmpurile celor două surse fluctuează independent și nu interferă pentru un interval de timp oarecare măsurabil. Pentru a exista franje de interferență în experimentul cu două surse trebuie ca franjele asociate cu o sursă (punctiformă) să coincidă practic cu franjele celeilalte. Aceasta se întâmplă dacă deplasarea dacă deplasarea figurii de interferență  $\frac{\rho L}{R}$  este mai mică decât distanța dintre franje  $\frac{\lambda L}{d}$ , sau dacă distanța  $d$  dintre orificiile din ecranul E este suficient de mică:

$$d < \frac{\lambda R}{\rho}. \quad (3.331)$$

În relația (3.331) factorul  $\frac{\lambda}{\rho}$  este aproximativ egal cu unghiul de difracție al luminii având lungimea de undă  $\lambda$  care iluminează o apertură de rază  $\rho$ . Astfel, funcția de coerență mutuală a câmpului pentru o sursă ordinară este legată de figura de difracție pentru o apertură de aceeași dimensiuni cu sursa (*teorema Van Cittert-Zernike*).

În cazul când sursa are forma unui disc circular de rază  $\rho$  gradul de coerență spațială într-un plan paralel cu sursa și situat la distanța  $R$  de aceasta, ( $R \gg \rho$  și  $R \gg d$ ) este dat de relația:

$$|\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)| = \left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|. \quad (3.332)$$

unde  $J_1(x)$  este funcția Bessel de ordinul I, iar  $x = \frac{2\pi\rho}{\lambda R} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{2\pi\rho d}{\lambda R}$ . Pe baza celor prezentate mai sus se poate spune că din punct de vedere al proprietăților spațiale radiațiile emise de sursele clasice sunt net inferioră celor laser. Astfel, din punct de vedere al *concentrației energiei* pe o suprafață ( $1 \mu\text{m}^2$ ) limitată de difracție în cazul surselor clasice aceasta poate avea loc pe un cerc cu diametrul de ordinul lungimii de undă  $\lambda$  dar conține foarte puțină energie, iar în cazul laserelor pentru aceeași operație toată energia este concentrată pe suprafața cercului. În cazul surselor clasice *concentrația unghiulară* a radiației ( $1 \mu\text{rad}$ ) este limitată de defectele lentilelor, iar energia este foarte puțină în unda cvasiplană obținută. Aceeași operație în cazul radiației laser este limitată de diametrul componentelor optice utilizate și toată energia este concentrată în unda cvasiplană obținută.

**Coerența temporală. Interferometrul Michelson.** Dacă radiația emisă la un moment dat de un punct al sursei poate interfera cu radiația emisă la un moment ulterior de același punct al sursei, cele două radiații sunt coerente temporal, mărimea intervalului de timp caracterizând *coerența temporală* a sursei. În acest caz funcția de coerență mutuală este:

$$\gamma(\tau, 0) = \frac{\langle E(t, x)E^*(t + \tau, x) \rangle}{\sqrt{|E(t, x)|^2 |E(t + \tau, x)|^2}}, \quad (3.333)$$

unde  $\tau$  este întârzierea de observare a stării câmpului, observată la aceeași cotă radielă  $x$  pe undă. În cazul unui laser ideal care funcționează în regim continuu pentru orice  $x$  și  $\tau$

$$|\gamma(\tau, 0)| = 1. \quad (3.334)$$

Coerența temporală poate fi evidențiată cu ajutorul *interferometrului Michelson* (fig. 3. 14). Fasciculul incident este despicat în două cu ajutorul unui divizor de fascicul (lamă semitransparentă), cele două fascicule rezultate având intensități egale cu jumătate din intensitatea fasciculului incident sunt reflectate de cele două oglinzi  $O_1$  și  $O_2$ .

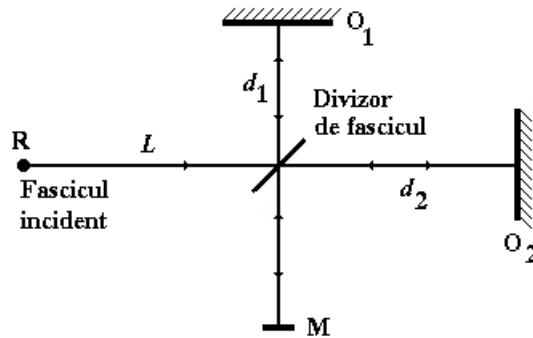


Fig. 3. 14. Interferometrul Michelson.

După reflexia pe oglinzi prima undă trece prin divizorul de fascicul și interferează în punctul M la momentul  $t$  cu cea de-a doua undă care este reflectată de același divizor, câmpul total fiind dat de relația:

$$E(M, t) = \frac{1}{2} E\left(R, t - \frac{l_1}{c}\right) + \frac{1}{2} E\left(R, t - \frac{l_2}{c}\right) \quad (3.335)$$

unde

$$l_1 = L + 2d_1 + l, l_2 = L + 2d_2 + l. \quad (3.336)$$

În relația (3.335) primul termen reprezintă câmpul în punctul M rezultat în urma propagării prin brațul transversal al interferometrului și cu excepția factorului  $1/2$ , acest câmp este același cu cel din punctul R la un moment ulterior  $t - l_1/c$ , unde  $l_1/c$  reprezintă timpul necesar luminii să se propage din punctul R la M prin



brațul transversal (fig. 3. 14). Interpretarea este analoagă în cazul termenului al doilea, în acest caz propagarea având loc prin brațul longitudinal al interferometrului. Pe baza celor prezentate mai sus intensitatea luminii măsurată în punctul M este dată de relația:

$$\begin{aligned} \langle I(M,t) \rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2} \langle |E(M,t)|^2 \rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left| E \left( R, t - \frac{l_1}{c} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left| E \left( R, t - \frac{l_2}{c} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ E^* \left( R, t - \frac{l_1}{c} \right) E \left( R, t - \frac{l_2}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.337)$$

În cazul câmpurilor staționare fiecare termen din relația (3.337) este independent de timp, iar funcția de coerență mutuală depinde numai de diferența de timp

$$\tau = \left( t - \frac{l_2}{c} \right) - \left( t - \frac{l_1}{c} \right) = \frac{l_1 - l_2}{c} = 2 \frac{d_1 - d_2}{c}. \quad (3.338)$$

Considerând un câmp staționar intensitatea în punctul M devine:

$$\begin{aligned} \langle I(M) \rangle = \frac{1}{4} \left[ \langle I(R) \rangle + \langle I(R) \rangle + c\varepsilon_0 \operatorname{Re} \langle E^*(R, \tau) E(R, \tau) \rangle \right] = \\ = \frac{1}{2} \langle I(R) \rangle [1 + \operatorname{Re} \gamma(R, R, \tau)] \end{aligned} \quad (3.339)$$

unde

$$\gamma(R, R, \tau) = \frac{c\varepsilon_0}{2 \langle I(R) \rangle} \langle E^*(R, \tau) E(R, \tau) \rangle \quad (3.340)$$

reprezintă gradul complex de coerență. Ținând seama că în cazul luminii monocromatice

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \exp(-i\omega\tau) \cdot |\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| \quad (3.341)$$

intensitatea luminii în punctul M se scrie cu ajutorul relației (3.338) sub forma:

$$\langle I(M) \rangle = \frac{1}{4} \langle I(R) \rangle (1 + \cos \omega\tau) = \langle I(R) \rangle \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2) \right]. \quad (3.342)$$

În punctul M se pot obține *maxime de interferență*, dacă:

$$|d_1 - d_2| = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.343)$$

și respectiv *minime de interferență*, dacă:

$$|d_1 - d_2| = \frac{(2n+1)\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.344)$$

Întrucât distanța dintre cele două brațe ale interferometrului poate fi variată în punctul M se pot obține alternativ spoturi luminoase și întunecoase. În cazul luminii cvasimonocromatice pentru care gradul complex de coerență este definit de relația (3.341) intensitatea luminii în punctul M, (3.340) poate fi scrisă sub forma:

$$\langle I(M) \rangle = \frac{1}{2} \langle I(R) \rangle \left\{ 1 + |\gamma(R, R, \tau)| \cos \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2) \right\}, \quad (3.345)$$

iar vizibilitatea franjelor devine

$$V = \frac{\langle I(M) \rangle_{\max} - \langle I(M) \rangle_{\min}}{\langle I(M) \rangle_{\max} + \langle I(M) \rangle_{\min}} = |\gamma(R, R, \tau)|. \quad (3.346)$$

Din punct de vedere experimental s-a demonstrat că vizibilitatea franjelor scade cu creșterea diferenței de timp  $\tau$ , (relația (3.338)), scăzând și mai mult în cazul luminii cvasimonocromatice cu lărgimi de bandă mari. Deci, cu cât radiația este mai monocromatică, cu atât coerența temporală este mai mare. Pentru a explica cele prezentate mai sus se consideră că lumina incidentă pe interferometrul Michelson are lărgimea de bandă  $\delta\lambda$ , iar intensitatea luminii este constantă pentru

$\lambda \in \left[ \lambda - \frac{\delta\lambda}{2}, \lambda + \frac{\delta\lambda}{2} \right]$ . În acest caz figura de interferență dispare, dacă

$|d_1 - d_2|$  este destul de mare, astfel încât pentru lumina având lungimea de undă  $\lambda + \frac{\delta\lambda}{2}$  se vor obține maxime, iar pentru cea cu lungimea de undă  $\lambda - \frac{\delta\lambda}{2}$  se vor

obține minime (sau invers). Condițiile (3.343), (3.344) devin:

$$|d_1 - d_2| = n \left( \lambda + \frac{\delta\lambda}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.347)$$

și respectiv

$$|d_1 - d_2| = \frac{(2n+1)\lambda}{2} \left( \lambda - \frac{\delta\lambda}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.348)$$

În urma scăderii relațiilor (3.347)-(3.348) și ținând seama că  $\delta\lambda \ll \lambda$ , se obține în final:

$$|d_1 - d_2| = c\tau = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda}. \quad (3.349)$$

Întrucât pentru variații mici  $\left| \frac{\delta\lambda}{\delta\nu} \right| = \frac{c}{\nu^2} = \frac{\lambda}{\nu}$  relația (3.349) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{c} = \tau = \frac{1}{2\delta\nu}. \quad (3.350)$$

Relația (3.350) leagă diferența de drum dintre brațele interferometrului,  $|d_1 - d_2|$  sau intervalul de timp,  $\tau$  pentru care figura de interferență devine o pată continuă. Pentru separări în domeniul temporal mai mari decât  $\tau$  vizibilitatea franjelor devine foarte mică sau se anulează. Din relația (3.350) se observă că  $\tau$  scade cu creșterea lărgimii benzii. Este convenabil să se definească

$$\tau_{\text{coerență}} = \frac{1}{2\pi\delta\nu} = \frac{1}{2\pi\nu} \left( \frac{\nu}{\delta\nu} \right). \quad (3.351)$$

ca timp de coerență al radiației monocromatice, distanța  $c \cdot \tau_{\text{coerență}} = l_{\text{coerență}}$  reprezentând lungimea de coerență.

### 3.5.2. Monocromaticitatea

Gradul de monocromaticitate fiind definit ca  $\nu/\Delta\nu$  pe baza relației (3.351) se poate stabili o legătură între coerență și monocromaticitate. Astfel, o sursă de lumină clasică, (lampă, bec etc.) de bună calitate are lărgimea de bandă  $\delta\nu = 10^8$  Hz, timpul de coerență  $\tau_{\text{coerență}} \approx 1,6$  ns (relația (3.351)) și lungimea

de coerență  $l_{\text{coerență}} \approx 0,48$  m. Un laser care funcționează pe un singur mod de

oscilație transversal este caracterizat de o coerență spațială perfectă, iar coerența temporală este determinată de lărgimea de bandă a radiației emise. Utilizând diferite tehnici de stabilizare s-au obținut în cazul laserelor lărgimi de bandă

$\delta\nu \approx 3 \cdot 10^2$  Hz și lungimi de coerență  $l_{\text{coerență}} \approx 10^9$  m. Din punct de vedere

al coerenței temporale în tabelul 3. 1 sunt prezentate câteva caracteristici (lungimea de undă, lărgimea benzii și lungimea de coerență) corespunzătoare radiațiilor unor surse clasice și respectiv laser.

**Tabel 3. 1.**

Nr. crt.	Sursa de radiații	$\lambda(\text{nm})$	$\Delta\lambda(\text{nm})$	$l_{\text{coerență}}$
1.	Lampă cu filament de tungsten	500	400	0,6 $\mu\text{m}$
2.	Lampă spectrală cu vapori de sodiu	500	0,1	2,5 mm
3.	Laser cu argon ionizat	488	$6 \cdot 10^{-3}$	4 cm
4.	Laser cu He-Ne	632,8	$4 \cdot 10^{-5}$	10 m

Există o legătură și între gradul de coerență temporală și gradul de polarizare al unei unde electromagnetice. Astfel, ținând seama că gradul de polarizare al unei unde este dat de relația:

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{polarizată}}}{I_{\text{totală}}}, \quad (3.352)$$

rezultă

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2} \langle I \rangle (1 + P) \text{ și } I_{\text{min}} = \frac{1}{2} \langle I \rangle (1 - P). \quad (3.353)$$

În cazul luminii polarizate rectiliniu,  $P = 1$ , în cazul celei polarizate circular și nepolarizate  $P = 0$ , iar în cazul celei polarizate eliptic  $P \in (0, 1)$ . Din relațiile (3.346) și (3.350) pentru intensități egale ale celor două unde, se obține:

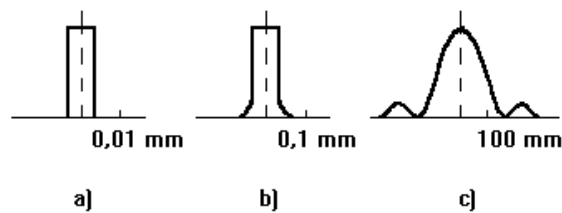
$$P = |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (3.354)$$

Din relațiile (3.352) și (3.354) se observă că cu cât unda este mai monocromatică caracteristicile de polarizare (gradul de polarizare) sunt mai ridicate. Funcția de coerență mutuală caracterizează numai *coerența de ordinul întâi*. Alte efecte de interferență pot fi caracterizate de *funcții de coerență de ordin superior: doi, trei, ..., n*, cu ajutorul cărora se pot face deosebiri între sursele ordinare și lasei. În general în domeniul aplicațiilor laserelor prin coerență se înțelege numai coerența de ordinul întâi, un fascicul laser fiind numit coerent dacă acesta produce franje de interferență într-un interferometru Michelson cu o diferență oarecare de drum între brațe și respectiv într-un interferometru de tip Young (sau echivalent) cu o diferență oarecare între orificii.

### 3.6. Difracția luminii

În anumite condiții undele luminoase pot ocoli obstacolele iar umbrele nu mai au conturul determinat de legile opticii geometrice. Acest fenomen descoperit în anul 1665 de către F. M. Grimaldi se numește *difracție* și apare ca o consecință a principiului Huygens-Fresnel. Pentru ca difracția să fie pusă în evidență trebuie ca dimensiunile obstacolelor să fie comparabile, ca ordin de mărime, cu lungimea de undă a radiațiilor folosite.

Astfel, dacă se iluminează cu un fascicul paralel sau eventual izogen o fantă circulară cu diametrul de  $1 \div 2$  mm pe un ecran așezat în imediata apropiere, la distanța de  $5 \div 10$  cm, se observă un cerc luminos cu marginile net delimitate (fig. 3. 15 a)). În interiorul acestuia iluminarea este uniformă iar în zonele de umbră există întuneric. Lumina se propagă în aceste condiții în linie dreaptă.



**Fig. 4. 15 a), b), c).** Forma petei luminoase pe un ecran situat față de sursa de lumină la distanța de: a) 5 - 10 cm, b) 2 - 5 m (difracția Fresnel), c) ~ 30 m (difracția Fraunhofer).

Depărtând ecranul la  $2 \div 5$  m se observă o modificare a distribuției iluminării în interiorul cercului, pe margini apărând *franje de difracție*, imaginea păstrează încă asemănarea cu fanta (fig. 3. 15 b)). În acest caz se vorbește de *difracția Fresnel*.

Când ecranul se află la o distanță și mai mare, de la  $\sim 30$  m în sus (până la infinit) distribuția iluminării nu mai este în raport direct cu fanta și este de forma celei prezentate în fig. 3. 15 c). În acest caz se vorbește de *difracția Fraunhofer*.

De fapt există o trecere continuă de la un tip de difracție la celălalt; riguros vorbind difracția Fraunhofer se observă doar la infinit, însă trecerea de la o categorie la alta are loc pentru o distanță dintre sursă și ecran de ordinul a 30 m, cum s-a amintit mai sus.

### 3.6.1. Difracția Fresnel

Pentru a calcula intensitatea luminoasă într-un punct în cazul difracției Fresnel se consideră o sursă punctiformă de lumină (S) care emite unde sferice, mediul în care are loc fenomenul de difracție fiind izotrop (fig. 4. 16). Pe baza principiului lui Huygens suprafața de undă ( $\Omega$ ) este formată dintr-un număr foarte mare de surse secundare  $S', S'', \dots$ . În continuare se evaluează contribuția vibrației în punctul B produsă de elementul de suprafață  $d\sigma$  situat în  $S'$ . Se presupune că  $S'$  (centrul elementului de suprafață) se află în jurul polului undei, A, față de punctul B, astfel că unghiul  $\alpha$  care determină înclinarea dreptei  $SS'$  față de  $SB$  poate fi considerat ca fiind mic (fig. 3. 16). Pe baza aproximațiilor de calcul prezentate mai sus se poate scrie:

$$S'B^2 = SB^2 + SS'^2 - 2SB \cdot SS' \cdot \cos \alpha \quad (3.355)$$

sau explicit

$$r^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b) \cos \alpha \quad (3.356)$$

și

$$r = \left[ b^2 + 2a(a + b)(1 - \cos \alpha) \right]^{1/2}. \quad (3.357)$$

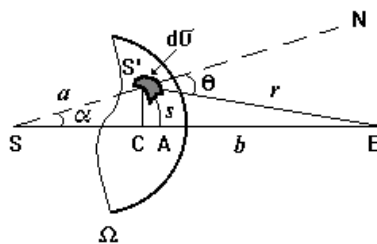


Fig. 3. 16. Configurația geometrică pentru descrierea difracției Fresnel.

Ținând seama că pentru unghiuri mici  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = s/2a$ , în urma dezvoltării în serie a radicalului din relația (3.357) și considerării numai a primului termen, rezultă:

$$r = b + \frac{1}{2} \frac{a+b}{ab} s^2. \quad (3.358)$$

Din relația (3.358) se observă că diferenței de drum dintre razele S'B și AB,  $\delta = \frac{1}{2} \frac{a+b}{ab} s^2$ , îi corespunde o diferență de fază

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \pi \frac{a+b}{ab\lambda} s^2. \quad (3.359)$$

Elementul de suprafață  $d\sigma$  din jurul punctului S' trimite în B o undă de amplitudine proporțională cu  $d\sigma$ , de forma:

$$Y = \frac{A}{ar\lambda} d\sigma \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{S'B}{\lambda} \right) \quad (3.360)$$

unde  $A$  este amplitudinea undei în S.

Ținând seama că:

$$S'B \approx b + \delta \text{ și } r \approx b \quad (3.361)$$

relația (3.360) devine:

$$Y = \frac{A}{ab\lambda} d\sigma \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b+\delta}{\lambda} \right). \quad (3.362)$$

Făcând substituția  $t' = \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda}$  în relația (3.362) și dezvoltând funcția sin se obține:

$$Y = \frac{A}{ab\lambda} d\sigma \left( \sin 2\pi \frac{t'}{T} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{t'}{T} \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \quad (3.363)$$

adică o sumă de două mișcări vibratorii în cvadratură, ale căror amplitudini sunt:

$$A_1 = \frac{A}{ab\lambda} d\sigma \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \text{ și } A_2 = \frac{A}{ab\lambda} d\sigma \cdot \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}. \quad (3.364)$$

Intensitatea luminii (vibrației) în punctul B este:

$$I = A_1^2 + A_2^2. \quad (3.365)$$

Dacă se ia în considerare o porțiune mai mare din suprafața de undă amplitudinile vibrațiilor în punctul B se calculează cu ajutorul integralelor (Fresnel):

$$A_1 = \frac{A}{ab\lambda} \iint_{\Omega'} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} d\sigma = \frac{A}{ab\lambda} \iint_{\Omega'} \cos 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 d\sigma \quad (3.366)$$

$$A_2 = \frac{A}{ab\lambda} \iint_{\Omega'} \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} d\sigma = \frac{A}{ab\lambda} \iint_{\Omega'} \sin 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 d\sigma. \quad (3.367)$$

Notând

$$P = \iint_{\Omega'} \cos 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 d\sigma \quad \text{și} \quad Q = \iint_{\Omega'} \sin 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 d\sigma \quad (3.368)$$

amplitudinile din relațiile (3.367), (3.366) devin

$$A_1 = \frac{A}{ab\lambda} P \quad \text{și} \quad A_2 = \frac{A}{ab\lambda} Q \quad (3.369)$$

iar intensitatea în punctul B se calculează cu formula:

$$I = \frac{P^2 + Q^2}{a^2 b^2 \lambda^2} A^2. \quad (3.370)$$

**Apertură de forma unei fante circulare.** În acest caz pentru a calcula intensitatea în punctul B se divizează aria deschiderii circulare care delimitează partea liberă a undei,  $\Omega'$ , în coroane circulare de rază  $s$  și lățime  $ds$  astfel că elementul de suprafață  $d\sigma$  se scrie:

$$d\sigma = \pi d(s^2). \quad (3.371)$$

Introducând notația

$$v^2 = 2 \frac{a+b}{ab\lambda} s^2 \quad (3.372)$$

elementul de suprafață devine

$$d\sigma = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot \lambda}{2(a+b)} d(v^2) \quad (3.373)$$

iar integralele  $P$  și  $Q$  se scriu sub forma:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot \lambda}{a+b} \cdot \int_0^v \cos \pi \frac{v^2}{2} d\left(\pi \frac{v^2}{2}\right) = \frac{a \cdot b \cdot \lambda}{a+b} \cdot \sin\left(\pi \frac{v^2}{2}\right) \quad (3.374)$$

$$Q = \frac{a \cdot b \cdot \lambda}{a+b} \cdot \int_0^v \sin \pi \frac{v^2}{2} d\left(\pi \frac{v^2}{2}\right) = \frac{a \cdot b \cdot \lambda}{a+b} \cdot \left[1 - \cos\left(\pi \frac{v^2}{2}\right)\right]. \quad (3.375)$$

În cazul unei deschiderii circulare de rază  $R$  valoarea maximă a lui  $v$  este

$$v_m = \left(2 \frac{a+b}{ab\lambda}\right)^{1/2} R, \quad (3.376)$$

integralele  $P$  și  $Q$  se calculează între 0 și această valoare maximă, iar intensitatea în punctul B are valoarea:

$$I = \frac{P^2 + Q^2}{a^2 b^2 \lambda^2} A^2 = \frac{4 \cdot A^2}{(a+b)^2} \sin^2 \pi \frac{v^2}{4}. \quad (3.377)$$

Din relația (3.377) se observă că intensitatea în punctul B depinde de mărimile  $a$ ,  $b$  și  $R$ . Considerând mărimile  $a$  și  $R$  fixe și variind pe  $b$  se obțin o serie de maxime și minime dacă

$$\pi \frac{v^2}{4} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \text{ maxime} \quad (3.378)$$

$$\pi \frac{v^2}{4} = k\pi; \text{ minime} \quad (3.379)$$

sau

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (2k + 1) \frac{\lambda}{R^2}; \text{ maxime} \quad (3.380)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2k \frac{\lambda}{R^2}; \text{ minime.} \quad (3.381)$$

De exemplu, în cazul când  $R = 2 \text{ mm}$ ,  $a = 2 \text{ m}$  și  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  se obțin minime pentru  $b = \frac{2000}{0,5k - 1}$ ,  $k$  fiind un număr întreg. În tabelul 3. 2 sunt prezentate valorile lui  $b$  corespunzătoare minimelor de difracție pentru câteva valori ale lui  $k$ .

**Tabelul 3. 2.**

$k =$	2	3	4	5	6
$b =$	$\infty$	4000 mm	2000 mm	1333 mm	1000 mm

Considerând mărimile  $a$  și  $b$  fixe și variind diametrul deschiderii  $2R$  se obțin maxime dacă  $\sin^2(\pi v^2 / 4) = 1$  iar valoarea intensității devine:

$$I = \frac{4 \cdot A^2}{(a + b)^2}. \quad (3.382)$$

Variind deci pe  $R$  se obțin pentru intensitate o serie de minime nule și maxime având valoarea  $(2 \cdot A)^2 / (a + b)^2$ . Evaluarea intensității într-un punct situat în afara axei de simetrie este cu mult mai complicată și implică utilizarea funcțiilor Bessel (Lommel).

### 3.6.2. Difracția Fraunhofer (în lumină paralelă)

Pentru a descrie difracția Fraunhofer se consideră un fascicul paralel care este delimitat de o diafragmă  $\Omega$ . Divizând suprafața deschiderii libere  $\Omega$  în elemente de suprafață  $d\sigma = dx \cdot dy$  vibrația rezultană în direcția  $\alpha$  (față de



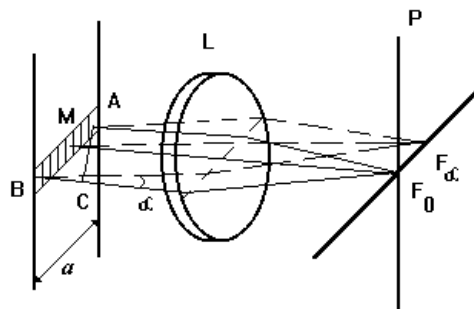
normala la diafragmă) într-un punct situat la o distanță foarte mare (infinită) față de diafragmă este dată de relația:

$$Y = \iint \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda} \right) dx dy . \quad (3.383)$$

unde diferența de drum  $\delta$  este funcție de variabilele  $x$  și  $y$  care definesc poziția elementului de suprafață în diafragma  $\Omega$ .

**Apertură de forma unei fante dreptunghiulare de lungime infinită.** În cazul considerării unei aperturi de forma unei fante dreptunghiulare de lungime infinită prezentată în fig. 3. 17 difracția poate fi considerată ca unidimensională, având loc doar după o direcție perpendiculară pe muchea fantei. Ca și în cazul difracției Fresnel partea eficace din suprafața de undă  $\Omega$  se limitează la o fâșie îngustă AB. În cazul unui izvor liniform și paralel cu fanta imaginea acestuia dată de lentila (L) este o linie luminoasă (P) care trece prin  $F_0$  fiind paralelă cu fanta și însoțită de franje de difracție. Funcție de unghiul  $\alpha$ , în diferite puncte ale planului focal intensitatea luminii are valori diferite. Pentru  $\alpha = 0$  razele care provin de la diferite puncte ale secțiunii AB se propagă fără a prezenta diferențe de drum între ele și determină un maxim de intensitate în  $F_0$ .

Pentru a calcula amplitudinea vibrației în planul focal al lentilei (L) se divizează fâșia activă, eficace AB de lățime  $a$  în  $m$  zone elementare egale suficient de mici astfel ca în interiorul unei zone toate razele emise să fie în fază. Atribuind fiecărei zone elementare un vector elementar  $a_i$  acești vectori sunt defazați între ei cu unghiul  $\frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  ( $\delta = BC = a \sin \alpha = \lambda$  este diferența de drum dintre razele extreme presupusă egală cu  $\lambda$ ) iar amplitudinea rezultantă  $A$  unește capetele vectorilor extremi (fig. 4. 18). Pentru razele care sunt emise în direcția  $\alpha$  diferența de fază este  $\varphi = \frac{2\pi a \sin \alpha}{\lambda}$ .



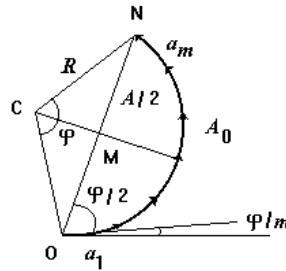
**Fig. 3.17.** Apertură de forma unei fante dreptunghiulare de lungime infinită pentru descrierea difracției Fraunhofer.

Din fig. 3. 18 se observă că  $A_0 = R \cdot \varphi$  și  $A/2 = R \cdot \sin \varphi/2$  de unde

$$A = A_0 \sin\left[\frac{(\varphi/2)}{(\varphi/2)}\right] \quad (3.384)$$

sau explicit

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}. \quad (3.385)$$



**Fig. 3. 18.** Reprezentarea vectorială a zonelor active elementare în cazul unei fante dreptunghiulare de lungime infinită.

Intensitatea fiind proporțională cu  $A^2$  este dată de relația:

$$I = k \cdot A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)^2}. \quad (3.386)$$

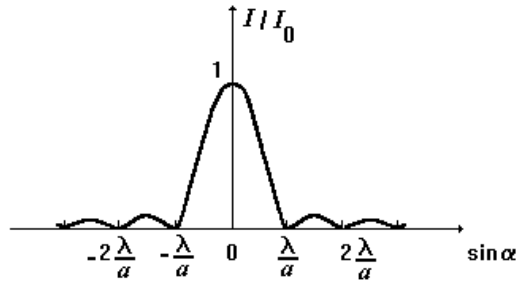
Minimele de intensitate sunt echidistante și se obțin pentru  $\varphi = \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \dots$ . Pentru  $\varphi = 0$  se obține de fapt un maxim (maximum maximorum). Maximele de intensitate se obțin punând condiția  $dA/d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$  și sunt determinate de rădăcinile ecuației:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \quad (3.387)$$

care sunt tabelate. În fig. 3. 19 este prezentată distribuția normalizată a intensității în cazul unei aperturi de forma unei fante dreptunghiulare de lungime infinită în planul focal al lentilei în funcție de  $\sin \alpha$ .

În cazul a  $N$  fante (*rețea de difracție*), în afară de fenomenul descris mai înainte are loc în planul focal al lentilei interferența tuturor undelor difractate sub unghiul  $\alpha$  de către cele  $N$  fante. Considerând că dimensiunea fantei este  $a$  iar  $d$  constanta rețelei intensitatea în planul focal (conjugat direcției  $\alpha$ ) al lentilei este dată de relația:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right) \sin^2\left(\frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}\right)^2}. \quad (3.388)$$



**Fig. 3. 19.** Distribuția normalată a intensității în planul focal al lentilei din fig. 4. 17 în funcție de  $\sin \alpha$ .

Din relația (3.388) se observă că unda difractată de o rețea plană poate fi considerată ca o undă de intensitate

$$I' = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}\right)^2} \quad (3.389)$$

modulată de factorul

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)^2}. \quad (3.390)$$

În acest caz distribuția intensității din fig. 3. 19) este modulată de factorul modulator dat de relația (3.390).

### 3.7. Optica mediilor izotrope

#### 3.7.1. Reflexia și refracția în cazul mediilor dielectrice transparente

Se consideră o undă electromagnetică plană monocromatică, liniar polarizată care este incidentă sub unghiul  $\varphi$  față de normala pe suprafața de separație dintredouă medii dielectrice transparente caracterizate de:

$\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1 = 0, \eta_1 = \frac{v}{v_1}$  (mediul 1) și  $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0, \eta_2 = \frac{v}{v_2}$  (mediul 2)  
(fig. 3. 20.)

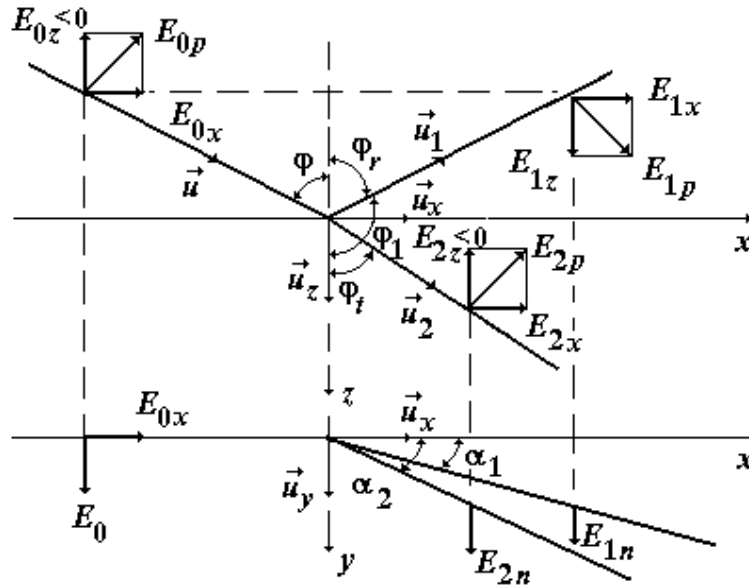


Fig. 3. 20. Undele electromagnetice incidentă, reflectată și refractată.

La suprafața de separație dintre cele două medii o parte din radiație se reflectă în mediul 1 din care a venit, iar o alta este refractată, fiind transmisă în mediul 2. Undele electromagnetice incidentă, reflectată și respectiv refractată sunt descrise de ecuațiile:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ i \omega \left( t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{v_1} \right) \right] \quad (3.391)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 \exp \left\{ i \left[ \omega_1 \left( t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{v_1} \right) + \gamma_1 \right] \right\} \quad (3.392)$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 \exp \left\{ i \left[ \omega_2 \left( t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{v_2} \right) + \gamma_2 \right] \right\}. \quad (3.393)$$

În cele ce urmează se determină caracteristicile undelor reflectată și respectiv refractată, unghiul de reflexie  $\varphi_r$ , unghiul de refracție  $\varphi_t$ , unghiul  $\alpha_1$  făcut de planul format de normală și direcția unei reflectate cu planul de incidență (format de normala la suprafața de separație a celor două medii și direcția de propagare a unei incidente), și unghiul  $\alpha_2$  făcut de planul format de normală și direcția unei refractate cu planul de incidență.

Intensitățile câmpurilor magnetice corespunzătoare intensităților câmpurilor electrice incident, reflectat și respectiv refractat sunt:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{u} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3.394)$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}, t) = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{u}_1 \times \vec{E}_r(\vec{r}, t) \quad (3.395)$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \vec{u}_2 \times \vec{E}_t(\vec{r}, t), \quad (3.396)$$

unde

$$\vec{u} = \vec{u}_x \sin \varphi + \vec{u}_z \cos \varphi \quad (3.397)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_x \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \vec{u}_y \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 + \vec{u}_z \cos \varphi_1 \quad (3.398)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_x \cos \alpha_2 \sin \varphi_t + \vec{u}_y \sin \alpha_2 \sin \varphi_t + \vec{u}_z \cos \varphi_t \quad (3.399)$$

reprezintă versorii direcțiilor de propagare (fig. 3. 20)

Vectorii  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{u})$ ,  $(\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{u}_1)$  și  $(\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{u}_2)$  formează triedre rectangulare drepte.

La suprafața de separație dintre cei doi dielectricsi, în

$$z = 0 \text{ sau } \vec{r} = \vec{u}_x x + \vec{u}_y y, \quad (3.400)$$

condițiile la limită pentru câmpurile electric și magnetic se scriu sub forma:

$$E_{0x} + E_{1x} = E_{2x} \quad (3.401)$$

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y} \quad (3.402)$$

și respectiv

$$H_{0x} + H_{1x} = H_{2x} \quad (3.403)$$

$$H_{0y} + H_{1y} = H_{2y}. \quad (3.404)$$

Înlocuind relațiile (3.391)-(3.392) în (3.393), rezultă:

$$\begin{aligned} & E_{0x} \exp \left[ i \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi}{v_1} \right) \right] + E_{1x} \exp \left\{ i \left[ \omega_1 \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 \sin \varphi_1}{v_1} \right) + \gamma_1 \right] \right\} = \\ & = E_{2x} \exp \left\{ i \left[ \omega_2 \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 \sin \varphi_t}{v_2} \right) + \gamma_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.405)$$

$$\begin{aligned} & E_{0y} \exp \left[ i \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi}{v_1} \right) \right] + E_{1y} \exp \left\{ i \left[ \omega_1 \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 \sin \varphi_1}{v_1} \right) + \gamma_1 \right] \right\} = \\ & = E_{2y} \exp \left\{ i \left[ \omega_2 \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 \sin \varphi_t}{v_2} \right) + \gamma_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.406)$$

În cazul intensității câmpului magnetic se obțin relații asemănătoare.

Considerând că  $E_{0x}, E_{1x}, E_{2x}$ , respectiv  $E_{0y}, E_{1y}, E_{2y}$  au același semn și ținând seama de relațiile (3.401)-(3.402), egalitățile (3.405)-(3.406) sunt îndeplinite dacă:

$$\begin{aligned} \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi}{v_1} \right) &= \omega_1 \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1}{v_1} \sin \varphi_1 \right) + \gamma_1 = \\ &= \omega_2 \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2}{v_2} \sin \varphi_t \right) + \gamma_2, \end{aligned} \quad (3.407)$$

de unde rezultă că

$$\omega = \omega_1 = \omega_2, \quad (3.408)$$

și

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \text{ sau } \pi. \quad (3.409)$$

Din relația (3.408) se observă că în urma reflexiei și refracției la suprafața de separație a doi dielectrici transparenți frecvența unei incidente nu se schimbă.

În relația (3.409) valoarea  $\pi$  corespunde cazului când anumite amplitudini sunt negative, când  $E_{0x} > 0$ .

Deci, condiția (3.409) conduce la

$$\sin \varphi = \cos \alpha_1 \sin \varphi_1 = \frac{v_1}{v_2} \cos \alpha_2 \sin \varphi_t \quad (3.410)$$

și

$$0 = \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 = \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha_2 \sin \varphi_t. \quad (3.411)$$

În cazul general când  $\varphi \neq 0$  și  $\varphi \neq \pi$ , deci,  $\sin \varphi_1 \neq 0$  și  $\sin \varphi_t \neq 0$ , pentru ca egalitățile (3.)-(3.) să fie adevărate trebuie ca

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0 \text{ sau } \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (3.412)$$

Din relația (3.412) se poate formula *prima lege Descartes* sub forma: *undele incidentă, reflectată și refractată se află în același plan.*

Tot din relația (3.412), rezultă

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1, \quad (3.413)$$

iar relația (3.411) devine

$$\sin \varphi = \sin \varphi_1 = \frac{v_1}{v_2} \sin \varphi_t. \quad (3.414)$$

Întrucât unda reflectată trebuie să se propage în mediul 1, din punct de vedere fizic trebuie ca  $\varphi_1 > \frac{\pi}{2}$ , deci

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_r \text{ sau } \varphi_r = \varphi. \quad (3.415)$$

Ținând seama de relația (3.415) se poate formula *a doua lege Descartes* sub forma: *unghiul făcut de direcția unei reflectate cu normala pe planul de incidență este egal cu unghiul făcut de direcția unei incidente cu normala pe planul de incidență.*

Din relațiile (3.414)-(3.415), se obține:

$$\sin \varphi = \frac{v_1}{v_2} \sin \varphi_t. \quad (3.416)$$

care constituie *a treia lege Descartes*.

Pentru a determina amplitudinile undelor reflectată și transmisă, se consideră că fiecare intensitate a câmpului electric și magnetic care caracterizează unda, are o componentă în planul de incidență  $(E_{0p}, E_{1p}, E_{2p})$  și respectiv o altă componentă normală pe planul de incidență  $(E_{0n}, E_{1n}, E_{2n})$ .

Pe baza condițiilor la limită (3.401)-(3.415), rezultă:

$$E_{0p} \cos \varphi + E_{1p} \cos \varphi = E_{2p} \cos \varphi_t \quad (3.417)$$

$$E_{0n} + E_{1n} = E_{2n} \quad (3.418)$$

și respectiv

$$E_{0n} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi - E_{1n} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi = E_{2n} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t \quad (3.419)$$

$$E_{0p} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - E_{1p} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = E_{2p} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}. \quad (3.420)$$

Ținând seama de proprietățile dielectricilor transparenți

$$\mu_{r1} \cong \mu_r \cong 1, \sqrt{\varepsilon_2} = n_2, \sqrt{\varepsilon_1} = n_1 \quad (3.421)$$

precum și de relația (3.421), rezultă:

$$\frac{E_{1p}}{E_{0p}} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_t)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_t)} \quad (3.422)$$

$$\frac{E_{2p}}{E_{0p}} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_t}{\sin(\varphi + \varphi_t) \cos(\varphi - \varphi_t)} \quad (3.423)$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{0n}} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_t)}{\sin(\varphi + \varphi_t)} \quad (3.424)$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{0n}} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_t}{\sin(\varphi + \varphi_t)}. \quad (3.425)$$

Pe baza relațiilor (3.422)-(3.425), în cazul când intensitatea câmpului electric al unei incidente are numai componenta situată în planul de incidență se pot defini *coeficienții de reflexie*, respectiv de *transmisie* (care sunt în general complecși) pentru oscilația paralelă cu planul de incidență, sub forma (*formulele Fresnel*):

$$r_{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_t)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_t)} \quad (3.426)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_t}{\sin(\varphi + \varphi_t) \cos(\varphi - \varphi_t)}. \quad (3.427)$$

În cazul când incidența este aproape normală ( $\varphi \rightarrow 0$ ) din relațiile (3.426) și (3.427), rezultă:

$$r_{\parallel} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (3.428)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (3.429)$$

Asemănător, în cazul când intensitatea câmpului electric al unde incidente are numai componenta perpendiculară pe planul de incidență, se obțin relațiile:

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_t)}{\sin(\varphi + \varphi_t)} \quad (3.430)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_t}{\sin(\varphi + \varphi_t)}, \quad (3.431)$$

care la incidență aproape normală, devin

$$r_{\perp} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (3.432)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (3.433)$$

Ținând seama de relațiile de definiție ale fluxurilor incident

$$d\Phi_i = n_1 E^2 \cos \varphi dS, \quad (3.434)$$

reflectat

$$d\Phi_r = n_1 E^2 r^2 \cos \varphi dS \quad (3.435)$$

și transmis

$$d\Phi_t = n_2 E^2 t^2 \cos \varphi_t dS, \quad (3.436)$$

se pot defini *factorii de reflexie*,  $R$  și respectiv respectiv *transmisie*,  $T$  ai suprafeței, sub forma:

$$R = \frac{d\Phi_r}{d\Phi_i} = r^2, \quad (3.437)$$

$$T = \frac{d\Phi_t}{d\Phi_i} = \frac{n_2 \cos \varphi_t}{n_1 \cos \varphi} t^2. \quad (3.438)$$

În relațiile (3.434)-(3.436)  $dS$  este elementul de arie al suprafeței de separație dintre cele două medii (fig. 3. 21).



În cazul mediilor transparente fluxul incident este egal cu suma fluxurilor reflectat și transmis. Pe baza legii conservării energiei se poate scrie că:

$$R + T = 1 \quad (3.439)$$

sau ținând seama de relațiile (3.437)-(3.438.)

$$r^2 + \frac{n_2 \cos \varphi_t}{n_1 \cos \varphi} t^2 = 1. \quad (3.440)$$

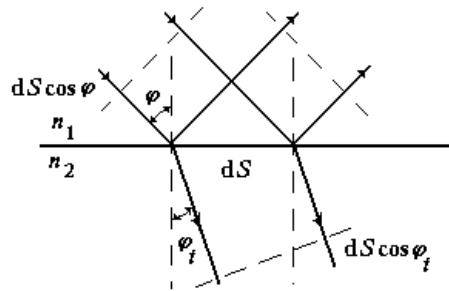


Fig. 3. 21. Reprezentarea schematică a fenomenelor de reflexie și refracție.

*Reflexia externă* se produce când  $n_2 > n_1$  (de exemplu în cazul reflexiei pe suprafața dintre aer-sticlă). În cazul când intensitatea câmpului electric al unei incidente nu are decât componenta paralelă cu planul de incidență din relația

(3.438) se observă că pentru  $\varphi + \varphi_t = \frac{\pi}{2}$ , se obține  $r_{II} = 0$  și se poate scrie:

$$n_1 \sin \varphi_B = n_2 \sin \varphi_t = n_2 \cos \varphi_B \quad (3.441)$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi_B = n_2 / n_1 = n. \quad (3.442)$$

unde  $n$  este indicele de refracție relativ al mediului 2 în raport cu mediul 1, iar  $\varphi = \varphi_B$  se numește *unghi de incidență Brewster*. Incidența brewsteriană pentru care oscilația paralelă cu planul de incidență nu mai este reflectată se utilizează la fabricarea unor dispozitive în care radiația provenită dintr-un mediu dielectric să fie transmisă total într-un alt mediu dielectric (de exemplu, fabricarea tuburilor laser). *Reflexia internă* se produce când  $n_2 < n_1$ . În acest caz există un *unghi limită*  $\varphi_l$ , astfel că

$$\sin \varphi_l = n_2 / n_1, \quad (3.443)$$

corespunzător căruia pentru valorile  $\varphi > \varphi_l$ , unghiul  $\varphi_t$  nu există. Notând  $n_2 / n_1 = n < 1$ , rezultă:

$$\sin \varphi_l = \frac{\sin \varphi}{n} \text{ și } \cos \varphi_l = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1} = \pm im. \quad (3.444)$$

În cazul componentei câmpului electric perpendicular pe planul de incidență, se obține:

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_t)}{\sin(\varphi + \varphi_t)} = \frac{\sin \varphi_t \cos \varphi + im \sin \varphi}{\sin \varphi_t \cos \varphi - im \sin \varphi}, \quad (3.445)$$

iar

$$R = rr^* = 1. \quad (3.446)$$

Deci, pentru  $\varphi > \varphi_t$  se produce *reflexia totală*.

În cazul componentei câmpului electric perpendicular pe planul de incidență, rezultă

$$r_{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_t)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_t)} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi + im \sin \varphi_t}{\sin \varphi \cos \varphi - im \sin \varphi_t}, \quad (3.447)$$

adică,  $R = 1$ .

### 3.7.2. Polarizarea undelor electromagnetice prin reflexie și refracție

Din relațiile (3.421)-(3.425), rezultă:

$$\frac{E_{1n}}{E_{1p}} = \frac{E_{0n}}{E_{0p}} \frac{\cos \varphi \cos \varphi_t + \sin \varphi \sin \varphi_t}{\cos \varphi \cos \varphi_t - \sin \varphi \sin \varphi_t}, \quad (3.448)$$

astfel că dacă într-un aranjament experimental există reflexii succesive, se obține

$$\left| \frac{E_{1n}}{E_{1p}} \right| \gg \frac{E_{0n}}{E_{0p}} \quad (3.449)$$

și de asemenea are loc o rotație a planului de polarizare.

Din relațiile (3.421)-(3.425), rezultă:

$$\frac{E_{2n}}{E_{2p}} = \frac{E_{0n}}{E_{0p}} \cos(\varphi_t - \varphi) < \frac{E_{0n}}{E_{0p}}, \quad (3.450)$$

În acest caz într-un aranjament experimental potrivit se pot obține refracții succesive, realizându-se condiția

$$\frac{E_{2n}}{E_{2p}} \ll \frac{E_{0n}}{E_{0p}}, \quad (3.451)$$

componenta câmpului electric din planul de incidență având o valoare importantă. De asemenea, și în acest caz rezultă o rotire a planului de polarizare.

### 3.7.3. Reflexia pe o suprafață metalică

Pentru a caracteriza reflexia pe o suprafață metalică se utilizează formulele Fresnel (3.426)-(3.429).

În cazul incidenței oblice se înlocuiesc  $\sin \varphi_t$  și  $\cos \varphi_t$  prin valorile deduse în cazul indicelui de refracție complex. Formulele rezultate sunt foarte

lungi. Totuși, în cazul când  $n_r^2 + \kappa^2 \gg 1$  formulele sunt mai scurte, iar expresiile factorilor de reflexie devin:

$$R_{\perp} = \frac{(n_r - \cos \varphi)^2 + \kappa^2}{(n_r + \cos \varphi)^2 + \kappa^2} \quad (3.452)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\left(n_r - \frac{1}{\cos \varphi}\right)^2 + \kappa^2}{\left(n_r + \frac{1}{\cos \varphi}\right)^2 + \kappa^2}. \quad (3.453)$$

Pentru un studiu în cazul general trebuie cunoscute dependențele de lungimea de undă a lui  $n_r$  și  $\kappa$ , lucru posibil în cadrul teoriei cuantice cu ajutorul căreia se poate modela procesul de conducție ținând seama de mișcările electronilor cvasiliberi sub influența câmpurilor oscilente și de electronii legați în sistemele atomice, moleculare sau ionice.

În cazul incidenței normale, considerând că cele două medii au indicii de refracție  $n_1 = 1$  (mediul 1) și  $n_2 = n$  (mediul 2), rezultă

$$r_c = \frac{1-n}{1+n} = \frac{1-n_r + i\kappa}{1+n_r - i\kappa}. \quad (3.454)$$

Coeficientul de reflexie (3.) este complex, și deci există o diferență de fază între unda reflectată și unda incidentă.

Factorul de reflexie este dat de relația:

$$R = r_c^* r_c = \frac{(1-n_r)^2 + \kappa^2}{(1+n_r)^2 + \kappa^2}. \quad (3.455)$$

Din relația (3.455) se observă că  $R$  crește cu  $\kappa$ , adică cu creșterea conductivității electrice a metalului  $\sigma$ . În cazul unui metal perfect  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$  și  $R \rightarrow 1$ .

## 3.8. Optica mediilor anizotrope

### 3.8.1. Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope

În medii anizotrope parametrii electrici, care leagă efectele de cauze variază cu direcția vectorului cauză. Astfel, permitivitatea electrică variază cu direcția câmpului iar relația dintre inducția electrică și câmpul electric

$$\vec{D} = \overset{=}{\varepsilon} \vec{E} \quad (3.456)$$

unde  $\overset{=}{\varepsilon}$  este un tensor.

Considerând că lucrul elementar la o modificare a lui  $\vec{E}$  este o diferențială totală exactă, rezultă:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}. \quad (3.457)$$

Printr-o alegere potrivită a orientării axelor (în medii fără absorbție), se poate obține:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.458)$$

În cazul acestui sistem de axe particular numite *axe principale* sau *axe de simetrie electrice* ale mediului (legat de axele cristalografice ale mediului) relația (3.456) se poate scrie sub forma:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, D_y = \varepsilon_y E_y, D_z = \varepsilon_z E_z. \quad (3.459)$$

Constantele  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  și  $\varepsilon_z$  se numesc constante electrice principale. În general, vectorul inducție electrică  $\vec{D}$  are o direcție diferită de cea a câmpului electric  $\vec{E}$ . În cazul când  $\vec{E}$  este paralel cu una din axele principale,  $\vec{D}$  este paralel cu  $\vec{E}$ .

Din cele prezentate mai sus, rezultă că dacă o sursă emite lumină în toate direcțiile, viteza de fază depinde de direcție și locul geometric al punctelor de egală fază (suprafața de undă) nu mai este o sferă. Deci, razele nu mai sunt normale la suprafețele de undă, ca în cazul mediilor izotrope.

În acest caz, ținând seama de ecuațiile lui Maxwell, rezultă că:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial D_z}{\partial z} \neq 0 \quad (3.460)$$

pentru că

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z. \quad (3.461)$$

În cazul unuei unde electromagnetice

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v} \right) \right] \quad (3.462)$$

care se propagă printr-un mediu izotrop  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  și  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , deci  $\vec{u}_n$ ,  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$  formează un triedru ortogonal (fig. 3. 22).

Din relația  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , rezultă că  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază și ortogonali.

Întrucât  $\vec{E} \perp \vec{H}$  și  $\vec{D} \perp \vec{H}$ , iar  $\vec{D} \perp \vec{H} \perp \vec{u}_n$ , rezultă că  $\vec{E}$  este în același plan cu  $\vec{D}$  și  $\vec{u}_n$ . Vectorul Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ , având direcția razei și fiind perpendicular pe  $\vec{H}$ , rezultă că acesta este în același plan cu  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{u}_n$ . În cazul când  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  fac unghiul  $\varphi$ , atunci  $\vec{r}$  și  $\vec{u}_n$  fac același unghi, iar planul de

oscilație al câmpului electric este planul  $(\vec{D}, \vec{E}, \vec{u}_n, \vec{r})$ . Vectorul luminos este caracterizat de vectorul inducție electrică pentru că  $\vec{D} \perp \vec{u}_n$ .

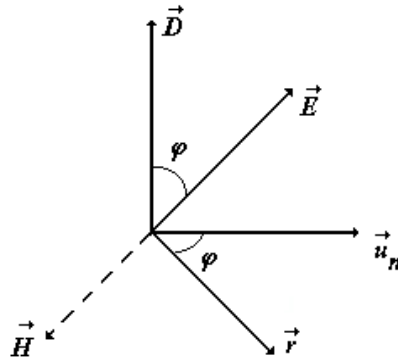


Fig. 3. 22. Reprezentarea schematică a vectorilor  $u_n$ ,  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$  în cazul unui mediu izotrop.

Viteza normală a unei unde plane al cărei plan este (P) la momentul  $t$  și (P') la momentul  $(t')$  (fig. 3. 23) este

$$v = \frac{OA}{t' - t} \quad (3.463)$$

unde  $OA$  reprezintă drumul de-a lungul normalei  $\vec{u}_n$  efectuat de undă între cele două plane.

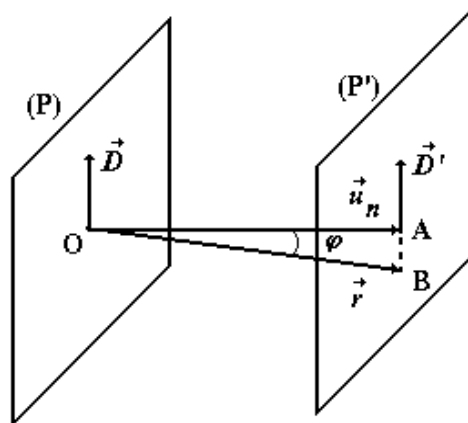


Fig. 3. 23. Planele (P) și (P') între care se propagă unda plană.

Viteza radială este definită de relația:

$$v_r = \frac{OB}{t'-t}, \quad (3.464)$$

unde  $OB$  este drumul efectuat de undă între cele două plane de-a lungul razei,  $\vec{r}$ .  
Între viteza normală și cea radială există relația

$$v_r = \frac{v}{\cos \varphi}. \quad (3.465)$$

Viteza normală este viteza de fază introdusă în expresii de genul  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v}\right)\right]$ , indicele de refracție fiind definit de relația

$n = \frac{v}{c}$ . Întrucât viteza  $v$  depinde de direcție și indicele de refracție  $n$  depinde de direcție.

### 3.8.2. Ecuațiile Fresnel

Eliminând intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  în ecuațiile Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.466)$$

și

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.467)$$

se obține:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (3.468)$$

Întrucât  $\nabla \times \nabla = -\Delta + \nabla \cdot \nabla$  și  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ , relația (3.468) se scrie sub forma:

$$\Delta \vec{E} - \nabla \cdot \nabla \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (3.469)$$

sau proiectată pe axe

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}_x}{\partial t^2}, \quad (3.470)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}_y}{\partial t^2}, \quad (3.471)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}_z}{\partial t^2}. \quad (3.472)$$

Considerând o undă plană care se propagă de-a lungul direcției  $\vec{u}_n$  în care

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v}\right)\right], \quad (3.473)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\vec{u}_n \vec{r}}{v}\right)\right], \quad (3.474)$$

și ținând seama că

$$\vec{u}_n \vec{r} = \alpha_x + \beta_y + \gamma_z \quad (3.475)$$

unde  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt cosinuşii directori ai lui  $\vec{u}_n$ , iar  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , rezultă:

$$\mu_0 D_x = \frac{1}{v^2} [E_x - \alpha(\vec{u}_n \vec{E})] \quad (3.476)$$

$$\mu_0 D_y = \frac{1}{v^2} [E_y - \beta(\vec{u}_n \vec{E})] \quad (3.477)$$

$$\mu_0 D_z = \frac{1}{v^2} [E_z - \gamma(\vec{u}_n \vec{E})]. \quad (3.478)$$

Relațiile (3.476)-(3.478) pot fi rescrise și sub formă vectorială:

$$\mu_0 \vec{D} = \frac{1}{v^2} [\vec{E}_u - \vec{u}_n (\vec{u}_n \vec{E})]. \quad (3.479)$$

Ținând seama de (3.470)-(3.472) relațiile (3.476)-(3.478) devin:

$$D_x = \frac{\alpha(\vec{u}_n \vec{E})}{\mu_0(v_x^2 - v^2)}, \quad D_y = \frac{\beta(\vec{u}_n \vec{E})}{\mu_0(v_y^2 - v^2)}, \quad D_z = \frac{\gamma(\vec{u}_n \vec{E})}{\mu_0(v_z^2 - v^2)}, \quad (3.480)$$

unde

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_x}}, \quad v_y = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_y}} \quad \text{și} \quad v_z = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_z}} \quad (3.481)$$

reprezintă vitezele principale ale undelor plane care se propagă după una din cele trei axe principale.

Întrucât vectorul inducție electrică  $\vec{D}$  este transversal pe direcția de propagare  $\vec{u}_n$  ( $\vec{u}_n \vec{D} = \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z = 0$ ), după adunarea relațiilor (3.480)

și împărțirea cu  $\frac{\vec{u}_n \vec{E}}{\mu_0}$ , se obține *ecuația Fresnel pentru vitezele normale* sub

forma:

$$\frac{\alpha^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{\beta^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{\gamma^2}{v^2 - v_z^2} = 0. \quad (3.482)$$

Cu ajutorul relației (3.482) se poate calcula viteza normală în direcția  $\vec{u}_n(\alpha, \beta, \gamma)$  în funcție de vitezele principale, care sunt parametri ai mediului și de

cosinuşii directori. Ecuaţia (3.482) este de gradul doi în  $v^2$ , rădăcinile acesteia fiind reale şi pozitive, pentru fiecare direcţie de propagare existând două viteze distincte  $v'$  şi  $v''$  (în realitate  $\pm v'$  şi  $\pm v''$ , ceea ce arată că sunt posibile ambele sensuri). Fiecărei viteze îi corespunde o orientare dată pentru inducţia electrică  $\vec{D}$  (sau un plan de polarizare).

Dacă direcţia de propagare  $\vec{u}_n$  coincide cu una din axele principale, doi cosinuşii directori sunt nuli şi viteza normală (de fază) este egală cu viteza principală corespunzătoare.

Ținând seama de relaţie de definiţie a indicelui de refracţie  $n = \frac{c}{v}$ , ecuaţia

Fresnel (3.482) devine:

$$\frac{n_x^2 \alpha^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 \beta^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 \gamma^2}{n^2 - n_z^2} = 0, \quad (3.483)$$

care permite calculul indicelui de refracţie în funcţie de direcţia de propagare  $(\alpha, \beta, \gamma)$  şi de indicii principali  $(n_x, n_y, n_z)$ , (ecuaţia Fresnel pentru indicii de refracţie).

Fiecărei direcţii de propagare  $\vec{u}_n$  îi corespund două valori  $\pm v'$  şi  $\pm v''$  ale vitezei, adică două orientări  $\vec{D}'$  şi  $\vec{D}''$  ale vectorului inducţie electrică.

Întrucât

$$\vec{D}' \cdot \vec{D}'' = D'_x D''_x + D'_y D''_y + D'_z D''_z \quad (3.484)$$

din relaţiile (3.479)-(3.384), rezultă:

$$\mu_0 \vec{D}' \cdot \vec{D}'' = (\vec{u}_n \vec{E})^2 \left[ \frac{\alpha^2}{(v'^2 - v_x^2)(v''^2 - v_x^2)} + \frac{\beta^2}{(v'^2 - v_y^2)(v''^2 - v_y^2)} + \frac{\gamma^2}{(v'^2 - v_z^2)(v''^2 - v_z^2)} \right]. \quad (3.485)$$

Utilizând identitatea  $\frac{1}{(x-z)(y-z)} = \frac{1}{(x-y)} \left( \frac{1}{y-z} - \frac{1}{x-z} \right)$ , relaţia

(3.485) devine:

$$\mu_0^2 \vec{D}' \cdot \vec{D}'' = \frac{(\vec{u}_n \vec{E})^2}{v'^2 - v''^2} \left[ \frac{\alpha^2}{(v'^2 - v_x^2)} + \frac{\beta^2}{(v'^2 - v_y^2)} + \frac{\gamma^2}{(v'^2 - v_z^2)} \right]. \quad (3.486)$$

Din relaţiile (3.485) şi (3.486) rezultă că  $\vec{D}'$  şi  $\vec{D}''$  sunt perpendiculari ( $\vec{D}' \cdot \vec{D}'' = 0$ ). Întrucât vectorii  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{u}_n$  şi  $\vec{r}$  sunt coplanari configuraţia undelor care se propagă după direcţia  $\vec{u}_n$  este cea reprezentată în fig. 3. 2.4.

Planul undeii este  $\vec{D}' \cdot \vec{D}''$ , iar razele sunt  $\vec{r}'$  şi  $\vec{r}''$  şi corespund planelor de vibraţie P' şi P''. Astfel, în timpul propagării inducţiile electrice având direcţiile



privilegiate  $\vec{D}'$  și  $\vec{D}''$  conservă oscilațiile rectilinii, adică acestea se propagă fără deformăție.

### 3.8.3. Medii uniaxe și medii biaxe

Ecuția (3.482) poate avea o rădăcină dublă dacă  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  au valori convenabile. Astfel, pentru  $v_x > v_y > v_z$  trebuie ca:

$$\alpha^2 = \frac{v_x^2 - v_y^2}{v_x^2 - v_z^2}, \beta^2 = 0, \gamma^2 = \frac{v_y^2 - v_z^2}{v_x^2 - v_z^2}, \quad (3.487)$$

existând două direcții  $(\alpha, 0, -\gamma)$  și  $(-\alpha, 0, \gamma)$  pentru care cele două viteze  $v'$  și  $v''$  se confundă. Aceste direcții care sunt simetrice în raport cu axele principale, se numesc *axe optice* ale mediului izotrop. În cazul când  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$  există două axe optice, mediile respective numindu-se *medii biaxe*. Dacă  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ , axele optice se confundă între ele și cu axa după care se determină  $\epsilon_z$ , mediile respective numindu-se *medii aniaxe*. În cazul când  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$ , mediul respectiv se comportă din punct de vedere optic ca un mediu izotrop.

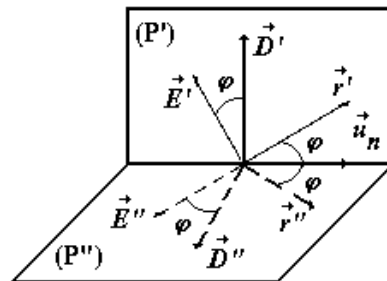


Fig. 3. 24. . Configurația vectorilor  $\vec{D}, \vec{E}, \vec{u}_n$  și  $\vec{r}$  corespunzătorii undelor care se propagă după direcția  $\vec{u}_n$ .

### 3.8.4. Ecuația suprafeței de undă

Pentru a construi suprafața de undă în fig. 3. 24 se consideră un punct O și se construiește pe fiecare direcție a razei un segment OB egal cu viteza de propagare a fazei după această rază, adică egală cu viteza radială definită de relația (3.487), locul geometric al tuturor punctelor B determinând suprafața de undă la un moment dat. Se poate stabili o relație între viteza radială  $v_r$  și direcția razei  $\vec{r}$

pornind de la relația (3.479) și introducând raza  $\vec{r}$  în locul normalei  $\vec{u}_n$ . Înmulțind scalar relația (3.479) cu  $\vec{r}$ , rezultă:

$$\mu_0 \vec{r} \vec{D} = -\frac{1}{v^2} \cos \varphi (\vec{u}_n \vec{E}), \quad (3.488)$$

deoarece  $\vec{r} \cdot \vec{u}_n = \cos \varphi$  (fig. 3. 24).

Întrucât între vectorii coplanari  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ , și  $\vec{r}$  din ecuația (3.488) există o relație liniară

$$\vec{r} = a\vec{D} + b\vec{E}, \quad (3.489)$$

$a$  și  $b$  fiind scalari, în urma înmulțirii scalare a acesteia cu  $\vec{r}$  ( $\vec{r} = 1$ ), rezultă:

$$a\vec{r}\vec{D} = 1, \quad (3.490)$$

pentru că  $\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$ . De asemenea, în urma înmulțirii scalare a relației (3.490) cu  $\vec{u}_n$ , și ținând seama că  $\vec{r} \cdot \vec{u}_n = \cos \varphi$  și  $\vec{u}_n \cdot \vec{D} = 0$ , se obține:

$$\cos \varphi = b\vec{u}_n \vec{E}. \quad (3.491)$$

Înlocuind scalarii  $a$  și  $b$  din relațiile (3.490) și (3.491) în (3.489), rezultă:

$$\vec{E} = \frac{\vec{u}_n \vec{E}}{\cos \varphi} \left( \vec{r} - \frac{\vec{D}}{\vec{r}\vec{D}} \right) \quad (3.492)$$

Introducând expresia  $\vec{u}_n \vec{E}$  din formula (3.491) în relația (3.492), se obține:

$$\vec{E} = -\frac{v^2 \mu_0 \vec{r} \cdot \vec{D}}{\cos^2 \varphi} \left( \vec{r} - \frac{\vec{D}}{\vec{r}\vec{D}} \right). \quad (3.493)$$

Intensitatea câmpului electric poate fi exprimată cu ajutorul relațiilor (3.492) și (3.493) sub forma:

$$\vec{E} = v_r^2 \mu_0 \left[ \vec{D} - (\vec{r} \cdot \vec{D}) \vec{r} \right]. \quad (3.494)$$

Din comparația relațiilor (3.493) și (3.494) se observă că acestea au aceeași formă dacă se fac substituțiile:

$$\mu_0 \vec{D} \Leftrightarrow \vec{E}, \vec{u}_n \Leftrightarrow \vec{r} \text{ și } v \Leftrightarrow \frac{1}{v_r}. \quad (3.495)$$

Pe baza celor prezentate mai sus ecuația Fresnel poate fi obținută din relația (3.495) în care se fac următoarele substituții:

$$\alpha \rightarrow \alpha_r, \beta \rightarrow \beta_r, \gamma \rightarrow \gamma_r, \quad (3.496)$$

$\alpha_r, \beta_r$  și  $\gamma_r$  fiind cosinușii directori ai lui  $\vec{r}$ ,

$$v \rightarrow \frac{1}{v_r}, v_x \rightarrow \frac{1}{v_x}, v_y \rightarrow \frac{1}{v_y}, v_z \rightarrow \frac{1}{v_z}, \quad (3.497)$$

sub forma:

$$\frac{\alpha_r^2 v_x^2}{v_r^2 - v_x^2} + \frac{\beta_r^2 v_y^2}{v_r^2 - v_y^2} + \frac{\gamma_r^2 v_z^2}{v_r^2 - v_z^2} = 0. \quad (3.498)$$

Cu ajutorul ecuației (3.498) se pot calcula valorile lui  $v_r$ , corespunzătoare fiecărei direcții a razei  $(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ , adică să se construiască suprafața de undă plecând de la raze de lungimi proporționale cu  $v_r$ . Făcând substituțiile:

$$\alpha_r^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \beta_r^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \gamma_r^2 = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.499)$$

se obține ecuația suprafeței de undă într-un mediu anizotrop sub forma:

$$x^2 v_x^2 (v_r^2 - v_y^2)(v_r^2 - v_z^2) + y^2 v_y^2 (v_r^2 - v_x^2)(v_r^2 - v_z^2) + z^2 v_z^2 (v_r^2 - v_x^2)(v_r^2 - v_y^2) = 0. \quad (3.500)$$

Pentru a reprezenta forma acestei suprafețe (3.500) se caută intersecțiile sale cu planele coordonatelor. Astfel, pentru unitatea de timp în cazul  $z = 0$ , rezultă:

$$x^2 + y^2 = v_r^2 \text{ și } \frac{x^2}{v_y^2} + \frac{y^2}{v_x^2} = 1, \quad (3.501)$$

adică intersecția cu planul  $xOy$  se compune dintr-un cerc și o elipsă. Aceleași suprafețe se obțin și în cazul celorlalte intersecții. În cazul când  $v_x > v_y > v_z$  se obține o suprafață cu patru ombilicuri (fig. 3. 25).

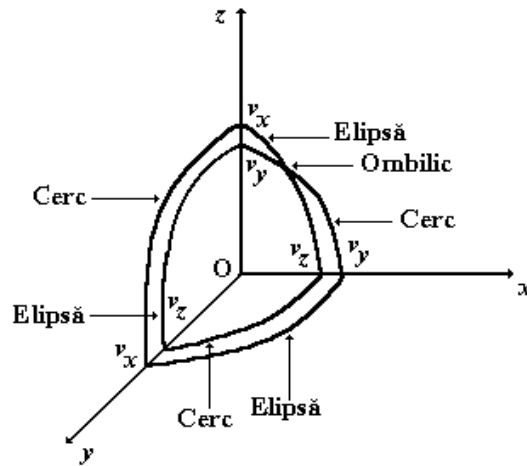


Fig. 3. 25. Forma suprafeței de undă într-un mediu anizotrop când  $v_x > v_y > v_z$ .

În cazul mediilor uniaxe dacă  $v_x = v_y$ , din relația (3.501) se obține o pânză sferică și respectiv un elipsoid de revoluție având ecuațiile:

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_x^2 \quad (3.502)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{v_z^2} + \frac{z^2}{v_x^2} = 1. \quad (3.503)$$

În acest caz ombilicurile degerează în două puncte, pe axa  $z$ , unde cele două suprafețe sunt tangente între ele (fig. 3. 26)

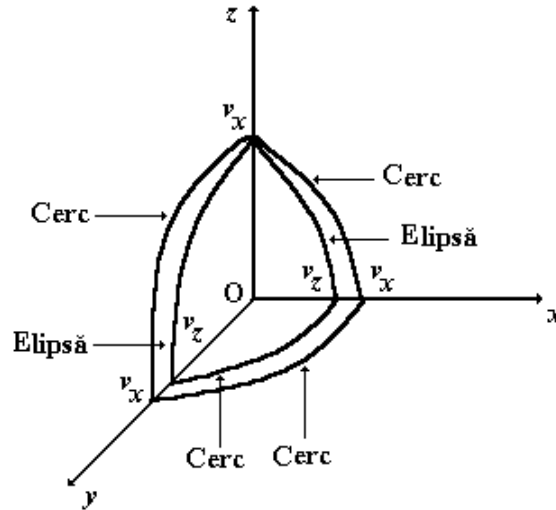


Fig. 3. 26. Forma suprafeței de undă într-un mediu uniax când  $v_x = v_y$ .

O reprezentare mai simplă a suprafețelor de revoluție în cazurile  $v_x > v_z$ , respectiv  $v_x < v_z$  este dată în fig. 3. 27 a), b).

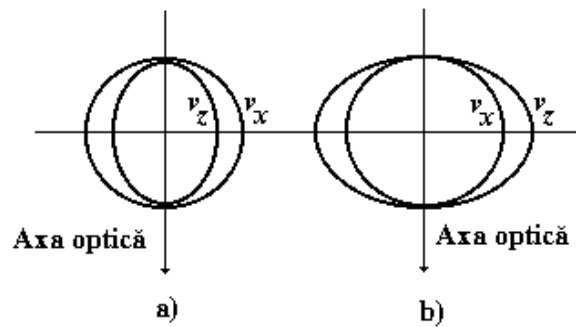


Fig. 3. 27 a), b). Reprezentarea suprafețelor de revoluție în cazurile: a)  $v_x > v_z$ ,  
și b)  $v_x < v_z$ .

În cazul pânzei sferice raza și normala la suprafața de undă se confundă pentru toate direcțiile, regăsindu-se toate proprietățile ordinare ale medilor

izotrope, raza numindu-se *ordinară*, (la fel ca și oscilația corespunzătoare). În cazul pânzei elipsoidale raza se numește *extraordinară*.

### 3.8.5. Dubla refracție printr-un mediu uniax

Fenomenul de *dublă refracție* este determinat într-un mediu anizotrop uniax de existența celor două raze refractate corespunzătoare celor două suprafețe, sferică și respectiv elipsoidală (fig. 3. 28).

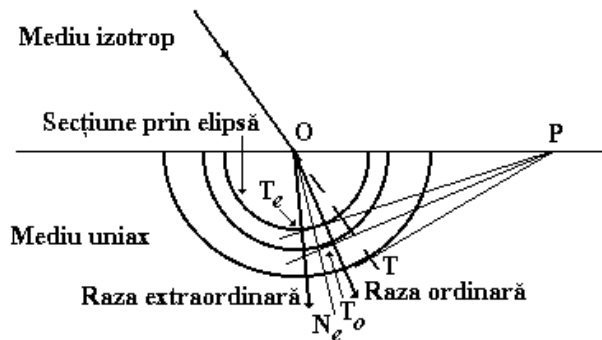


Fig. 3. 28. Reprezentarea fenomenului de dublă refracție.

În cazul undeii tangentă la pânda sferică raza se confundă cu normala fiind tangentă la undă, indicele de refracție este constant și se verifică legile refracției (Descartes).

Pentru unda tangentă la unda elipsoidală planul de incidență fiind oarecare, punctele de contact dintre cele două pânde nu sunt în același plan; punctul  $T_e$  unde unda extraordinară este tangentă la elipsoid nu mai este în planul de incidență. Raza refractată extraordinară  $OT_e$  nu mai verifică legile refracției, în afară de faptul că normala undeii refractate este în planul de incidență. De asemenea, normala ( $ON_e$ ), raza ( $OT_e$ ) și vectorul oscilant ( $\vec{D}$ ) sunt coplanari. Cele două oscilații, extraordinară  $\vec{D}_e$  și ordinară  $\vec{D}_o$  sunt ortogonale,  $\vec{D}_e$  fiind situată în planul ( $ON_e, OT_e$ ).

La trecerea unei raze de lumină naturală printr-un mediu uniax cele două raze  $OT_e$  și  $OT_o$  își împart în mod egal fluxul refractat, fiecare având propria polarizare. Dacă fluxul incident nu conține decât lumina polarizată care oscilează după una din cele două direcții  $\vec{D}_e$  sau  $\vec{D}_o$ , determinate anterior, există numai una din cele două raze refractate, cea care corespunde polarizării luminii incidente. Dacă lumina incidentă este polarizată vectorul de oscilație  $\vec{D}$  se poate descompune în două oscilații  $D_e = D \cos \alpha$  și  $D_o = D \sin \alpha$ , intensitățile razelor ordinară și respectiv extraordinară fiind:

$$I_e = I \cos^2 \alpha \text{ și } I_o = I \sin^2 \alpha. \quad (3.504)$$

Materialele uniaxe (de exemplu: carbonatul de calciu cristalizat sub formă romboedrică, nitratul de sodiu etc.) sunt utilizate pentru fabricarea *polarizorilor* (care transformă lumina naturală în lumină polarizată selectând componentele paralele cu o direcție dată) și *analizorilor* (cu ajutorul cărora se poate determina dacă un fascicul de lumină este polarizat sau nu).

### 3.8.6. Elipsoidul indicilor

Pentru a determina ecuația *elipsoidului indicilor*, care este utilizată pentru reprezentarea geometrică a diferiților parametri care caracterizează propagarea, (de exemplu direcția oscilațiilor care se propagă după o direcție normală la frontul de undă), se consideră o direcție de oscilație a inducției electrice pe care se iau lungimi proporționale cu valoarea corespunzătoare indicelui de refracție, obținându-se o suprafață sub formă de elipsoid.

Ecuatiile (3.499) se pot scrie sub forma:

$$\alpha = kD_x \left( \frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2} \right), \beta = kD_y \left( \frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2} \right), \gamma = kD_z \left( \frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3.505)$$

unde  $k$  are aceeași valoare în cele trei formule. Punând condiția ca produsul scalar  $\vec{u}_n \vec{D} = \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z$  să se anuleze, rezultă:

$$\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} = \frac{D^2}{n^2}, \quad (3.506)$$

unde  $D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$ . Dacă pe direcția vectorului inducție electrică  $\vec{D}$  se ia un segment  $OM = n$ , coordonatele punctului  $M$  fiind  $(x, y, z)$ , astfel ca  $D_x^2 = \alpha x^2$ ,  $D_y^2 = \alpha y^2$ ,  $D_z^2 = \alpha z^2$  și  $n^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , rezultă elipsoidul indicilor:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1, \quad (3.507)$$

care în cazul mediilor uniaxe se reduce la un elipsoid de revoluție ( $n_x = n_y \neq n_z$ ).

### 3.8.7. Interferența undelor transmise de cristale anizotrope

Dacă mediile (lamele) traversate sunt izotrope, fenomenul de interferență a luminii se poate produce oricare arfi starea de polarizare a undelor luminoase.

În cazul când mediile traversate sunt anizotrope apar fenomene noi pentru că orice undă incidentă se descompune în două unde rectangulare care se propagă cu viteze diferite, iar acestea în mod normal nu interferă (experimentul efectuat de

Fresnel și Arago). După descompunere, razele urmează, în general, drumuri diferite, diferența de drum optic fiind  $d(n_1 - n_2)$ , unde  $d$  este grosimea mediului anizotrop traversat, iar  $n_1$  și  $n_2$  sunt indicii de refracție corespunzători celor două unde. Pentru ca cele două fascicule care transportă oscilații rectangulare între ele,  $D_1$  și  $D_2$ , să interfere la ieșirea din mediul anizotrop se plasează un analizor care nu transmite din  $D_1$  și  $D_2$  decât componentele  $d_1 = D_1 \cos \alpha$  și  $d_2 = D_2 \cos \alpha$  (fig. 3. 29) care sunt paralele cu direcția de vibrație a analizorului.

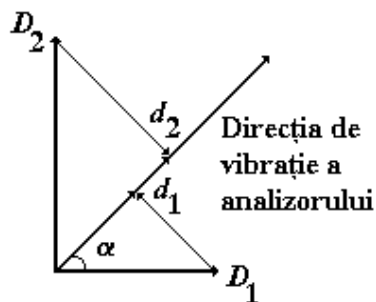


Fig. 3. 29. Reprezentarea schematică a oscilațiilor rectangulare într-un mediu anizotrop.

Se observă că dacă direcția de vibrație a analizorului este paralelă fie cu  $D_1$ , fie cu  $D_2$  una din oscilații  $d_1$  sau  $d_2$  este nulă, iar fenomenul de interferență nu se mai produce. Interferența total distructivă nu se poate obține decât dacă  $d_1 = d_2$ . Întrucât adesea  $D_1 = D_2$ , interferența total distructivă se obține pentru

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Condiția de plasare a analizorului după mediul anizotrop pentru producerea fenomenului de interferență este suficientă doar în cazul când oscilațiile  $D_1$  și  $D_2$  sunt coerente. Întrucât aceste vibrații, în general, nu sunt coerente deoarece provin din descompunerea luminii naturale, pentru producerea fenomenului de interferență trebuie ca lumina incidentă să aibă o stare de polarizare bine definită, rectilinie sau eliptică. Pentru realizarea acestei condiții trebuie plasat în fața mediului anizotrop un polarizor.

Anizotropia fizică a unui mediu optic transparent este o condiție necesară, dar nu și suficientă pentru ca acesta să fie birefringent. Mediile în care nu există nici o direcție privilegiată de vibrație nu pot fi birefringente. Astfel, există substanțe în stare gazoasă, lichidă sau amorfă care în starea naturală sunt anizotrope, dar care pot deveni birefringente sub acțiunea unei cauze fizice exterioare care creează o direcție privilegiată de vibrație, fenomenul numindu-se

*birefrință provocată*, mediul devenind uniax, axa acestuia fiind paralelă cu direcția acțiunii exterioare și birefrința sa  $(n_e - n_o)$  crescând cu cauza.

*Birefrința mecanică*, descoperită de Brewster în anul 1816, constă în producerea birefrinței sub acțiunea unei tensiuni mecanice. Astfel, când asupra unei lame paralelipipedice (sticlă sau plexiglas) L, plasată între un polarizor și un analizor (fig. 3. 30) se acționează cu o forță  $\vec{F}$  produsă cu un dispozitiv mecanic, pe un ecran de observare E, conjugat lamei, apare lumină în punctele conjugate cu cele ale lamei unde se manifestă birefrință.

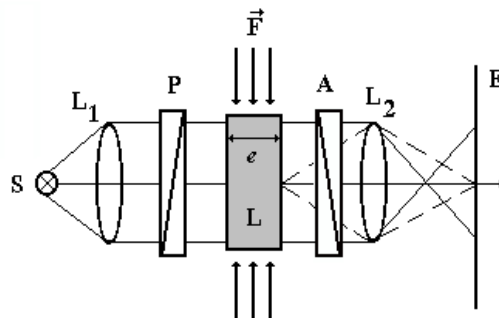


Fig. 3. 30. Montajul experimental utilizat pentru producerea birefrinței mecanice.

Dacă dispozitivul mecanic este astfel orientat încât să producă o comprimare uniformă a lamei pe ecran se obține o iluminare uniformă. Întrucât iluminarea nu apare dacă direcția efortului este paralelă sau perpendiculară pe azimutul polarizorului rezultă din raționamente de simetrie că una din liniile neutre ale lamei este paralelă cu direcția după care se exercită efortul. În cazul când comprimarea nu este uniformă pe ecran se observă linii luminoase care alternează cu cele întunecoase, din care se pot deduce linii de egală comprimare.

Pe baza rezultatelor experimentale rezultă că diferența dintre indicii de refracție ordinar  $n_o$  și respectiv extraordinar  $n_e$  este direct proporțională cu forța aplicată pe unitatea de suprafață, iar diferența de drum produsă la traversarea unei lame de forma unui paralelipiped având grosimea  $e$  și lățimea  $l$ , devine:

$$\delta = (n_o - n_e)e = kF / l \quad (3.508)$$

unde  $k$  este o constantă care depinde de materialul utilizat.

Birefrința mecanică este utilizată în *fotoelasticimetrie*. Fabricând din sticlă sau din plexiglas o machetă a obiectului în interiorul căruia vrem să determinăm tensiunile și plasând macheta între doi polarizori încrucișați se poate măsura în fiecare punct direcția și mărimea tensiunilor. Se obțin *linii izocromatice* (locul geometric al punctelor de egală valoare a diferenței celor două tensiuni principale perpendiculare) și *linii izoclinice* (locul geometric al punctelor unde direcția tensiunilor este paralelă la o direcție). Intersecția a două izocline determină *punctele izotropice*, puncte în care substanța este izotropă.

În cazul *birefrinței dinamice*, descoperită de Maxwell în cazul unui lichid aflat în mișcare circulară cu viteza  $v$  între un polarizor și un analizor și



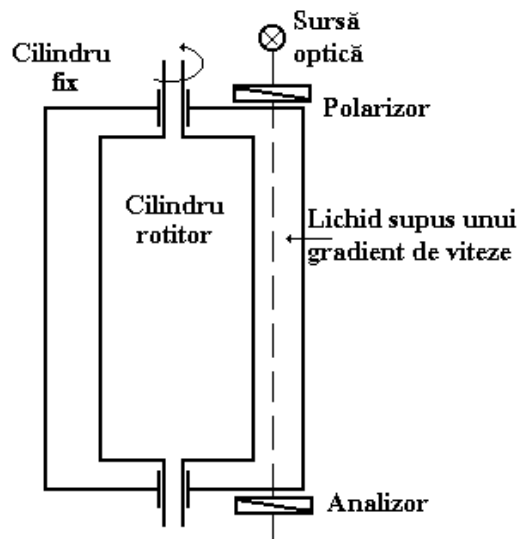
având liniile neutre situate sub un unghi de  $\frac{\pi}{4}$  față de direcția vitezei lichidului (fig. 3. 31), se obține:

$$n_o - n_e = k_1 \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.509)$$

unde  $\frac{\partial v}{\partial r}$  este mai mare în cazul spațiilor tubulare mici și pentru molecule cu lanțuri lungi sau molecule foarte alungite. Birefrința dinamică este utilizată la studiul structurii și al proprietăților macromoleculilor.

*Birefrința produsă prin călire* apare în cazul unei lame de sticlă încălzită până la o temperatură ridicată și apoi răcită. Suprafața care ajunge prima la temperatura mai scăzută se opune schimbărilor de volum, iar lama de sticlă capătă proprietăți birefringente.

*Birefrință electrică* a fost descoperită de Kerr în anul 1876 în cazul unor lichide și solide izotrope care devin uniaxe dacă sunt introduse într-un câmp electric, direcția axei optice fiind cea a câmpului electric (fig. 3. 32)



**Fig. 3. 31.** Montajul experimental utilizat pentru producerea birefrinței dinamice.

Pe baza rezultatelor experimentale s-a găsit că diferența de drum optic este:

$$\delta = (n_o - n_e)e = ek_2(\lambda, T)\lambda E^2 \quad (3.510)$$

unde  $k_2(\lambda, T)$  este constanta Kerr, care poate fi pozitivă sau negativă.

Efectul Kerr apare datorită acțiunii de orientare pe care câmpul electric o exercită asupra moleculelor electrice anizotrope, căreia i se opune agitația termică care tinde să restabilească dezordinea corespunzătoare echilibrului. Întrucât efectul Kerr se stabilește la câteva secunde după aplicarea câmpului electric în solide și

lichide polare vâscoase (de exemplu sticla) și la intervale de timp mai mici ca  $10^{-11}$  s în lichide nepolare cu molecule mici (de exemplu nitrobenzenul) este utilizat pentru fabricarea modulatorilor de intensitate luminoasă, a obturatorilor ultrarapizi din cinematografia ultrarapidă etc.

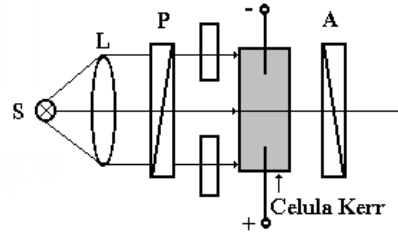


Fig. 3. 32. Montajul experimental utilizat pentru producerea efectului Kerr.

În cazul când birefrința cristalelor transparente (variația indicilor de refracție) introduse într-un câmp electric este liniară cu intensitatea câmpului aplicat apare *efectul Pockels* care fost descoperit în 1893 de F. Pockels. Efectul Pockels poate să apară numai în cristale cubice fără centru de inversie cum ar fi cele de: KDP, LiNbO<sub>3</sub>, LiTaO<sub>3</sub>, BaTiO<sub>3</sub> feroelectric, GaAs, ZnSe, CdS și se observă la frecvențe mai mici decât  $10^{11}$  Hz. Variațiile indicilor de refracție produse de câmpul electric aplicat  $E_k$  sunt date de relațiile:

$$\delta n_1 = -\frac{1}{2}n_1^3 r_{1k} E_k, \quad \delta n_2 = -\frac{1}{2}n_2^3 r_{2k} E_k, \quad (3.511)$$

unde  $r_{mk}$  sunt elementele tensorului electrooptic.

În urma introducerii lichidelor în câmp magnetic  $\vec{H}$  acestea devin mai mult sau mai puțin birefringente (fig. 3. 33), *birefrința magnetică* fiind descoperită în anul 1905 (efectul Cotton-Mouton). Pe baza rezultatelor experimentale s-a găsit că diferența indicilor de refracție ordinar și respectiv extraordinar este:

$$n_o - n_e = C(\lambda)\lambda H^2 \quad (3.512)$$

unde  $C(\lambda)$  este constanta Cotton-Mouton.

### 3.8.8. Polarizarea rotatorie

Unele medii izotrope prezintă proprietatea de *activitate optică* (birefrință circulară), adică de rotire a planului de polarizare al unei unde liniar polarizate, care traversează mediul.

Pentru a deduce *legile experimentale ale activității optice* se introduce un cristal de clorat de sodiu (NaClO<sub>3</sub>), care cristalizează în sistemul cubic, deci izotrop din punct de vedere optic, sau o soluție de zahăr introdusă într-o cuvă cu

grosimea de câțiva cm, sau un cristal de cuarț traversat de lumină după axa optică (direcția după care birefrința liniară este nulă) între doi polarizori încrucișați, iar lumina care traversează mediul optic este monocromatică.

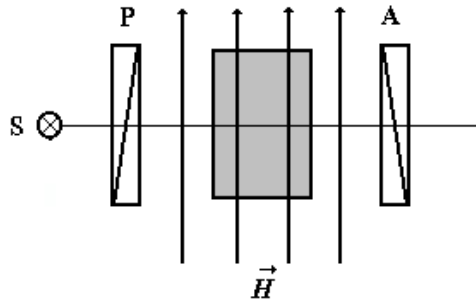


Fig. 3. 33. Montajul experimental utilizat pentru producerea birefrinței magnetice.

Se constată următoarele:

a) rotind lama în jurul axei fasciculului imaginea fasciculului emergent nu se modifică, adică nu există o direcție privilegiată a fenomenului în jurul axei fasciculului;

b) prin rotirea analizorului cu un anumit unghi se poate restabili extincția. Deci, lama conservă natura liniară a oscilației incidente și doar rotește această direcție. Întrucât unghiul de rotație este independent de azimutul oscilației incidente, rotația existând pentru orice grosime a lamei, rezultă că fenomenul nu poate fi confundat cu cel observat în cazul lamei semiundă;

c) unghiul de rotație este proporțional cu grosimea lamei  $l$  :

$$\alpha = \rho(\lambda) \cdot l \quad (3.513)$$

unde  $\rho(\lambda)$  este *puterea rotatorie*;

d) există substanțe care rotesc planul de polarizare la dreapta observatorului care privește spre sursă (*substanțe dextrogire*), substanțe care îl rotesc la stânga (*substanțe levogire*) și substanțe sub cele două forma;

e) în cazul unui corp izotrop pur mărimea definită de raportul

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{\rho_m \cdot l}, \quad (3.514)$$

unde  $\rho_m$  este masa specifică, este independentă de starea fizică (solidă, lichidă, vapori) a substanței;

f) în cazul soluțiilor, puterea rotatorie este proporțională cu concentrația  $c$  (*legea Biot*):

$$\alpha = l \cdot c \cdot [\alpha], \quad (3.515)$$

iar în cazul soluțiilor formate din mai multe substanțe active:

$$\alpha = l \cdot (c_1 \cdot [\alpha_1] + c_2 \cdot [\alpha_2] + \dots). \quad (3.516)$$

O teorie a birefrinței circulare a fost elaborată inițial de către Fresnel în anul 1822 cu ajutorul oscilațiilor circulare liniar polarizate în sensuri opuse, în care

se descompune unda incidentă, care se propagă prin mediu cu viteze diferite. La emergență aceste oscilații se recompun, având planul de polarizare rotit în raport cu cel incident, datorită diferenței de fază dintre cele două unde, introdusă de mediu. Această teorie fenomenologică este corectă și corespunde cazului propagării prin medii active.

Există substanțe (de exemplu  $\text{CS}_2$ ) care introduse într-un câmp magnetic de intensitate  $\vec{H}$ , devin optic active, prezentând fenomenul de *polarizare rotatorie magnetică* (*efect Faraday*), rotația  $\alpha$  a planului de polarizare fiind dată de relația:

$$\alpha = \rho(\lambda) \cdot l \cdot H, \quad (3.517)$$

unde  $\rho(\lambda)$  este *constanta Verdet*, iar sensul de rotație depinde de sensul lui  $\vec{H}$ . Schimbând sensul de propagare a luminii, sensul după care observatorul, (care privește sursa), vede planul de polarizare rotindu-se în sens invers, fenomenul fiind contrar cazului puterii rotatorii naturale, unde sensul absolut al rotației depinde de sensul de propagare a luminii. Efectul Faraday este legat de descompunerea liniilor spectrale de emisie și absorbție de către un câmp magnetic.