

1. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

1.1. Starea mecanică a unui sistem de N puncte materiale

Stările unui sistem fizic format din N puncte materiale se definesc cu ajutorul vectorilor de poziție $\vec{r}_k = \vec{r}_k(t)$ și a vitezelor punctelor materiale $\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_k(t)$, unde $k = 1, 2, \dots, N$. Curba descrisă de vârful vectorului $\vec{r}_k = \vec{r}_k(t)$ este *traectoria punctului material*. Când mișcarea unui sistem fizic este îngrădită de *condiții suplimentare de natură geometrică sau cinematică* se spune că sistemul este supus la *legături*. Legăturile introduc, în general, *reacțiuni de legătură* care, contrar forțelor aplicate, nu sunt cunoscute a priori. Aceste forțe apar ca necunoscute suplimentare în ecuațiile de mișcare.

Din punctul de vedere al *comportării analitice*, H. Hertz a împărțit legăturile în două categorii: *legături olonome* (exprimate prin *relații matematice integrabile*) și *legături neolonome* (exprimate prin *funcții matematice neintegrabile*). Ținând seama de *dependența de timp*, L. Boltzmann le-a divizat în două grupe: *legături reonome*, când expresiile analitice care exprimă *legăturile conțin explicit timpul* și *legături scleronome*, când în expresiile analitice care definesc *legăturile nu apare explicit timpul*.

În cazul unui sistem de N puncte materiale libere configurația sistemului este definită de un ansamblu de $3N$ parametri (coordonate carteziane) $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$. Un astfel de sistem are $f_0 = 3N$ grade de libertate. Dacă între cele N puncte materiale există l legături, numărul gradelor de libertate se reduce la $f = 3N - l$. În acest caz, configurația sistemelor se poate defini dacă se cunosc doar f parametri independenți. Acești parametri independenți sunt numiți *coordonate generalizate* sau *coordonate lagrangeene*. Aceste coordonate generalizate pot fi orice mărimi fizice care exprimă un grad de libertate. Coordonatele carteziane pot fi exprimate cu ajutorul coordonatelor generalizate:

$$x_j = x_j(q_i), \quad y_j = y_j(q_i), \quad z_j = z_j(q_i). \quad (1.1)$$

Se definesc *vitezele generalizate* $\dot{q}_i$ ca derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate. Componentele vitezelor carteziane pot fi exprimate prin intermediul vitezelor generalizate:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y}_j = \sum_{i=1}^f \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{z}_j = \sum_{i=1}^f \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1.2)$$

Starea mecanică a sistemului fizic de N puncte materiale cu f grade de libertate, este, deci, complet determinată de $2f$ parametri, și anume, de f coordonate generalizate și f viteze generalizate. Spațiul cu f dimensiuni al coordonatelor generalizate se numește *spațiu de configurație*. În acest spațiu, un punct (o configurație) reprezintă o stare a sistemului.

1.2. Principiul Hamilton

În cazul unui sistem dinamic olonom–reonom și conservativ cu f grade de libertate, descris de funcția Lagrange $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, acțiunea lagrangeană

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (1.3)$$

calculată între starea inițială $\Sigma_1(t_1)$ și finală $\Sigma_2(t_2)$, (fig. 1. 1) are o valoare staționară pe traiectoria reală față de celelalte traiectorii virtuale compatibile cu legăturile, adică pe traiectoria reală

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (1.4)$$

Definiția de mai sus reprezintă *principiul Hamilton*, considerat ca cea mai generală lege din fizică. Acest principiu permite alegerea din mulțimea de soluții matematice a problemei, soluția fizică. Din acest principiu rezultă mai multe formalisme de scriere a ecuațiilor de mișcare pentru un sistem de N puncte materiale.

1.3. Formalismul Lagrange

1.3.1. Ecuațiile Lagrange

În fig. 1. 1 sunt reprezentate mai multe traiectorii virtuale în cazul unui sistem de puncte materiale care trec prin a aceleași puncte în spațiul de configurație la momentele de timp t_1 și t_2 .

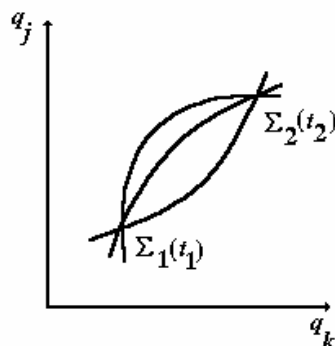


Fig. 1. 1. Traiectorii virtuale în spațiul de configurație.

Se definește *deplasarea reală*, dq distanța dintre două puncte, la momente de timp diferite, de-a lungul unei traiectorii și *deplasarea virtuală* δq distanța dintre două puncte la aceleași moment de timp de pe două traiectorii virtuale. Considerând că $q(t)$ este *traiectoria reală*, traiectoria $q(t) + \delta q(t)$ este o *traiectorie virtuală* foarte apropiată de prima. Variația acțiunii lagrangeene între cele două traiectorii este:

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (1.5)$$

În relația (1.5) s-au permutat operațiile de integrare de-a lungul unei traiectorii și de variație de la o traiectorie la alta, acestea fiind independente.

Variația funcției Lagrange este:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) &= \mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \\ &\cong \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \dots - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

unde s-a dezvoltat în serie funcția $\mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)$ în jurul punctelor $(q_i, \dot{q}_i, t)$ și s-au luat în considerare numai primii termeni. Astfel,

$$\delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad (1.7)$$

și înlocuind (1.7) în (1.6) și (1.4), rezultă:

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0. \quad (1.8)$$

Ținând seama că

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta q_i) \quad (1.9)$$

și înlocuind relația (1.9) în (1.8), se obține:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i. \quad (1.10)$$

În urma înlocuirii relației (1.10) în (1.8), rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt = 0 \quad (1.11)$$

unde:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.12)$$

deoarece $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, din condiția ca la momentele t_1 și t_2 toate traiectoriile să coincidă. Atunci condiția (1.4) devine:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0, \quad (1.13)$$

care este adevărată dacă toți termenii sumei sunt nuli, adică:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f. \quad (1.14)$$

Acestea reprezintă *ecuațiile Lagrange* care sunt ecuații diferențiale de ordinul doi. Soluțiile lor vor conține $2f$ constante, care reprezintă mărimile ce se conservă pentru sistem.

1.3.2. Funcția Lagrange

Funcția Lagrange are câteva proprietăți care sunt folosite la demonstrarea teoremelor din mecanica analitică.

Aditivitatea. Funcția Lagrange a unui sistem format din două subsisteme A și B, între care nu se exercită interacțiuni și care sunt caracterizate prin funcțiile Lagrange $\mathcal{L}_A$ și $\mathcal{L}_B$, est egală cu suma funcțiilor Lagrange a celor două subsisteme:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B. \quad (1.15)$$

Multiplicarea funcției Lagrange a unui sistem mecanic printr-o constantă arbitrară conduce la o funcție care descrie același sistem. Două funcții Lagrange care diferă printr-un factor constant verifică aceleași ecuații.

Funcția Lagrange este definită până la derivata totală în raport cu timpul a unei funcții de coordonate și timp. Se consideră două funcții Lagrange $\mathcal{L}$ și $\mathcal{L}'$ între care există relația:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f(q_i, t). \quad (1.16)$$

Calculând acțiunile lagrangeene corespunzătoare celor două funcții Lagrange, rezultă:

$$\mathcal{S}' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = \mathcal{S} + f[q(t_2), t_2] - f[q(t_1), t_1]. \quad (1.17)$$

Se constată că cele două acțiuni diferă doar printr-o constantă. Astfel, variațiile celor două acțiuni sunt egale, adică:

$$\delta \mathcal{S}' = \delta \mathcal{S} \quad (1.18)$$

și ecuațiile de mișcare vor fi aceleași.

Expresia funcției Lagrange. Pentru a găsi expresia funcției Lagrange se pornește de la legea Newton scrisă pentru punctele materiale ale unui sistem:

$$F_j = \frac{d}{dt} (m_j \dot{x}_j), \quad j = 1, 2, \dots, 3N \quad (1.19)$$

și de la expresia energiei cinetice a sistemului:

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2. \quad (1.20)$$

Din compararea relațiilor (1.19) și (1.20), rezultă:

$$F_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right). \quad (1.21)$$

Într-un sistem conservativ,

$$F_j = - \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad (1.22)$$

unde U este energia potențială.

Din (1.21) și (1.22), se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) = - \frac{\partial U}{\partial x_j}. \quad (1.23)$$

Trecând la coordonatele generalizate $q_i = q_i(x_j, t)$, rezultă:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.24)$$

unde:

$$dx_j = \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i, \quad (1.25)$$

adică:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt}, \quad (1.26)$$

sau:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (1.27)$$

Deci

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (1.28)$$

Derivând relația (1.28) în raport cu timpul se obține:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \\ &= - \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

unde s-a ținut cont că

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}. \quad (1.30)$$

Din relațiile (1.23) și (1.29), rezultă:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - U) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) \right] = 0 \quad (1.31)$$

unde s-a introdus și mărimea $\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$, pentru simetria expresiei. Comparând relația

(1.31) cu ecuațiile Lagrange (1.14) se poate scrie că:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (1.32)$$

În cazul unui sistem de N puncte materiale între care nu se exercită interacțiuni, expresia funcției Lagrange este:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N). \quad (1.33)$$

1.3.3. Impulsurile generalizate și forțele generalizate

Prin definiție, impulsul generalizat, p_i conjugat unei coordonate generalizate q_i , are expresia:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.34)$$

sau, în coordonate carteziene

$$\vec{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_k}. \quad (1.35)$$

Din compararea ecuațiilor Lagrange (1.14) cu ecuațiile Newton și ținând cont de definiția (1.34) rezultă că forța generalizată Q_i , conjugată coordonatei generalizate este definită de:

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (1.36)$$

sau în coordonate careteziene,

$$\vec{F}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k}. \quad (1.37)$$

Din relațiile (1.34) și (1.36), înlocuind în ecuația Lagrange (1.14), rezultă:

$$\dot{p}_i = Q_i \text{ sau } \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_k. \quad (1.38)$$

Aceste expresii ale ecuațiilor Lagrange sau a ecuației Newton sunt valabile atât în caz relativist cât și în caz nerelativist.

Lucrul mecanic în formalismul Lagrange este dat de relația:

$$\mathcal{L} = \int_1^2 \sum_{i=1}^f Q_i dq_i. \quad (1.39)$$

1.4. Formalismul Hamilton

Descrierea stării unui sistem cu ajutorul coordonatelor și impulsurilor generalizate prezintă unele avantaje, mai ales, pentru studiul problemelor generale de mecanică. Cele f impulsuri generalizate și f coordonate generalizate formează un ansamblu de $2f$ parametri, care poartă numele de *variabile canonice*, fiecare pereche de variabile (p_i, q_i) fiind *canonic conjugate*. Ansamblul coordonatelor generalizate $q_1, \dots, q_f$ și a impulsurilor generalizate $p_1, \dots, p_f$ determină *faza stării dinamice a sistemului*. Cei $2f$ parametri (q_i, p_i) sunt coordonatele unui spațiu cu $2f$ dimensiuni, numit *spațiul fazelor*.

1.4.1. Ecuațiile canonice

Definind funcția Hamilton sub forma:

$$\mathfrak{H}(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1.40)$$

din principiul Hamilton se obțin *ecuațiile canonice*.

Înlocuind relația (1.40) în principiul Hamilton, rezultă:

$$\delta \mathfrak{H} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{H}(p_i, q_i, t) dt \right] = 0, \quad (1.41)$$

adică:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^f p_i \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i} \delta p_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0 \quad (1.42)$$

unde:

$$p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \frac{dp_i}{dt} \delta q_i. \quad (1.43)$$

Înlocuind relația (1.43) în (1.42), rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^f \left(\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \sum_{i=1}^f \left(\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) dt = 0. \quad (1.44)$$

Ultima integrală este nulă deoarece $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, în aceste stări toate traiectoriile posibile trecând prin aceleași puncte, iar egalitatea

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0, \quad (1.45)$$

este adevărată dacă toate parantezele sunt nule, adică:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (1.46)$$

care reprezintă *ecuațiile canonice*. S-au obținut un sistem de $2f$ ecuații diferențiale de ordinul întâi, a căror soluții conțin $2f$ constante ce reprezintă mărimi care se conservă.

1.4.2. Semnificația fizică a funcției Hamilton

Pornind de la relația de definiție a funcției Hamilton, se obține:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U = W \quad (1.47)$$

unde W este *energia totală a sistemului*. Pentru deducerea relației (1.47) s-a folosit teorema Euler pentru polinoame omogene. Astfel, într-un *sistem conservativ*

$$\mathcal{H}(\vec{p}_k, \vec{r}_k, t) = \sum_{k=1}^N \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k). \quad (1.48)$$

Pentru un sistem neconservativ funcția lui Hamilton nu poate fi identificată cu energia totală a sistemului.

1.4.3. Scrierea ecuațiilor canonice cu ajutorul parantezelor Poisson

Considerând o funcție $F(p_i, q_i, t)$ și calculând derivata totală a acesteia în raport cu timpul, rezultă:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right). \quad (1.49)$$

Cu ajutorul ecuațiilor canonice (1.46) relația (1.49) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (1.50)$$

Expresia:

$$\{\mathcal{H}, F\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \quad (1.51)$$

poartă numele de *paranteza Poisson* pentru funcțiile $\mathcal{H}$ și F . Astfel, relația (1.50) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{\mathcal{H}, F\}. \quad (1.52)$$

Condiția ca $F(p_i, q_i, t)$ să fie o *integrală primă a mișcării* se scrie:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{\mathfrak{F}, F\} = 0, \quad (1.53)$$

iar dacă F nu depinde explicit de timp condiția de integrală primă se scrie

$$\{\mathfrak{F}, F\} = 0. \quad (1.54)$$

Pentru a scrie ecuațiile canonice cu ajutorul parantezelor Poisson trebuie să se țină seama de proprietățile acestora.

Considerând două funcții oarecare $F_1(q_i, p_i, t)$ și $F_2(q_i, p_i, t)$ paranteza Poisson se definește astfel:

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} \right), \quad (1.55)$$

Dacă $F_1 = C = \text{constant}$ sau $F_2 = C = \text{constant}$, atunci:

$$\{C, F_2\} = \{F_1, C\} = 0. \quad (1.56)$$

Pentru două funcții oarecare F_1 și F_2 sunt adevărate proprietățile:

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\} \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F_1, F_2\} = \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}. \quad (1.58)$$

Pentru trei funcții $F_1(q_i, p_i, t)$, $F_2(q_i, p_i, t)$ și $F_3(q_i, p_i, t)$ există relațiile:

$$\{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}, \quad (1.59)$$

$$\{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + F_2 \{F_1, F_3\}, \quad (1.60)$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} = \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = \{F_2, \{F_3, F_1\}\}. \quad (1.61)$$

Identitatea (1.61) poartă numele de *identitatea Jacobi*. Dacă se înlocuiește $F_1 = \mathfrak{F}$ și $F_2 = q_i$ sau p_i în (1.55) rezultă că:

$$\{\mathfrak{F}, q_i\} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.62)$$

și

$$\{\mathfrak{F}, p_i\} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q_i} = \dot{p}_i. \quad (1.63)$$

Relațiile (1.62) și (1.63) reprezintă *ecuațiile canonice scrise cu ajutorul parantezelor Poisson*.

1.5. Teoremele de conservare în mecanica analitică

1.5.1. Teorema conservării energiei

Conservarea energiei totale a sistemului rezultă din proprietatea de uniformitate a timpului. Conform acestei proprietăți funcția Lagrange a unui sistem închis nu depinde explicit de timp, adică derivata sa totală în raport cu timpul se scrie:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}. \quad (1.64)$$

Ținând cont de ecuațiile Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (1.65)$$

adică:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (1.66)$$

sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = 0, \quad (1.67)$$

care se poate scrie succesiv sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = 0 \quad (1.68)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L} - 2T) = 0 \quad \text{adică} \quad \frac{d}{dt} (T + U) = 0 \quad (1.69)$$

de unde:

$$W = T + U = \text{const.} \quad (1.70)$$

1.5.2. Teorema de conservare a impulsului total al sistemului

Conservarea impulsului total al sistemului decurge din proprietatea de omogenitate a spațiului, ceea ce impune ca proprietățile mecanice ale unui sistem închis să nu se schimbe în decursul unei translații a întregului sistem.

Se consideră o deplasare infinit mică $\vec{\varepsilon}$ pentru care funcția Lagrange nu se schimbă. Translația reprezintă transformarea în care toate punctele sistemului se deplasează cu aceeași cantitate. Variația funcției $\mathcal{L}$ se scrie:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k = \vec{\varepsilon} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} = 0 \quad (1.71)$$

deci,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} = 0. \quad (1.72)$$

Din ecuațiile Lagrange, se obține:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_k} \right) = \frac{d\vec{p}_k}{dt}. \quad (1.73)$$

Atunci

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = 0 \quad (1.74)$$

sau

$$\sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \text{const.}, \quad (1.75)$$

care reprezintă *teorema conservării impulsului total al sistemului.*

1.5.3. Teorema de conservare a momentului cinetic al sistemului

Conservarea momentului cinetic rezultă din proprietatea de izotropie a spațiului, conform căreia proprietățile mecanice ale unui sistem închis nu se schimbă în cursul unei rotații în spațiu a sistemului în ansamblul său.

Se introduce vectorul rotație infinitezimală $\delta \vec{\phi}$ definit ca vectorul a cărui modul este egal cu unghiul de rotație $\delta \phi$ și a cărui direcție coincide cu axa de rotație, în așa fel ca față de direcția lui $\delta \vec{\phi}$ rotația să se efectueze după regula burghiului (fig. 1. 2).

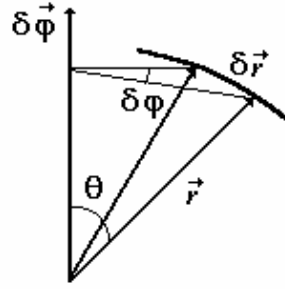


Fig. 1. 2. Reprezentarea schematică a rotației infinitezimale.

Deplasarea extremității vectorului de poziție $\vec{r}$ este legată de unghiului $\delta \phi$ prin relația:

$$\delta r = r \sin \theta \delta \phi, \quad (1.76)$$

care se poate scrie sub formă vectorială:

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\phi} \times \vec{r}. \quad (1.77)$$

Derivând relația (1.77) în raport cu timpul rezultă:

$$\delta \dot{\vec{r}} = \delta \vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}. \quad (1.78)$$

Variația funcției Lagrange a sistemului la o rotație $\delta \vec{\phi}$ este:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_k} \delta \vec{v}_k \right) = 0, \quad (1.79)$$

unde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_k} = \vec{p}_k \text{ și } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_k} = \dot{\vec{p}}_k. \quad (1.80)$$

Înlocuind (1.77), (1.78) și (1.80) în relația (1.79), rezultă:

$$\sum_{k=1}^N \left[\dot{\vec{p}}_k (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_k) + \vec{p}_k (\delta \vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_k) \right] = 0, \quad (1.81)$$

sau, după permutări:

$$\delta \vec{\phi} \cdot \sum_{k=1}^N \left[(\vec{r}_k \times \dot{\vec{p}}_k) + (\dot{\vec{r}}_k \times \vec{p}_k) \right] = 0 \quad (1.82)$$

adică

$$\delta \vec{\phi} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = 0. \quad (1.83)$$

Întrucât $\delta \phi \neq 0$, rezultă că:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = 0, \quad (1.84)$$

sau

$$\sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \sum_{k=1}^N \vec{l}_k = \text{const.}, \quad (1.85)$$

care reprezintă *teorema de conservare a momentului cinetic total al sistemului*.

1.5.1. Teorema lui Liouville (conservarea volumului ocupat de stările unui sistem în spațiul fazelor)

Pe baza teoremei Liouville volumul ocupat de stările virtuale ale unui sistem în spațiul fazelor este invariant în raport cu evoluția stărilor cuprinse în acest domeniu.

Se consideră un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiul fazelor care conține stările sistemului. Acest domeniu ocupă la momentul t volumul:

$$\Omega = \iint_{(\mathcal{D})} \dots \int dp_1 dp_2 \dots dp_f dq_1 dq_2 \dots dq_f. \quad (1.86)$$

În acest domeniu fiecare punct reprezintă o stare a sistemului. Ca urmare a evoluției stărilor fizice fiecare punct al sistemului va descrie o traiectorie și domeniul $\mathcal{D}$ prin deformare va ocupa volumul Ω' la momentul t' :

$$\Omega' = \iint_{(\mathcal{D})} \dots \int dp'_1 dp'_2 \dots dq'_f. \quad (1.87)$$

Se consideră că cele două momente de timp sunt foarte apropiate, astfel că: $t' = t + dt$. Atunci se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} p'_1 &= p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial t} dt = p_1 + \dot{p}_1 dt \\ &\vdots \\ q'_f &= q_f + \dot{q}_f dt. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Trecerea de la coordonatele (q_i, p_i) la coordonatele (q'_i, p'_i) poate fi considerată ca o *transformare de coordonate*. Astfel:

$$\iint_{(\mathcal{D})} \dots \int \prod_i dp'_i dq'_i = \iint_{(\mathcal{D})} \dots \int \frac{\partial(p'_i, q'_i)}{\partial(p_i, q_i)} \prod_i dp_i dq_i \quad (1.89)$$

unde:

$$\frac{\partial(p'_i, q'_i)}{\partial(p_i, q_i)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p'_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p'_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial p'_1}{\partial q_f} \\ \frac{\partial p'_2}{\partial p_1} & \dots & \dots & \frac{\partial p'_2}{\partial q_f} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial q'_f}{\partial p_1} & \dots & \dots & \frac{\partial q'_f}{\partial q_f} \end{vmatrix}, \quad (1.90)$$

iar

$$\frac{\partial p'_1}{\partial p_2} = \frac{\partial p'_1}{\partial q_f} = \dots = \frac{\partial q'_f}{\partial p_1} = 0 \quad (1.91)$$

coordonatele și impulsurile generalizate fiind independente, iar

$$\frac{\partial p'_1}{\partial p_1} = 1 + \frac{\partial \dot{p}'_1}{\partial p_1} dt, \text{ etc.} \quad (1.92)$$

Înlocuind relația (1.92) în (1.90), rezultă:

$$\frac{\partial(p'_i, q'_i)}{\partial(p_i, q_i)} \cong 1 + \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) dt + \dots = 1 + \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right) \right] dt = 1. \quad (1.93)$$

Deci,

$$\Omega = \Omega'. \quad (1.94)$$

Probleme

P.1.1. Un corp de masă m se poate deplasa fără frecare pe o bară orizontală OA, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în plan orizontal, în jurul punctului O (fig. P.1.1.1). Folosind formalismul Lagrange să se determine legea de mișcare a corpului neglijând masa barei.

Rezolvare. Punctul A are trei grade de libertate și o legătură și deci două coordonate generalizate care se aleg φ și r (fig. P.1.1.1).

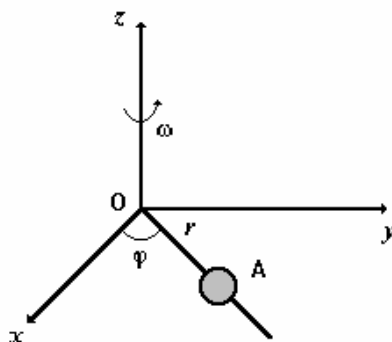


Fig. P.1.1.1. Bara și corpul A care se rotesc în plan orizontal.

Energia cinetică, potențială și funcția Lagrange sunt date de relațiile:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (P.1.1.1)$$

$$U = 0, \quad (P.1.1.2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (P.1.1.3)$$

unde $x = r \cos \varphi$ și $y = r \sin \varphi$.

Întrucât $\omega = \frac{\varphi}{t} = \dot{\varphi}$ funcția Lagrange (P.1.1.3), devine:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2). \quad (P.1.1.4)$$

Ținând seama de relația (P.1.1.4) în ecuația Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right) = 0 \quad (P.1.1.5)$$

se obține ecuația de mișcare sub forma:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0. \quad (\text{P.1.1.6})$$

Soluția ecuației (P.1.1.6) este:

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (\text{P.1.1.7})$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale.

P.1.2. Un punct material A de masă m se mișcă de-a lungul unei drepte OA care formează unghiul $\theta = \text{constant}$ cu axa Oz (fig. P.1.2.1). Să se determine variația în timp a unghiului polar, $\alpha(t)$ astfel ca mișcarea punctului M să fie definită de ecuația $\overline{OA} = a(t+b)^2$, unde a și b sunt constante.

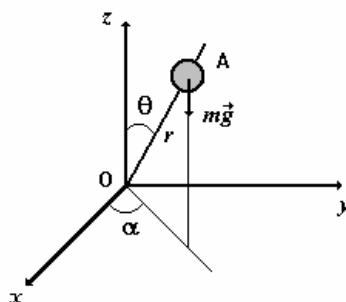


Fig. P.1.2.1. Bara și corpul A care se rotesc în jurul axei Oz .

Rezolvare. Punctul A are două grade de libertate care se aleg $\alpha = f(t)$ și $r = \overline{OA}$ (fig. P.1.2.1). Energia cinetică, potențială și funcția Lagrange se calculează cu ajutorul relațiilor:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \theta) = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2(t) \sin^2 \theta], \quad (\text{P.1.2.1})$$

$$U = -mgr \cos \theta, \quad (\text{P.1.2.2})$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2(t) \sin^2 \theta] - mgr \cos \theta. \quad (\text{P.1.2.3})$$

Ecuația Lagrange pentru variabila r

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{P.1.2.4})$$

se scrie sub forma:

$$\ddot{r} - r \dot{f}^2(t) \sin^2 \theta + g \cos \theta = 0. \quad (\text{P.1.2.5})$$

Înlocuind soluția $r = a(t+b)^2$ din datele problemei în ecuația (P.1.2.5) rezultă:

$$a(t+b)^2 \dot{f}^2(t) \sin^2 \theta = 2a + g \cos \theta, \quad (\text{P.1.2.6})$$

de unde se obține

$$f(t) = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2a + g \cos \theta}{a}} \ln \frac{t+b}{a}. \quad (\text{P.1.2.7})$$

Dacă în soluția (P.1.2.7) se consideră $a = -\frac{g \cos \theta}{2}$ rezultă $f(t) = 0$, iar dreapta OA rămâne fixă.

P.1.3. Funcția Lagrange a unei particule este

$$\mathcal{L} = a\dot{x}^2 + bx\dot{x} + cx \quad (\text{P.1.3.1})$$

unde x reprezintă coordonata generalizată, iar a, b, c sunt constante pozitive. Să se calculeze: a) legea de mișcare a particulei; b) funcția Hamilton.

Rezolvare. a) Înlocuind lagrangeanul $\mathcal{L}$ dat de relația (P.1.3.1) în ecuația Lagrange pentru variabila x

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right) = 0, \quad (\text{P.1.3.2})$$

rezultă:

$$x = \frac{c}{4a} t^2 + At + B, \quad (\text{P.1.3.3})$$

unde constantele A, B se pot determina din condițiile inițiale. Mișcarea descrisă de legea (P.1.3.3) este uniform accelerată cu accelerația $\frac{c}{2a}$.

b) Hamiltonianul particulei se calculează cu ajutorul relației:

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} \quad (\text{P.1.3.4})$$

unde

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} + bx \quad (\text{P.1.3.5})$$

reprezintă impulsul particulei. În final se obține funcția Hamilton sub forma:

$$\mathcal{H} = a\dot{x}^2 - cx = a \left(\frac{c}{2a} t + A \right)^2 - c \left(\frac{c}{4a} t^2 + At + B \right) = aA^2 - cB. \quad (\text{P.1.3.6})$$

P.1.4. Folosind formalismul Hamilton să se deducă: a) expresia hamiltonianului și b) ecuația de mișcare a unui electron de sarcină $-e$ și masă m , care se mișcă în câmpul de forțe creat de nucleul de hidrogen presupus fix. Se consideră că mișcarea electronului are loc în planul xOy .

Rezolvare. a) În coordonate polare

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (\text{P.1.4.1})$$

energia cinetică, potențială și funcția Lagrange sunt date de relațiile:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (\text{P.1.4.2})$$

$$U = -\int \vec{F} d\vec{r} = -\int \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{P.1.4.3})$$

și respectiv

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon r}. \quad (\text{P.1.4.4})$$

Din expresiile impulsurilor generalizate, p_r și p_φ corespunzătoare coordonatelor generalizate r și φ :

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ și } p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, \quad (\text{P.1.4.5})$$

se obține:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \text{ și } \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad (\text{P.1.4.6})$$

Ținând seama de relația (P.1.4.6), hamiltonianul sistemului se poate scrie sub forma:

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon r}. \quad (\text{P.1.4.7})$$

b) Din ecuațiile Hamilton

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3}, \quad \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad (\text{P.1.4.8})$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad (\text{P.1.4.9})$$

și $p_\phi = mr^2\dot{\phi} = \text{constant}$ se obține în final ecuația de mișcare:

$$\ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon mr^2} = r\dot{\phi}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon mr^2}. \quad (\text{P.1.4.10})$$

P.1.5. Funcția Hamilton a unei particule este dată de relația:

$$\mathcal{H} = ap^2 + bx^2 + cx \quad (\text{P.1.5.1})$$

unde x reprezintă deplasarea particulei, p este impulsul particulei și a, b, c sunt constante pozitive. Să se determine: a) legea de mișcare a particulei și b) traiectoria punctului figurativ al mișcării în spațiul fazelor.

Rezolvare. a) Prin eliminarea impulsului din ecuațiile Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -2bx - c, \quad (\text{P.1.5.2})$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2ap, \quad (\text{P.1.5.3})$$

se obține ecuația de mișcare a particulei sub forma:

$$\ddot{x} + 4abx + 2ac = 0. \quad (\text{P.1.5.4})$$

b) Ținând seama de soluția ecuației (P.1.5.4)

$$x = A \sin \omega t - \frac{c}{2b}, \quad (\text{P.1.5.5})$$

unde $\omega = \sqrt{4ab}$, expresia impulsului devine

$$p = \frac{\dot{x}}{2a} = \frac{A\omega}{2a} \cos \omega t. \quad (\text{P.1.5.6})$$

Eliminând timpul între ecuațiile (P.1.5.5) și (P.1.5.6) rezultă ecuația traiectoriei punctului figurativ al mișcării în spațiul fazelor:

$$\frac{\left(p + \frac{c}{2b}\right)^2}{A^2} + \frac{4a^2 p^2}{A^2 \omega^2} = 1, \quad (\text{P.1.5.7})$$

care reprezintă o elipsă.

P.1.6. Se consideră o sferă de rază r care execută oscilații rostogolindu-se fără alunecare în interiorul unui cilindru având raza R (fig. P.1.6.1). Folosind formalismul Lagrange să se deducă: a) ecuația de mișcare a sferei și b) perioada micilor oscilații.

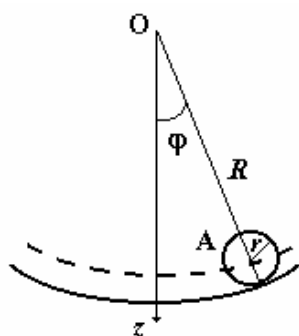


Fig. P.1.6.1. Reprezentarea schematică a mișcării sferei în cilindrul de rază R .

Rezolvare. a) Pentru a caracteriza mișcarea sferei se introduce o singură coordonată generalizată, φ (fig. P.2.8.1). Energia cinetică, potențială și funcția Lagrange se calculează din relațiile:

$$T = \frac{m}{2} v_A^2 + \frac{J_A}{2} \omega^2 = \frac{7m}{10} (R-r)^2 \dot{\varphi}^2, \quad (\text{P.1.6.1})$$

unde $v_A = (R-r)\dot{\varphi} = \omega r$, iar $J_A = \frac{2}{5} m r^2$ este momentul de inerție al sferei,

$$U = -mg(R-r)\cos\varphi, \quad (\text{P.1.6.2})$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{7m}{10} (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi. \quad (\text{P.1.6.3})$$

Înlocuind relația (P.1.6.3) în ecuația Lagrange pentru variabila φ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (\text{P.1.6.4})$$

rezultă ecuația de mișcare a sferei de rază r :

$$\frac{7m}{5} (R-r)^2 \ddot{\varphi} + mg(R-r)\sin\varphi = 0. \quad (\text{P.1.6.5})$$

b) În cazul micilor oscilații, ($\sin\varphi \approx \varphi$) ecuația (P.1.6.5) devine:

$$\ddot{\varphi} + \frac{5g}{7(R-r)} \varphi = 0, \quad (\text{P.1.6.6})$$

perioada acestora fiind:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}. \quad (\text{P.1.6.7})$$

P.1.7. Să se calculeze: a) funcția Lagrange și b) paranteza Poisson dintre $\mathcal{H}$ și $\mathcal{L}$ în cazul unei particule pentru care funcția Hamilton este dată de relația:

$$\mathcal{H} = ap^2 + bx^2 \quad (\text{P.1.7.1})$$

unde x reprezintă deplasarea particulei, p este impulsul particulei și a, b, c sunt constante pozitive.

Rezolvare. a) Funcția Lagrange este dată de relația:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{H} = ap^2 - bx^2. \quad (\text{P.1.7.2})$$

unde p_i și $\dot{q}_i$ reprezintă impulsurile și respectiv vitezele generalizate, iar în cazul problemei de mai sus:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2ap. \quad (\text{P.1.7.3})$$

b) Ținând seama de relația de definiție a parantezelor Poisson

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{L}\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right) \quad (\text{P.1.7.4})$$

se obține în final

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{L}\} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \right) = (2ap)(-2bx) - (2bx)(2ap) = -8abpx. \quad (\text{P.1.7.5})$$

P.1.8. Se consideră un corp de masă m aflat în cădere liberă ($g = \text{constant}$). Știind că la momentul inițial $t_0 = 0$ corpul se afla în repaus, să se calculeze: a) valoarea integralei de acțiune, $\mathcal{S}$ după τ secunde de cădere și b) să se compare valoarea acesteia cu cea corespunzătoare unei mișcări virtuale în care înălțimea pe care cade corpul crește liniar cu timpul.

Rezolvare. a) Acțiunea este dată de relația:

$$\mathcal{S} = \int_0^\tau \mathcal{L} dt = \int_0^\tau (T - U) dt. \quad (\text{P.1.8.1})$$

În cazul căderii libere $z = \frac{g}{2} t^2$, se obține:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - (mgz) = mg^2 t^2, \quad (\text{P.1.8.2})$$

iar

$$\mathcal{S} = \int_0^\tau mg^2 t^2 dt = \frac{1}{3} mg^2 \tau^3. \quad (\text{P.1.8.3})$$

b) În cazul când înălțimea de cădere variază liniar cu timpul, $z = bt$, unde b este o constantă pozitivă care se determină din condiția ca la extremități cele două integrale să coincidă,

$$z = b\tau = \frac{1}{2}g\tau^2, \text{ de unde } b = \frac{g\tau}{2}, \quad (\text{P.1.8.4})$$

rezultă

$$\mathcal{S}' = \int_0^\tau \mathcal{L}' dt = \int_0^\tau (T - U) dt = \int_0^\tau \left(\frac{mb^2}{2} + mgbt \right) dt = \frac{3}{8}mg^2\tau^3. \quad (\text{P.1.8.5})$$

Comparând relațiile (P.1.8.3) și (P.1.8.5) se observă că $\mathcal{S}' > \mathcal{S}$, în concordanță cu principiul minimei acțiuni.