

## CAP. VI. ELECTROMAGNETISM

### VI.1. Operatori algebrici vectoriali

Fie  $V$  o mărime fizică scalară și  $\vec{A}$  o mărime fizică vectorială. Definim operațiunile: gradient ( $grad = \nabla$ ), divergență ( $div = \nabla \cdot$ ), rotor ( $rot = \nabla \times$ ), laplaceian ( $\nabla^2 = \Delta$ ).

$$grad V = \vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (VI.1)$$

$$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \text{ unde } \vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z \quad (VI.2)$$

$$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (VI.3)$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (VI.4)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = grad(div \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (VI.5)$$

Fluxul vectorului  $\vec{A}$  prin suprafața  $\Sigma$  este:  $\Phi_A = \iint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S}$  (VI.6)

Circulația vectorului  $\vec{A}$  pe curba  $\Gamma$  este:  $C_A = \int_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell}$  (VI.7)

Teorema Gauss - Ostrogradski:  $\oiint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} (\nabla \cdot \vec{A}) dv$  (VI.8)

Teorema Stokes:  $\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S}$  (VI.9)

## VI.2. Legile electromagnetismului

### 1) Legea lui Coulomb

Forța de interacțiune dintre două corpuri punctiforme care au sarcinile electrice  $Q$ , respectiv  $q$  este dirijată pe linia ce unește corpurile având modulul direct proporțional cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele.

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{VI.10})$$

unde  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ,  $\epsilon$  este permitivitatea mediului (pentru vid  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}}$ ), iar  $\vec{r}$  este vectorul de poziție al sarcinii  $q$  față de  $Q$  (Fig.VI.1).

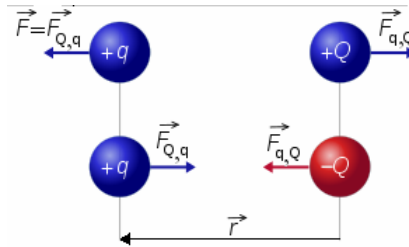


Fig. VI. 1. Forța de interacțiune dintre două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcini electrice (legea lui Coulomb).

2) *Intensitatea câmpului electric în vid* este egală cu raportul dintre forța care acționează asupra corpului de probă având sarcina electrică  $q$  și valoarea acesteia:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (\text{VI.11})$$

În cazul în care sarcina electrică generatoare de câmp,  $Q$ , este punctiformă se obține un câmp radial:

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{VI.12})$$

*Principiul superpoziției:*  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$  are următoarele forme:

- pentru o distribuție discretă de sarcini electrice  $Q_i$ , fixe:

$$\vec{E}(x,y,z) = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (\text{VI.12}')$$

- pentru o distribuție continuă de sarcină electrică, în repaus (Fig.VI.2):

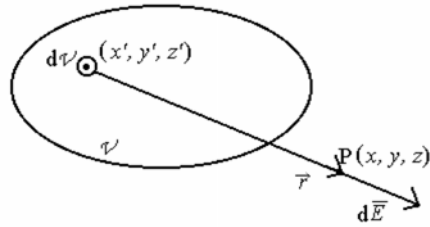


Fig. VI.2 Intensitatea câmpului electric pentru o distribuție continuă de sarcină electrică.

$$\vec{E}(x,y,z) = k_0 \iiint_{v'} \frac{\rho(x',y',z')}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dx' dy' dz' \quad (\text{VI.12''})$$

unde:  $\rho = \frac{dQ}{dv'}$  este densitatea volumică de sarcină electrică (în SI se măsoară în  $C/m^3$ ),  $dv' = dx'dy'dz'$  este elementul de volum al distribuției, iar  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ .

### 3) Lucrul mecanic al forțelor electrice. Potențialul electric

Câmpul electric generat de sarcini electrice fixe se numește *câmp electrostatic*.

Pentru o deplasare infinitesimală  $d\vec{\ell}$  lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \vec{F}d\vec{\ell} = q\vec{E}d\vec{\ell} = \frac{k_0 q Q r d\vec{\ell}}{r^3} \quad (\text{VI.13})$$

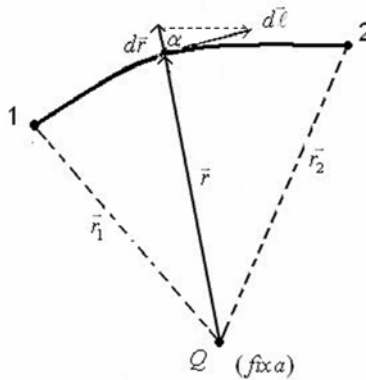


Fig.VI.3 Calculul lucrului mecanic elementar în câmp electrostatic.

Din Fig.VI.3 rezultă:  $\vec{r}d\vec{\ell} = rd\ell \cos \alpha = r dr$  (VI.14)

Așadar:  $dL = k_0 q Q \frac{dr}{r^2}$ , iar:

$$L_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} = k_0 q Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k_0 q Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{VI.15})$$

Lucrul mecanic  $L_{12}$  efectuat de forțele electrice între stările 1 și 2 depinde numai de aceste poziții și nu depinde de stările intermediare, deci *câmpul electrostatic este un câmp conservativ*. Este evidentă proprietatea  $L_{21} = -L_{12}$ , deci lucrul mecanic pe o curbă închisă, în câmp electrostatic, este nul. Rezultă:

$$q \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \text{ adică: } \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{VI.16})$$

Din relația (VI.16) și din teorema Stokes (III.109) obținem:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{VI.16}')$$

relație care se interpretează astfel:

a) câmpul electrostatic este *irotațional*, deci are linii de câmp deschise (Fig. VI.4, pentru un electron izolat, în repaus);

b) vectorul  $\vec{E}$  provine din gradientul unei mărimi fizice scalare:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (\text{VI.17})$$

Mărima  $V$  se numește *potențial electric* (unitatea de măsură, în SI, este voltul, notat V).

Semnul "-" arată că vectorul  $\vec{E}$  este dirijat în sensul scăderii potențialului electric. Pe componente, relația (VI.17) are forma:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{VI.17}')$$

Diferența de potențial  $V_1 - V_2$  dintre două puncte ale câmpului electrostatic este egală cu raportul dintre lucrul mecanic necesar deplasării sarcinii electrice  $q$  între cele două puncte și valoarea sarcinii  $q$ . Obținem:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} = k_0 Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{VI.18})$$

Pentru determinarea univocă a potențialului electric este necesar un punct de referință, ales arbitrar, în care  $V_{\text{ref}} = 0$ . În exemplul prezentat (câmp generat de sarcina electrică  $Q$  punctiformă) alegem  $V_2 = 0$  pentru  $r_2 \rightarrow \infty$ . Rezultă:

$$V_1 = \frac{L_{1,ref}}{q} = k_0 \frac{Q}{r_1} \quad (VI.19)$$

Suprafețele care au același potențial în toate punctele lor se numesc *suprafețe echipotențiale*. Ele sunt perpendiculare pe liniile de câmp  $\vec{E}$  (Fig. VI. 4).

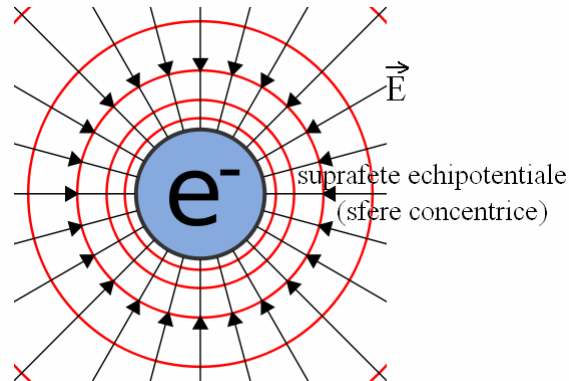


Fig. VI. 4. Liniile de câmp, intensitatea câmpului electric și suprafețele echipotențiale pentru un electron izolat, aflat în repaus.

Potențialul electric este o *mărimă aditivă*.

- Pentru o distribuție discretă de sarcini electrice  $Q_i$ , fixe:

$$V(x,y,z) = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (VI.19')$$

- pentru o distribuție continuă de sarcină electrică, în repaus (Fig.VI.2):

$$V(x,y,z) = k_0 \iiint_{V'} \frac{\rho(x',y',z')}{r} dx' dy' dz' \quad (VI.19'')$$

#### 4) Energia potențială ( $W_p$ )

- pentru o pereche de sarcini electrice, notate  $q_1$  și  $q_2$ , aflate la distanța  $r_{12}$  una de alta, energia potențială este egală cu lucrul mecanic necesar aducerii sarcinii electrice  $q_2$  de la infinit până la distanța  $r_{12}$ :

$$W_p = L_{2,\infty} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_2 V_1 = q_1 V_2 \quad (VI.20)$$

unde  $V_1$  este potențialul electric creat de sarcina electrică  $q_1$  în punctul în care se află sarcina  $q_2$ .

- pentru o distribuție discretă de sarcini electrice se însumează energiile potențiale ale tuturor perechilor de sarcini electrice (fiecare pereche este considerată o singură dată):

$$W_p = k_0 \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \dots + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (\text{VI.21})$$

sau:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i^* \quad (\text{VI.21}')$$

unde  $V_i^*$  reprezintă potențialul electric creat în punctul în care se află sarcina electrică  $q_i$  de către celelalte sarcini electrice  $q_j$  cu  $j \neq i$ .

- pentru o distribuție continuă de sarcini electrice se adaptează rezultatul (VI.21'):

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{v'} V^*(x', y', z') \rho(x', y', z') dv' \quad (\text{VI.22})$$

### 5) Legea lui Gauss

Conform relației (VI.6) fluxul vectorului câmp electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $\Sigma$  este:  
 $\Phi_E = \iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S}$ , iar printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  este:

$$\Phi_{E, \Sigma \text{ închisă}} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{VI.23})$$

Să calculăm fluxul electric printr-o suprafață sferică de rază  $r$ , centrată în sarcina electrică fixă  $q$ . În toate punctele acestei sfere intensitatea câmpului electric are același modul  $E = k_0 \frac{q}{r^2}$  și este orientată radial (Fig. VI.5).

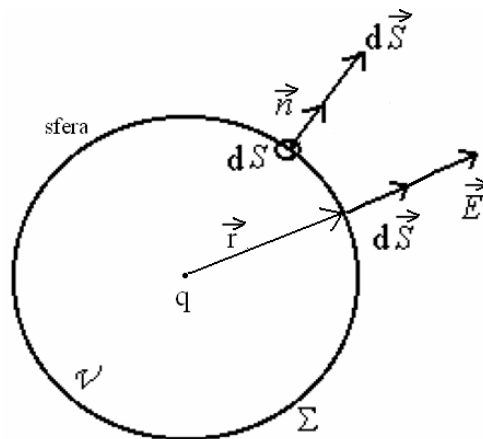


Fig. VI. 5. Calculul fluxului câmpului electric al unei sarcini punctiforme prin suprafața unei sfere.

Obținem:

$$\oiint_{sfera} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{sfera} E dS = k_0 \frac{q}{r^2} \oiint_{sfera} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (VI.24)$$

Rezultatul se poate generaliza sub forma: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (VI.25)$$

unde  $q_{int}$  este sarcina electrică totală din interiorul suprafeței închise  $\Sigma$  de formă oarecare. Relația (VI.25) reprezintă *forma integrală a legii Gauss, în vid: fluxul electric printr-o suprafață închisă este egal cu raportul dintre sarcina electrică totală din interiorul acelei suprafețe și permitivitatea vidului*. Distingem cazurile:

- distribuție discretă de sarcini electrice fixe: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (VI.25')$$

- distribuție continuă de sarcini electrice în repaus: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv \quad (VI.25'')$$

Forma diferențială (locală) a legii Gauss, în vid, se obține din relația (VI.25'') folosind teorema Gauss-Ostrogradski (VI.8). Rezultă:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (VI.26)$$

**Observații:** 1° densitatea volumică de sarcini electrice cuprinde atât sarcinile electrice libere cât și sarcinile electrice legate (în atomi, molecule, ioni):  $\rho = \rho_{libere} + \rho_{legate}$   
 2° din relațiile (VI.17) și (VI.26) rezultă ecuația Poisson, utilizată pentru calculul potențialului electric atunci când se cunoaște densitatea volumică de sarcini electrice:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (VI.27)$$

3° expresia energiei potențiale devine:

$$W_p = \iiint_v \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \quad (VI.28)$$

unde  $w_{electric} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  reprezintă densitatea volumică de energie a câmpului electric (în SI se măsoară în J/m<sup>3</sup>).

6) *Legea conservării sarcinii electrice (ecuația de continuitate)*

Pentru caracterizarea deplasării sarcinilor electrice definim:

a) intensitatea curentului electric:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{în SI unitatea de măsură este amperul, A}) \quad (\text{VI.29})$$

b) densitatea de curent printr-o suprafață:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_n} \cdot \vec{u}_j \quad (\text{VI.30})$$

unde  $\vec{u}_j = \frac{\vec{v}}{v}$  este versorul densității de curent și al vitezei de deplasare a sarcinilor electrice, iar  $dS_n$  este suprafața elementară așezată perpendicular pe direcția de deplasare;  $j$  se măsoară în A/m<sup>2</sup>. Este evidentă relația:

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} \quad (\text{VI.31})$$

Pentru o suprafață  $\Sigma$  închisă:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq_{int}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv \right) \quad (\text{VI.32})$$

Relația (VI.32) reprezintă *forma integrală a legii conservării sarcinii electrice*.

Pentru a găsi forma diferențială a acestei legi folosim teorema Gauss - Ostrogradski (VI.8):

$\oiint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = \iiint_{v_{\Sigma}} \nabla \cdot \vec{j} dv$  și relația  $q_{int} = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv$ , unde densitatea volumică de sarcină electrică

$\rho$  depinde de  $x, y, z$  și  $t$ . Rezultă forma diferențială a legii conservării sarcinii electrice:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VI.33})$$

care se mai numește *ecuația de continuitate*, prin analogie cu cea din mecanica fluidelor.



7) *Legea lui Ohm*

În regim staționar  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  și deci  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , ceea ce se interpretează astfel: vectorul

$\vec{j}$  este un *vector solenoidal*, adică are linii de câmp închise. Așadar, *curentul electric staționar se produce numai în circuite închise*. Pentru a-l menține este necesară o *sursă electrică*, adică un dispozitiv în care purtătorii de sarcină electrică sunt deplasați de forțe neelectrice astfel încât circuitul lor să se închidă. Purtătorii de sarcină electrică pozitivă se deplasează în exteriorul sursei de la polul ei pozitiv la cel negativ, iar în interiorul sursei invers. Forțele care deplasează purtătorii de sarcină electrică prin interiorul sursei se numesc *forțe imprimare* și au drept corespondent *câmpul electric imprimat*  $\vec{E}_i$ .

Se numește *tensiune electromotoare (t.e.m.)* mărimea numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele imprimare pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă printr-o porțiune de circuit. Pe tot circuitul (interior și exterior) forța este:  $\vec{F} = \vec{F}_{electric} + \vec{F}_{imprimat} = q(\vec{E} + \vec{E}_i)$ . Lucrul mecanic între două puncte ale circuitului este:

$$L_{12} = q \left( \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{\ell} \right) = q(V_1 - V_2) + q \epsilon_{12} \quad (VI.34)$$

unde  $\epsilon_{12}$  reprezintă t.e.m. între punctele 1 și 2.

*Tensiunea electrică sau căderea de tensiune* este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat, în total, de forțele imprimare și de cele electrostatice, pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă pe o porțiune de circuit (între punctele 1 și 2):

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} \quad (VI.35)$$

Din ultimele două relații rezultă *legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit*:

$$U_{12} = V_1 - V_2 + \epsilon_{12} \quad (VI.36)$$

Pentru un circuit închis  $V_1 = V_2$  și deci: 
$$U = \epsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E}_i d\vec{\ell} \quad (VI.37)$$

adică: ***T.e.m. pentru întregul circuit este egală cu circulația câmpului electric imprimat.***

*Forma locală (diferențială) a legii lui Ohm este:*

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (VI.38)$$

unde  $\sigma$  este conductivitatea electrică a mediului.

Pentru a obține *forma integrală a legii lui Ohm* folosim formula rezistenței electrice  $R$  a unui fir conductor, de lungime  $\ell$  și secțiune  $S$ , confecționat dintr-un material cu rezistivitatea  $\rho^*$ :  $R = \frac{\rho^* \ell}{S} = \frac{\ell}{\sigma S}$  precum și  $U_{12} = \ell(E + E_i)$ . Din relațiile (VI.31) și

(VI.38) rezultă:  $E + E_i = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S}$ . În final:

$$I = \frac{U_{12}}{R} \quad (\text{VI.39})$$

### 8) Legea Biot – Savart

se folosește la calculul inducției magnetice produse de un curent electric staționar. Inducția magnetică elementară  $d\vec{B}$ , produsă, în vid, de curentul  $I$  ce trece prin elementul de linie  $d\vec{\ell}$  al curbei  $\Gamma$ , în punctul P poziționat prin vectorul  $\vec{r}$  (Fig.VI.5) este:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (\text{VI.40})$$

unde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  este permeabilitatea vidului.

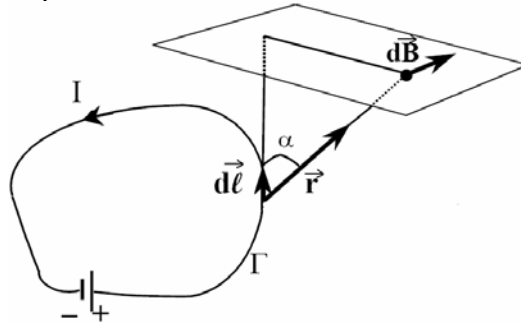


Fig. VI. 6. Calculul inducției magnetice produse de un curent electric staționar (legea Biot-Savart).

Inducția magnetică în punctul P se obține prin integrarea relației (VI.40) pe curba închisă  $\Gamma$  parcursă de curent și deci depinde de forma acesteia:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (\text{VI.41})$$

**Aplicație:** Să se calculeze inducția magnetică produsă într-un punct P situat la distanța  $R$  de un conductor liniar, infinit, parcurs de curentul staționar  $I$  (Fig.VI.7). Modulul inducției magnetice elementare este:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{rd\ell \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cos \beta}{r^2}. \quad (\text{VI.42})$$

Din Fig. VI.6:  $\ell = R \tan \beta$ , iar  $d\ell = \frac{R d\beta}{\cos^2 \beta}$ ; de asemenea:  $r = \frac{R}{\cos \beta}$ .

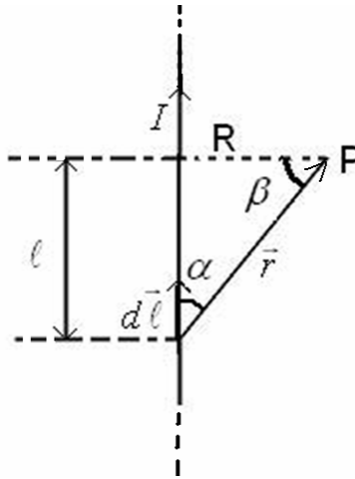


Fig. VI.7. Calculul inducției magnetice la distanța  $R$  de un conductor liniar infinit, aflat în vid și parcurs de curentul electric staționar  $I$ .

Înlocuind în relația (VI.42) obținem:  $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \beta d\beta$ , apoi:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (\text{VI.43})$$

### 9) Legea fluxului magnetic

se justifică prin analogie cu legea Gauss (a fluxului electric): deoarece nu există "sarcini magnetice" (analoage celor electrice) **fluxul inducției magnetice printr-o suprafață închisă este nul.**

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (\text{VI.44})$$

Relația (VI.44) reprezintă *forma integrală a legii fluxului magnetic*, iar *forma locală (diferențială)* este:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{VI.45})$$

10) *Legea lui Ampère*

se referă la circulația vectorului  $\vec{H}$  (intensitatea câmpului magnetic) pe o curbă închisă.

În vid există relația: 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{VI.46})$$

Intensitatea câmpului magnetic  $H$  se măsoară în A/m, iar inducția magnetică  $B$  în tesla (T). Fie un curent staționar, de intensitate  $I$ , care străbate un conductor liniar, foarte lung (considerat infinit). Folosind relațiile (VI.43) și (VI.46) calculăm circulația vectorului  $\vec{H}$  pe un cerc de rază  $R$ , centrat pe conductor și perpendicular pe acesta. Obținem:

$$\oint_{\text{cerc } \Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{I}{2\pi R} \oint_{\text{cerc}} d\ell = I, \text{ rezultat care se generalizează sub forma:}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = I_{\text{total}} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} \quad (\text{VI.47})$$

*Legea lui Ampère pentru curenți staționari* (Fig. VI.8) se enunță astfel: **Circulația vectorului intensitate a câmpului magnetic pe o curbă închisă  $\Gamma$  este egală cu intensitatea totală a curentului prin suprafața mărginită de curba  $\Gamma$ .**

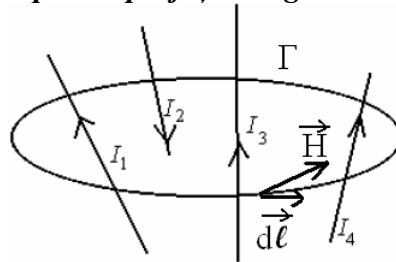


Fig. VI. 8. Legea lui Ampère pentru curenți staționari.

Mai general, pentru curenți nestaționari, legea lui Ampère are forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{D} d\vec{S} \right), \quad (\text{VI.48})$$

unde vectorul  $\vec{D}$  reprezintă inducția electrică (se măsoară în C/m<sup>2</sup>), care depinde de  $x, y, z$  și  $t$ . În vid:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ . Relația (VI.48) reprezintă *forma integrală a legii lui Ampère*.

Pentru a obține *forma diferențială* a acestei legi folosim teorema Stokes (VI.9) aplicată circulației vectorului  $\vec{H}$ , apoi egalăm integranții. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{VI.49})$$

unde  $\vec{j}$  este densitatea curentului de conducție, iar  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_d$  se interpretează ca densitatea curentului de deplasare.

11) *Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)*

se referă la apariția unui câmp electric într-o regiune în care fluxul magnetic variază în timp. Se arată experimental că **într-un circuit închis străbătut de un flux magnetic variabil în timp apare o t.e.m. egală cu viteza de variație a fluxului magnetic, luată cu semn schimbat.**

$$\epsilon_{indusa} = - \frac{d\Phi_{mg}}{dt}, \quad (VI.50)$$

unde  $\Phi_{mg} = \iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}$  este fluxul inducției magnetice prin suprafața circuitului (Fig. VI. 9).

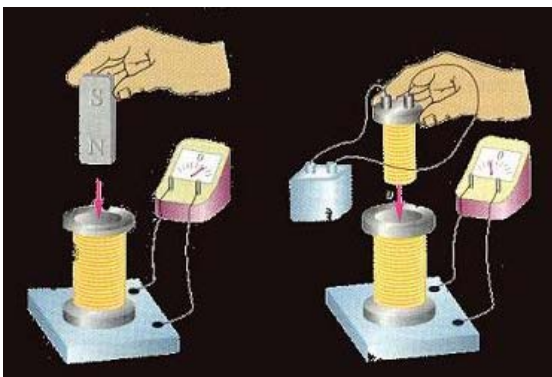
Dar:  $\epsilon_{indusa} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell}$ , deci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{S} \right). \quad (VI.51)$$

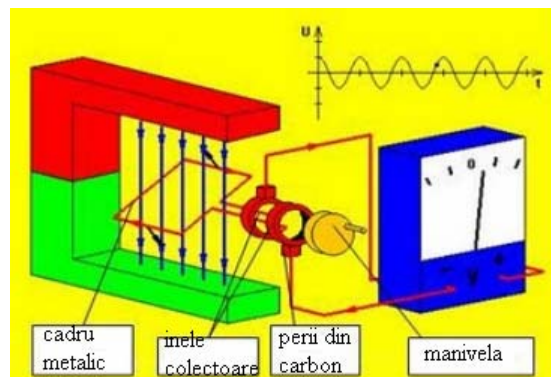
Relația (VI.51) reprezintă *forma integrală a legii lui Faraday*. Pentru a obține *forma diferențială* a acestei legi folosim teorema Stokes (VI.9) aplicată circulației vectorului  $\vec{E}$ , apoi egalăm integrații. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (VI.52)$$

unde inducția magnetică  $\vec{B}$  depinde de  $x, y, z$  și  $t$ .



a)



b)

Fig. VI. 9. Experimente care demonstrează apariția unei t.e.m. într-un circuit în care fluxul magnetic variază în timp: a) deplasarea unui magnet (sau a unei bobine parcurse de curent electric) în interiorul unei bobine fixe nelegată la vreo sursă electrică; b) rotirea unui cadru metalic într-un câmp magnetic static (principiul producerii curentului alternativ).

Mai general, *fenomenul de inducție electromagnetică constă în apariția unui câmp electric, având linii de câmp închise, într-o regiune cu flux magnetic variabil în timp* (Fig. VI. 10).

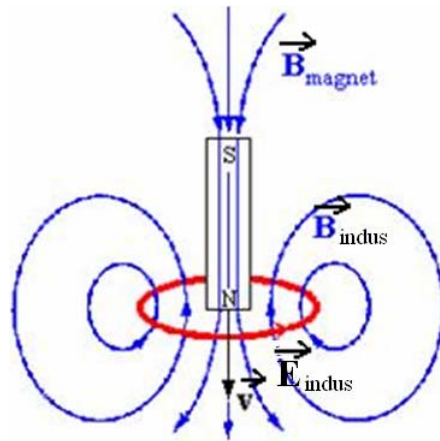


Fig. VI. 10. Apariția unui câmp electric, având linii de câmp închise, într-o regiune cu flux magnetic variabil în timp.

## 12) *Legi de material*

a) legea lui Ohm (forma locală):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{VI.53})$$

b) în medii dielectrice:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (\text{VI.54})$$

unde vectorul  $\vec{P}$  reprezintă *polarizația*, iar  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  este permitivitatea relativă (sau

constantă dielectrică) a mediului. Pentru a defini polarizația, pornim de la *dipolul electric* (sistem format din două sarcini electrice punctiforme, egale și de semn contrar, aflate la distanța  $d$ , Fig.VI.11) care este caracterizat prin momentul dipolar:  $\vec{p} = q\vec{d}$  (se măsoară în

C.m). Polarizația este momentul dipolar al unității de volum:  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$  (se măsoară în C/m<sup>2</sup>).

c) în medii magnetice:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (\text{VI.55})$$

unde vectorul  $\vec{M}$  reprezintă *magnetizația*, iar  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  este permeabilitatea relativă a mediului.

Pentru a defini magnetizația, pornim de la o *buclă de curent* (Fig.VI.12) care este caracterizată prin momentul magnetic:  $\vec{m} = IS\vec{n}$  (se măsoară în  $A \cdot m^2$ ). Magnetizația este momentul magnetic al unității de volum:  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}$  (se măsoară în  $A/m$ ).

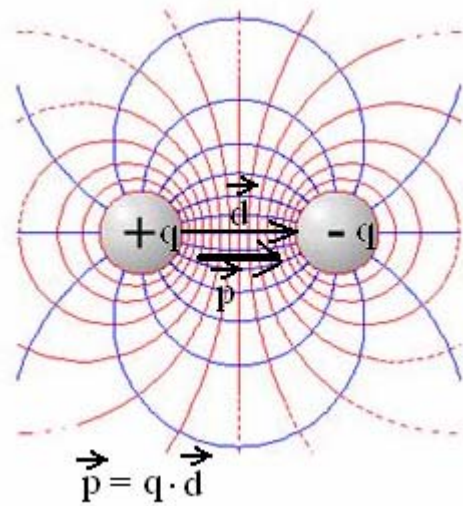


Fig. VI.11. Dipolul electric.

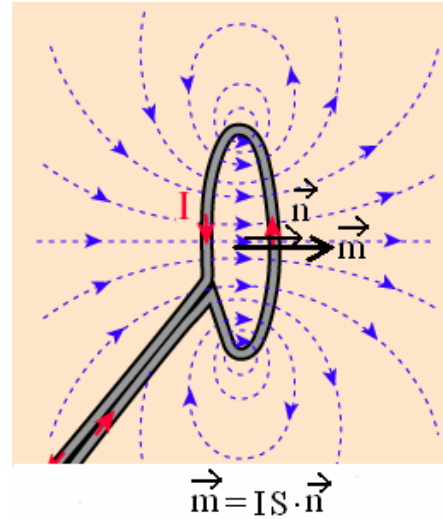


Fig. VI.11. Buclă de curent.

### VI.3. Ecuațiile Maxwell

reprezintă, într-o formă sintetică, legile electromagnetismului.

Forma diferențială:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libere}$  (VI.56)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (VI.57)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (VI.58)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (VI.59)$$

Forma integrală: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q_{libere} = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho_{libere} dv \quad (VI.60)$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (VI.61)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{S} \right) \quad (VI.62)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{D} d\vec{S} \right) \quad (VI.63)$$

Pentru caracterizarea completă a fenomenelor electromagnetice se adaugă legile de material:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (VI.64)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (VI.65)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (VI.66)$$

#### VI.4. Energia câmpului electromagnetic (teorema Poynting)

Energia câmpului electromagnetic, evidențiată experimental, are anumite proprietăți exprimate în următoarele două postulate:

a) energia câmpului electromagnetic  $W$  este formată, aditiv, din energia câmpului electric și energia câmpului magnetic:

$$W = W_{el} + W_{mg} \quad (VI.67)$$

b) densitățile volumice de energie ale celor două câmpuri sunt:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \text{și} \quad w_{mg} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (VI.68)$$

Reunind cele două postulate obținem:

$$W = \iiint_v \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) dv \quad (VI.69)$$

integrarea efectuându-se pe domeniul (volumul  $v$ ) care conține energia  $W$ .



***Într-un sistem izolat energia câmpului electromagnetic se conservă.***

Într-un sistem neizolat câmpul electromagnetic schimbă energie atât cu corpurile din domeniul (volumul)  $v$  în care există câmpul cât și cu corpurile din exteriorul acestui domeniu, în acest ultim caz energia fiind transferată prin suprafața  $\Sigma$  care delimitează volumul considerat. În timpul  $dt$  energia câmpului scade cu  $dW$ . Viteza de variație a energiei se scrie sub forma:

$$-\frac{dW}{dt} = P_v + P_\Sigma \quad (\text{VI.70})$$

unde  $P_v$  și  $P_\Sigma$  au dimensiuni de putere și reprezintă cele două căi ale schimbului de energie:  $P_v$  - cu corpurile din volumul  $v$ , iar  $P_\Sigma$  cu cele din exteriorul acestuia. Să calculăm viteza de variație a energiei câmpului electromagnetic în cazul în care mediul este omogen și izotrop, iar suprafața  $\Sigma$  este imobilă. Folosim relația (VI.69) precum și relațiile de material  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , respectiv  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_v \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) dv = \iiint_v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D^2}{2\epsilon} + \frac{B^2}{2\mu} \right) dv = \\ &= \iiint_v \left( \frac{\vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv = \iiint_v \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv \end{aligned} \quad (\text{VI.71})$$

Din ecuațiile Maxwell (VI.58) și (VI.59) avem:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$  și  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{j}$ ; înlocuim în relația (VI.71); rezultă:

$$-\frac{dW}{dt} = \iiint_v \left[ \vec{H} \nabla \times \vec{E} - \vec{E} (\nabla \times \vec{H} - \vec{j}) \right] dv \quad (\text{VI.72})$$

Dar:  $\vec{H} \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \nabla \times \vec{H} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$ , deci:

$$-\frac{dW}{dt} = \iiint_v \left[ \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} \right] dv \quad (\text{VI.73})$$

Vectorul Poynting se definește prin:

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{VI.74})$$

Din ultimele două relații și din teorema Gauss - Ostrogradski (VI.8) obținem **teorema Poynting**:

$$-\frac{dW}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{S}_p d\vec{S} + \iiint_{v_{\Sigma}} (\vec{j} \cdot \vec{E}) dv \quad (\text{VI.75})$$

Prin identificarea termenilor din relațiile (VI.70) și (VI.75) rezultă:

$$P_v = \iiint_{v_{\Sigma}} (\vec{j} \cdot \vec{E}) dv \quad (\text{VI.76})$$

și

$$P_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{S}_p d\vec{S} \quad (\text{VI.77})$$

**Interpretare:** 1° Relația (VI.76) reprezintă *legea Joule - Lenz* și indică un transfer ireversibil de energie, realizat totdeauna de la câmp la mediu (vectorii  $\vec{j}$  și  $\vec{E}$  au aceeași orientare într-un mediu omogen), transfer care se manifestă prin *efect termic* (încălzirea mediului).

2° Relația (VI.77) evidențiază un transport de energie prin suprafața  $\Sigma$  (într-un sens sau altul) de-a lungul unei direcții perpendiculare pe planul determinat de vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ , deci pe direcția vectorului Poynting; sensul de transfer este dat de sensul vectorului Poynting.

Enunțul teoremei Poynting: *Viteza de variație a energiei câmpului electromagnetic din volumul  $v$  este egală cu suma dintre fluxul vectorului Poynting prin suprafața  $\Sigma$  ce delimitează acest volum și puterea disipată în mediu prin efect termic.*

## VI.5. Unda electromagnetică în vid

În vid ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) ecuațiile Maxwell au următoarea formă:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{VI.78})$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{VI.79})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{VI.80})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{VI.81})$$

Vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  depind, fiecare, de coordonatele spațiale  $x, y, z$  și de timp ( $t$ ):  $\vec{E}(x, y, z, t)$ , respectiv  $\vec{H}(x, y, z, t)$ . Pentru a obține ecuația pe care o satisface vectorul  $\vec{E}$  aplicăm

operatorul "rotor" ecuației (VI.80), folosim relația (VI.5) pentru operatorul "dublu rotor" precum și relațiile (VI.78) și (VI.81). Rezultă:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.82})$$

adică vectorul  $\vec{E}$  verifică ecuația generală a undelor (relația III.2):  $\Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ .

Prin identificarea lor obținem formula vitezei undei electromagnetice *in vid*, notată  $c$  (notația  $v$  se folosește pentru viteza undei elmg. într-un mediu oarecare):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{VI.83})$$

Așadar: 
$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.84})$$

Relația (VI.84), scrisă pe componente, are forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.84'})$$

Pentru a obține ecuația pe care o satisface vectorul  $\vec{H}$  aplicăm operatorul "rotor" ecuației (VI.81), folosim relația (VI.5) pentru operatorul "dublu rotor" precum și relațiile (VI.79) și (VI.80). Rezultă:

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.85})$$

adică vectorul  $\vec{H}$  verifică și el ecuația generală a undelor, viteza de propagare fiind tot  $c$ . Deoarece, *in vid*, vectorul  $\vec{D}$  este direct proporțional cu  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ), iar vectorul  $\vec{B}$  este direct proporțional cu  $\vec{H}$  ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) rezultă că și vectorii  $\vec{D}$ , respectiv  $\vec{B}$  verifică ecuații de tipul (VI.82), (VI.85), adică ecuația undelor.

**Concluzie:** În vid câmpul electromagnetic se propagă sub forma undei electromagnetice care poate fi descrisă de oricare din vectorii  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ , viteza de propagare fiind  $c$ , dată de relația (VI.83).

## VI.6. Proprietățile undei electromagnetice în vid

Soluțiile ecuațiilor (VI.82) și (VI.85), sub forma *undei electromagnetice armonice plane*, sunt:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \text{ respectiv } \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (\text{VI.86})$$

unde  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_k$  este vectorul de undă.

Folosind forma (VI.86) calculăm  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  și  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ . Obținem:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = i\omega \vec{E}, \text{ deci putem înlocui, formal, operatorul } \frac{\partial}{\partial t} \text{ cu } i\omega.$$

Apoi:  $E_x = E_{0x} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]$  și  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = -ik_x E_{0x} \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = -ik_x E_x$ ;

analog:  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = -ik_y E_y$  și  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_z E_z$ . Rezultă:  $\nabla \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$ , deci *putem înlocui,*

*formal, operatorul  $\nabla$  cu  $-i\vec{k}$ .*

1° Din relațiile (VI.78) și (VI.79), folosind echivalența formală  $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$ , rezultă:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \text{ adică } \vec{E} \perp \vec{k} \text{ și } \vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \text{ adică } \vec{H} \perp \vec{k} \quad (\text{VI.87})$$

*Interpretarea relațiilor (VI.87): unda electromagnetică este undă transversală* (oscilațiile mărimilor variabile au loc perpendicular pe direcția de propagare).

2° Din relațiile (VI.80) și (VI.81), folosind echivalențele formale  $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$  și  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$ ,

rezultă:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \quad \text{și} \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon_0 \omega \vec{E} \quad (\text{VI.88})$$

*Interpretarea relațiilor (VI.88):*

a)  $\vec{H} \perp \vec{k}$  și  $\vec{E} \perp \vec{k}$ , deci *unda electromagnetică este undă transversală*

b)  $\vec{H} \perp \vec{E}$ , deci *vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  oscilează în plane perpendiculare*

c) **vectorii  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  formează un triedru drept, în această ordine** (sau în cele obținute prin permutări circulare)

d) relațiile (VI.88) fiind îndeplinite la orice moment de timp  $t$  și în orice punct  $\vec{r}$ , rezultă că **vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază** (aceasta este:  $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ , dacă faza inițială este nulă)

e) **modulele vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt direct proporționale:**

$$kE = \mu_0 \omega H \text{ sau } kH = \varepsilon_0 \omega E \quad (\text{VI.89})$$

Deoarece  $k = \frac{\omega}{c}$  și  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  obținem, folosind una din relațiile (VI.89):

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0} \text{ sau } E = Z_0 H \quad (\text{VI.90})$$

unde  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  este impedanța caracteristică a vidului.

*Observație:* Deoarece vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază, iar modulele lor sunt direct proporționale rezultă că și **amplitudinile lor  $E_0$  și  $H_0$  sunt direct proporționale.**

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0} = H_0\sqrt{\mu_0} \text{ sau } E_0 = Z_0 H_0 \quad (\text{VI.90}')$$

Fig.VI.9 prezintă dispunerea vectorilor  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  și variația în timp a vectorilor  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  pentru o undă electromagnetică plană care se propagă de-a lungul axei  $Ox$ ; componentele vectorilor undei sunt:  $\vec{k}(k, 0, 0)$ ,  $\vec{E}(0, E, 0)$  și  $\vec{H}(0, 0, H)$ , iar expresiile pentru  $E$  și  $H$  sunt:

$$E = E_{0y} \exp[i(\omega t - kx)] \text{ și } H = H_{0z} \exp[i(\omega t - kx)] \quad (\text{VI.91})$$

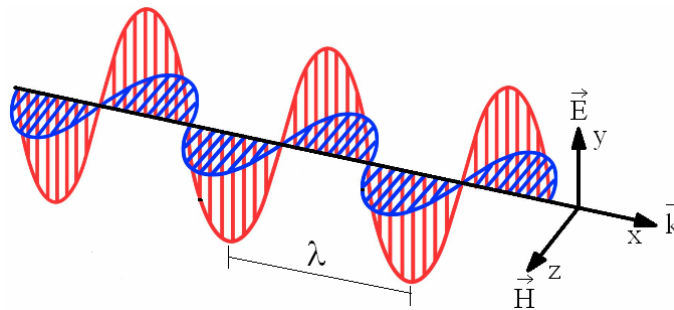


Fig.VI.9 Variația în timp a vectorilor  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  pentru o undă electromagnetică plană care se propagă de-a lungul axei  $Ox$ .

3° Calculăm densitățile volumice de energie  $w_{el}$  și  $w_{mg}$  corespunzătoare celor două câmpuri, pornind de la relațiile (VI.68) și ținând cont că, în vid,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \text{ și } w_{mg} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (\text{VI.92})$$

Din relațiile (VI.90) și (VI.92) rezultă:

$$w_{el} = w_{mg} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{VI.93})$$

**Densitățile volumice de energie  $w_{el}$  și  $w_{mg}$  corespunzătoare celor două câmpuri, electric și magnetic, din unda electromagnetică, sunt egale.**

4° Calculăm vectorul Poynting:

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} = EH \vec{u}_k = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{u}_k \quad (\text{VI.94})$$

**Modulul vectorului Poynting este direct proporțional cu pătratul intensității câmpului electric.** Bineînțeles, acest modul are aceeași proprietate și față de intensitatea câmpului magnetic, conform relației (VI.90).

5° *Intensitatea undei electromagnetice* se definește ca media temporală, pe o perioadă, a modulului vectorului Poynting:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}_p| dt \quad (\text{VI.95})$$

Considerăm partea reală a vectorului  $\vec{E}$  din relația (VI.91):  $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$  și

obținem:  $\int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{T}{2}$ , deci:

$$I = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \quad (\text{VI.96})$$

**Intensitatea undei electromagnetice este direct proporțională cu pătratul amplitudinii câmpului electric.** Bineînțeles, intensitatea are aceeași proprietate și față de amplitudinea câmpului magnetic [vezi relația (VI.90')].

*Observație:* Intensitatea undei electromagnetice se poate calcula și cu formula (IV.33) folosită la undele elastice. În acest caz:  $I = c \langle w \rangle$ , iar

$w = w_{el} + w_{mg} = 2w_{el} = \varepsilon_0 E^2$  [conform relației (VI.93)]. Rezultă:

$$I = c \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{VI.96}')$$

6° **Viteza de fază este egală cu viteza de grup** (vidul este un mediu nedispersiv):

$$v_f = v_g = c.$$

**Domeniul undelor electromagnetice** este foarte vast și cuprinde mai multe grupe de unde, clasificarea fiind făcută după frecvență ( $\nu$ ) sau după lungimea de undă din vid ( $\lambda = c/\nu$ ) (Fig. VI. 10).

1. *Undele radio (sau hertziene)*. Domeniul de frecvență al acestor unde este cuprins între zeci de hertzi până la un gigahertz ( $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$ ), adică au lungimea de undă cuprinsă între câțiva km până la 30 cm. Se utilizează, în special, în transmisiile radio și TV. După  $\lambda$ , aceste unde se subîmpart în unde lungi (2 km - 600 m), unde medii (600 m - 100 m) și unde scurte (100 m - 1 cm).
2. *Microundele* sunt generate, ca și undele radio, de instalații electronice. Lungimea de undă este cuprinsă între 30 cm și 1 mm. Corespunzător, frecvența variază între  $10^9 - 3 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$ . Se folosesc în sistemele de telecomunicații, în radare și în cercetarea științifică asupra proprietăților atomilor, moleculelor și ale gazelor ionizate. Aceste unde se subîmpart în unde decimetrice, centimetrice și milimetrice. Se mai folosesc și în domeniul casnic.
3. *Radiația infraroșie (IR)* cuprinde domeniul de lungimi de undă situat între 1 mm și  $7,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  (ca frecvență, între  $3 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ). În general, sunt produse de corpurile încălzite. În ultimul timp s-au realizat instalații electronice care emit unde infraroșii cu lungimea de undă submilimetrică.
4. *Radiația vizibilă (VIZ)* este acea parte din domeniul undelor electromagnetice care produce senzația luminoasă în ochiul uman. Lungimea de undă este cuprinsă, cu aproximație, între 760 nm și 400 nm ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ). Sunt studiate în capitolul numit "Optică".
5. *Radiația ultravioletă (UV)* are lungimea de undă cuprinsă în domeniul 3,8 nm și 0,6 nm. Această radiație este generată de moleculele și atomii dintr-o descărcare electrică în gaze. Soarele este o sursă puternică de radiații ultraviolete.
6. *Radiația X (sau Röntgen)* sunt produse în tuburi speciale în care un fascicul de electroni, accelerați cu ajutorul unei tensiuni electrice de ordinul zecilor de mii de volți, bombardează un electrod metalic.
7. *Radiația  $\gamma$*  constituie regiunea superioară ( $3 \cdot 10^{18} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^{22} \text{ Hz}$ ) în clasificarea undelor electromagnetice în raport cu frecvența lor. Ele sunt produse de către nucleele atomilor.

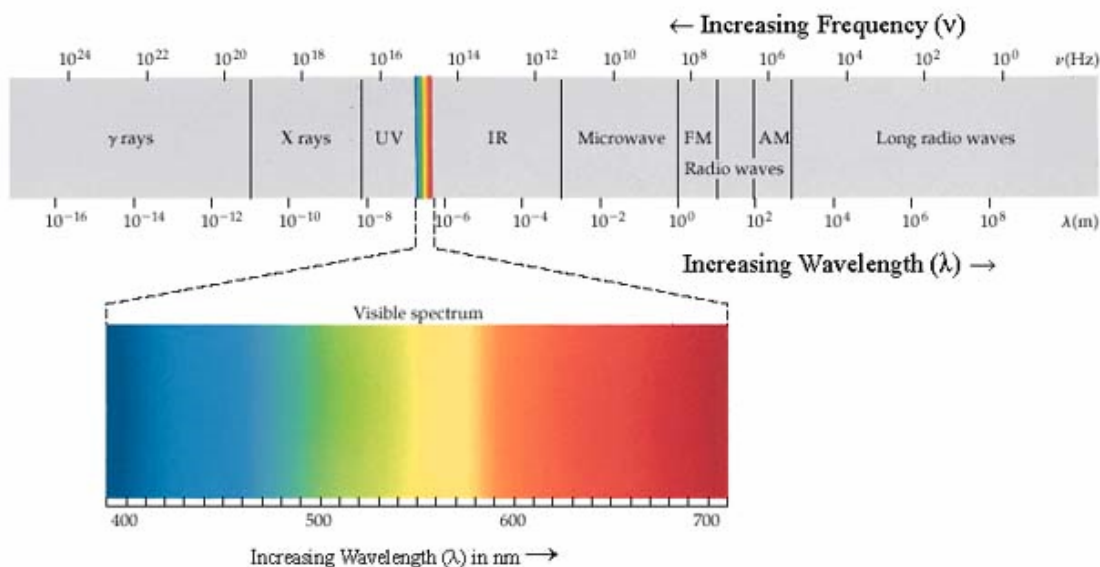


Fig. VI. 10. Domeniul undelor electromagnetice.