CAP. III. UNDE ELASTICE

III. 1. Conceptul de undă

a apărut în strânsă legătură cu cel de oscilație. În general, oscilația se defineşte ca o perturbație periodică a unei mărimi ce caracterizează local starea unui sistem fizic. Experiența arată că o perturbație, indiferent de natura ei, se propagă printr-un mediu material din aproape în aproape, cu *viteză finită*. Există perturbații (de exemplu, câmpul electromagnetic) care se propagă şi în vid, tot cu viteză finită.

Prin **undă** înțelegem tabloul spațio-temporal al unei mărimi fizice a cărei perturbație se propagă într-un mediu dat. Mai simplu, **unda** reprezintă propagarea într-un mediu, cu viteză finită, a unei perturbații variabile în timp.

Aşadar, mărimea perturbată, indiferent de natura ei, variază în funcție de coordonatele spațiale şi de timp, fiind reprezentată printr-o funcție $\Psi(x, y, z, t)$ numită ***funcție de undă***. Existența undei presupune două elemente care îi condiționează comportarea: o *sursă* (în care se produce o perturbație inițială) şi un *mediu* (în care se propagă perturbația).

Clasificarea undelor

a) *după natura perturbației*:

- unde elastice (perturbația este o deformare mecanică, iar mediul este elastic)
- unde electromagnetice (propagarea, în orice mediu, a câmpului electromagnetic)
- unde magnetohidrodinamice (propagarea simultană şi intercondiționată a unor perturbații complexe, mecano-electromagnetice, în plasmă)
- unde termice (se produc drept urmare a variației temperaturii)
- unde de Broglie (asociate microparticulelor aflate în mişcare).

b) *după caracterul matematic al mărimii fizice perturbate* Ψ :

- unde scalare (Ψ = densitate, presiune, temperatură)
- unde vectoriale (Ψ = deplasare, viteză de oscilație, intensitate a câmpului electric, inducție magnetică)
- tensoriale.

Undele vectoriale se clasifică în:

- unde longitudinale (la care direcția mărimii perturbate coincide cu direcția de propagare, de exemplu unda sonoră)
- unde transversale (la care direcția mărimii perturbate este perpendiculară pe direcția de propagare, de exemplu unda luminoasă)

Caracterizarea mediului în care se propagă undele este necesară deoarece mediul impune anumite particularități asupra propagării undei.

- Un mediu este *omogen* dacă proprietățile lui fizice sunt aceleaşi în orice punct, adică sunt independente de coordonatele spațiale. În caz contrar mediul este *neomogen*.

- Un mediu este *izotrop* dacă proprietățile lui fizice, plecând din orice punct, sunt aceleaşi pentru orice direcție după care se face măsurarea lor, adică sunt independente de direcție. În caz contrar mediul este *anizotrop*.
- Un mediu este *liniar* dacă, pentru mai multe perturbații Ψ_i ajunse simultan în acelaşi punct, perturbația rezultantă satisface relația de suprapunere:

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_i \Psi_i(x, y, z, t) \tag{III.1}$$

În caz contrar mediul este *neliniar*.

- Un mediu este *dispersiv* dacă viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile undei, nu numai de cele ale mediului. Într-un mediu *nedispersiv* perturbațiile de aceeaşi natură se propagă cu aceeaşi viteză (ex. în vid, toate undele electromagnetice se propagă cu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).
- Într-un mediu *conservativ* procesele ondulatorii sunt reversibile, iar într-un mediu *disipativ* propagarea perturbației este însoțită de generare de entropie. Folosind o altă terminologie mediile disipative se mai numesc absorbante (energia undei scade), iar cele conservative, neabsorbante.

Observație: Caracterul dispersiv/nedispersiv şi caracterul conservativ/disipativ nu depind numai de mediu, ci şi de natura şi de frecvența undei.

Un mediu omogen, izotrop, liniar, nedispersiv şi conservativ se numeşte ***mediu ideal***. Un astfel de mediu este *infinit*.

III.2. Ecuația de propagare a undelor în mediul ideal. Unda plană

În condițiile în care sursa de unde produce perturbații de forma unor *mici oscilații*, iar *mediul* este *ideal*, indiferent de natura fizică şi de caracterul matematic al perturbației, comportarea undei este descrisă de o ecuație diferențială de forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{III.2}$$

în care v este o constantă având dimensiune de viteză, a cărei valoare depinde de caracteristicile mediului şi de cele ale undei. Vom obține astfel de ecuații pentru cazuri concrete (unde elastice, unde electromagnetice) analizând propagarea perturbației respective şi vom stabili totodată formula vitezei v în fiecare caz.

Unda plană se defineşte prin faptul că funcția de undă Ψ are aceeaşi valoare în orice punct dintr-un plan. Alegând ca acest plan să fie *yOz* rezultă: $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ şi $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$, iar ecuația (III.2) devine unidimensională:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{III.3}$$

unde $\Psi = \Psi(x,t)$. O *soluție generală* a acestei ecuații cu derivate parțiale este o funcție arbitrară care depinde de variabilele *x* şi *t* numai prin intermediul unei combinații liniare şi omogene a acestora, adică:

$$\Psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \qquad \text{(III.4)}$$

în care *f* şi *g* sunt două funcții arbitrare. Soluția $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ reprezintă *unda progresivă* adică cea care se propagă de la sursa de unde S (Fig. III.1) spre punctul de observație M (de coordonată *x*), iar soluția $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ reprezintă *unda regresivă*.

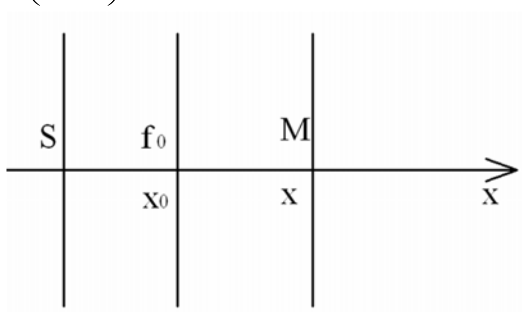


Fig. III.1 Propagarea undei plane.

În cazul undei progresive notăm cu f_0 valoarea funcției *f* la momentul *t* = 0 în punctul x_0, adică: $f_0 = f\left(-\frac{x_0}{v}\right) = const.$ La momentul ulterior *t* > 0 această valoare se va regăsi în punctele care satisfac condiția: $t - \frac{x}{v} = -\frac{x_0}{v}$, deci pentru $x > x_0$.

În concluzie:

a) valoarea constantă f_0 a perturbației se propagă de la sursă în sensul pozitiv al axei *Ox*, ceea ce justifică denumirea de undă progresivă;

b) raportul $\frac{x - x_0}{v}$ reprezintă timpul necesar ca unda să străbată distanța $x - x_0$ şi, prin urmare,

c) constanta *v* reprezintă viteza de propagare a perturbației (*v* se numeşte viteză de fază, denumire justificată mai jos).

Cazul cel mai des întâlnit în practică fiind cel al undelor progresive reținem din soluția (III.4) numai pe cea particulară $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

Unda armonică plană corespunde situației în care sursa este un *oscilator armonic* distribuit într-un plan şi mediul este *ideal*. Soluția ecuației (III.3) poate avea una din formele:

$$f_c = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right] \text{ sau } f_s = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right] \tag{III.5}$$

unde A, ω şi φ_0 sunt constante. Dar, pentru că orice combinație liniară a acestor soluții particulare este şi ea soluție a ecuației (III.3), preferăm forma: $\Psi = f_c + if_s$.

$$\Psi(x,t) = A\exp\left\{i\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]\right\} \tag{III.5'}$$

Mărimi caracteristice undei armonice plane

1. *Faza undei* - definită ca argumentul funcției armonice, depinde de variabilele x şi t:

$$\varphi(x,t) = \omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0 \tag{III.6}$$

Faza inițială este: $\varphi_0 = \varphi(0,0)$ (III.6')

2. *Suprafața de undă* sau *suprafața echifază* este suprafața pe care faza are aceeaşi valoare la un moment dat (locul geometric al punctelor din spațiu în care faza undei este aceeaşi la un moment dat). Evident, în cazul undei plane ea este un plan. În exemplul considerat planele echifază sunt paralele cu planul yOz şi se deplasează pe axa Ox. Notăm cu $\vec{u}_x$ versorul direcției de deplasare, iar cu x distanța de la planul-origine (care conține sursa) la planul care conține punctul de observație M. Suprafața de undă cea mai avansată se numeşte *front de undă*.

3. *Viteza de fază* este viteza de deplasare a suprafeței de undă pe direcția normalei sale. Pentru unda plană obținem această viteză diferențiind relația $\varphi(x,t) = \omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0 = const.$

Rezultă:
$$v = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\varphi=const.} \tag{III.7}$$

4. *Frecvența unghiulară* (*pulsația* undei) exprimă viteza de variație a fazei şi este imprimată de către sursă:
$$\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{III.8}$$

5. *Vectorul de undă* $\vec{k}$ are direcția şi sensul normalei la suprafața echifază, iar modulul său se defineşte prin:
$$k = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} \tag{III.9}$$

În cazul undei plane studiate: $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{u}_k = \frac{\omega}{v}\vec{u}_x$ (III.9')

6. *Intensitatea undei* se defineşte prin: $I = \Psi^*\Psi$ (III.10)

Folosind expresia (III.5') rezultă: $I = A^2$ (III.10')

7. *Amplitudinea undei* se obține din relațiile (III.10) şi (III.10'):

$$A = \left(\Psi^*\Psi\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III.11)}$$

8. *Perioada* (*T*) exprimă periodicitatea în timp a funcției de undă $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x,t+T) \qquad \text{(III.12)}$$

relație din care: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (III.12')

Frecvența undei: $\upsilon = \frac{1}{T}$ (III.13)

9. *Lungimea de undă* (λ) exprimă periodicitatea în spațiu a funcției de undă $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x+\lambda,t) \qquad \text{(III.14)}$$

fiind totodată distanța parcursă de suprafața de undă în timp de o perioadă. Din condiția (III.14) rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi\, v}{\omega} = vT \qquad \text{(III.14')}$$

Din relațiile (III.9) şi (III.14') obținem: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (III.14'')

Folosind definiția (III.9), expresia (III.5) a funcției de undă devine:

$$\Psi(x,t) = A\exp\left[i\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)\right], \qquad \text{(III.15)}$$

dar forma care are sens fizic este:

$$\mathrm{Re}\,\Psi = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right) \qquad \text{(III.16)}$$

Observație: *Unda armonică plană* este un *model teoretic* deoarece nu există sursă reală care să fie uniform distribuită într-un plan, adică infinită.

Într-un sistem de coordonate orientat arbitrar față de direcția de propagare a undei în care: $r = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ sau $k_x = k\cos\alpha$, $k_y = k\cos\beta$ și $k_z = k\cos\gamma$ obținem, în locul produsului *kx* din formele (III.15) și (III.16) produsul scalar $\vec{k}\vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$, iar soluția ecuației diferențiale (III.2), pentru undă armonică plană, este:

$$\Psi(x,t) = A\exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)\right] \qquad \text{(III.17)}$$

Unda sferică se obține în cazul când *sursa* este *punctiformă*, iar mediul este *ideal* ceea ce conduce la suprafețe de undă sferice și vector de undă radial ($\vec{k}\vec{r} = kr$). Dacă, în plus, sursa este un oscilator armonic rezultă o undă armonică sferică a cărei funcție de undă are forma:

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{r}\exp\left[i\left(\omega t - kr + \varphi_0\right)\right] \qquad \text{(III.18)}$$

Amplitudinea undei $A(r) = A/r$ scade cu distanța față de sursă. Dacă distanța *r* este mult mai mare decât dimensiunile domeniului de observare din jurul punctului M (Fig. III.2) amplitudinea undei poate fi considerată constantă, iar unda sferică poate fi aproximată cu unda plană.

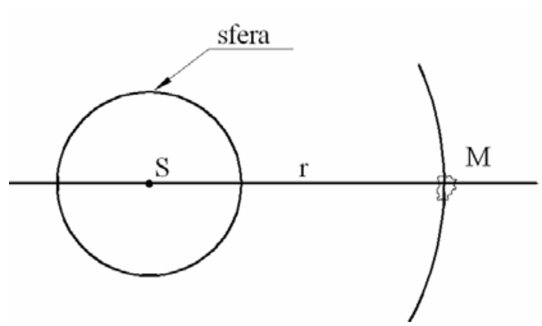


Fig. III.2 Propagarea undei sferice.

Unda cilindrică se obține în cazul când *sursa* este *liniară*, iar mediul este *ideal* ceea ce conduce la suprafețe de undă cilindrice și vector de undă radial ($\vec{k}\vec{r} = k\rho$; ρ este raza suprafeței cilindrice). Unda armonică cilindrică are forma:

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{\rho}}\exp\left[i\left(\omega t - k\rho + \varphi_0\right)\right] \qquad \text{(III.19)}$$

Amplitudinea undei $A(\rho) = \dfrac{A}{\sqrt{\rho}}$ scade cu radical din distanța față de sursă.

III.3. Unde elastice

Un *mediu elastic* este un mediu continuu format din particule care interacționează. Dacă una din ele începe să oscileze perturbația se transmite şi celorlalte.

Unda elastică reprezintă propagarea unei perturbații mecanice într-un mediu elastic, fenomenul fiind descris de variația în timp şi spațiu a unor mărimi fizice caracteristice punctelor mediului (presiune, densitate, deplasare, viteză de oscilație etc.). Pentru mărimile vectoriale unda elastică poate fi longitudinală sau transversală.

Undele elastice *nu se propagă în vid*.

III.3.1. Ecuația de propagare a undelor longitudinale

Fie un element de masă Δm, delimitat pe axa Ox între x şi $x + \Delta x$, într-un mediu solid, elastic şi ideal (Fig.III.3). În urma propagării undei elastice se produce o deplasare ξ şi o deformare a acestui element, el fiind acum delimitat de $x + \xi\,(x, t)$ şi $x + \Delta x + \xi\,(x + \Delta x, t)$; Δx este foarte mic. Masa Δm este constantă. Presiunea p se modifică cu p_u (presiunea produsă de undă), iar densitatea ρ se modifică cu ρ_u.

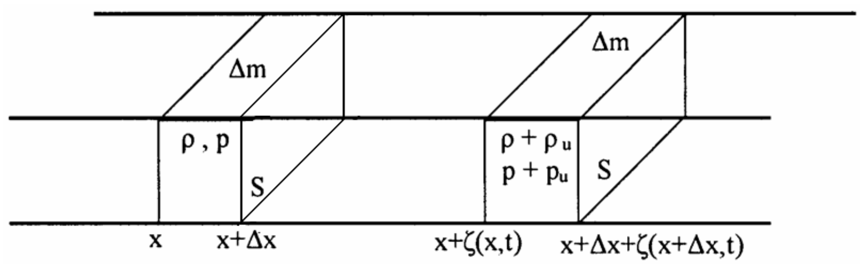


Fig. III.3. Deformarea elementului de volum ΔV în propagarea undei elastice longitudinale.

Mediul fiind elastic, este valabilă legea lui Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{III.20}$$

unde $\sigma = \dfrac{F}{S}$ = efort unitar, $\varepsilon = \dfrac{\Delta \ell}{\ell_0}$ = deformație specifică (alungire relativă), iar E este modulul de elasticitate de-a lungul axei Ox.

Dezvoltăm deplasarea $\xi\,(x + \Delta x, t)$ în serie Taylor în jurul lui x:
$\xi(x + \Delta x, t) = \xi(x, t) + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x + ...$, reținem primii doi termeni şi calculăm alungirea elementului considerat:

$$\Delta \ell = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t) \cong \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x \tag{III.21}$$

Deoarece $\ell_0 = \Delta x$ rezultă că deformația specifică este: $\varepsilon = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ (III.22)

Dezvoltăm efortul unitar σ (x + Δx, t) în serie Taylor în jurul lui x:
$\sigma(x + \Delta x, t) = \sigma(x,t) + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \Delta x + ...$, reținem primii doi termeni şi calculăm forța rezultantă care acționează asupra elementului Δm:

$$F = S[\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x,t)] \cong S\Delta x \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad \text{(III.23)}$$

Dar: $F = \Delta m \cdot a$; $\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x$, iar $a = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$; introducând aceste rezultate în relația (III.23) obținem:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{(III.24)}$$

Diferențiem legea Hooke $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ în funcție de x:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{(III.25)}$$

Relația (III.25) reprezintă ecuația de propagare a undelor elastice longitudinale şi are forma (III.3) din teoria generală a undelor. Din identificarea acestor forme rezultă viteza de propagare a undelor elastice longitudinale:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{(III.26)}$$

Pentru unda armonică plană soluția ecuației (III.25) este:

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \text{ sau } \xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \qquad \text{(III.27)}$$

care descrie

• *unda de deplasare longitudinală* (A este amplitudinea acestei unde; alegem $\varphi_0 = 0$, pentru simplificarea calculelor).

Alte mărimi fizice perturbate de unda elastică, care satisfac ecuații de tipul (III.25), sunt:
• *unda de viteză de oscilație* (u)

$$u(x,t)=\frac{\partial \xi}{\partial t}=i\omega Ae^{i(\omega t-kx)}=\omega Ae^{i\left(\omega t-kx+\frac{\pi}{2}\right)} \text{ sau } u(x,t)=-\omega A\sin(\omega t-kx) \quad \text{(III.28)}$$

unde $u_{\max}=\omega A$ este viteza maximă de oscilație a particulelor mediului (amplitudinea undei de viteză).
• *unda de accelerație (a)*

$$a(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}=-\omega^2 Ae^{i(\omega t-kx)}=\omega^2 Ae^{i(\omega t-kx+\pi)} \quad \text{(III.29)}$$

sau $$a(x,t)=-\omega^2 A\cos(\omega t-kx) \quad \text{(III.29')}$$

unde $a_{\max}=\omega^2 A$ este accelerația maximă a mişcării de oscilație a particulelor mediului (amplitudinea undei de accelerație).
• *unda de deformare elastică* (ε)

$$\varepsilon(x,t)=\frac{\partial \xi}{\partial x}=-ikAe^{i(\omega t-kx)}=kAe^{i\left(\omega t-kx-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ sau } \varepsilon(x,t)=kA\sin(\omega t-kx) \quad \text{(III.30)}$$

unde $\varepsilon_{\max}=kA$ este deformația specifică maximă a mediului (amplitudinea undei de deformare).
• *unda de presiune* (p_u)

$$p_u(x,t)=\sigma=\varepsilon E=EkAe^{i\left(\omega t-kx-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ sau } p_u(x,t)=EkA\sin(\omega t-kx) \quad \text{(III.31)}$$

unde $p_{u,\max}=EkA$ este presiunea maximă a undei elastice (amplitudinea undei de presiune).
• *unda de densitate* $(\rho_u=\rho\varepsilon)$

$$\rho_u(x,t)=\rho\varepsilon=\rho kAe^{i\left(\omega t-kx-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ sau } \rho_u(x,t)=\rho kA\sin(\omega t-kx) \quad \text{(III.32)}$$

unde $\rho_{u,\max}=\rho kA$ este densitatea maximă produsă de unda elastică (amplitudinea undei de densitate).
Observație: deplasarea longitudinală $\vec{\xi}(x,t)$, viteza de oscilație $\vec{u}(x,t)$ şi accelerația $\vec{a}$ sunt mărimi vectoriale orientate, în exemplul discutat, pe axa *Ox*.

Undele elastice longitudinale se propagă atât în solide, cât şi în lichide şi gaze.

În lichide propagarea undei elastice se produce asemănător cu cazul solidelor. În formula (III.26) a vitezei de propagare modulul de elasticitate se înlocuieşte cu coeficientul de compresibilitate $K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, deci:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{K}{\rho_{lichid}}} \tag{III.33}$$

În gaze folosim tot coeficientul de compresibilitate, *K*, dar deosebim două cazuri:
a) *proces adiabatic* (dacă frecvenţa undei este foarte mare, în timpul procesului de propagare nu are loc un transfer de căldură între gaz şi mediul înconjurător).

Diferenţiem ecuaţia procesului adiabatic $pV^{\gamma} = const.$ (γ este exponentul adiabatic). Obţinem: $Vdp + \gamma\, pdV = 0$ din care: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{Q=0} = -\frac{\gamma\, p}{V}$, apoi: $K = \gamma\, p$.

Viteza de propagare este:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_{gaz}}} \tag{III.34}$$

Folosind ecuaţia termică de stare a gazului ideal $pV = mRT/\mu$ (μ = masa molară a gazului, R = constanta gazelor ideale, T = temperatura absolută) şi $\rho_{gaz} = m/V$ obţinem: $\rho_{gaz} = \frac{p\mu}{RT}$, iar viteza de propagare devine:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{\gamma\, RT}{\mu}} \tag{III.35}$$

b) *proces izoterm* (dacă frecvenţa undei este mică putem presupune că temperatura rămâne constantă în timpul propagării).

Diferenţiem ecuaţia procesului izoterm $pV = const.$ Obţinem: $Vdp + pdV = 0$ din care: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{p}{V}$, apoi: $K = p$.

Viteza de propagare este:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{p}{\rho_{gaz}}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \tag{III.36}$$

Exemplu: sunetul este o undă elastică longitudinală; el se propagă prin comprimări şi rarefieri succesive ale mediului elastic (Fig. III. 4).

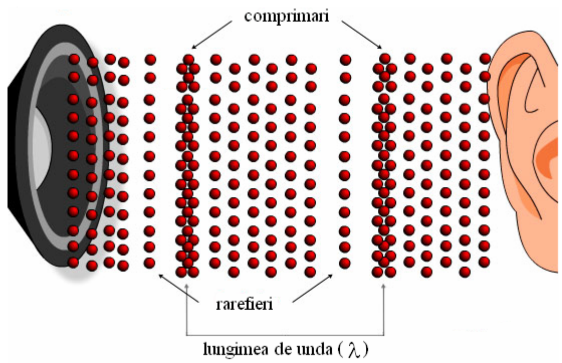


Fig. III. 4. Propagarea sunetului în aer.

III.3.2. Ecuația de propagare a undelor transversale

Fie un mediu solid, elastic şi ideal. Mai concret, considerăm o coardă elastică orientată de-a lungul axei Ox şi un element de coardă, Δx foarte mic. Masa acestui element este: $\Delta m = \rho dA \Delta x$ (dA este elementul de suprafață perpendicular pe Ox). Coarda este deformată astfel încât elementul Δx este scos din poziția de echilibru având o deplasare η pe direcția Oy (***perpendiculară*** pe Ox). Perturbația se propagă după axa Ox, antrenând şi restul corzii, deci deplasarea η depinde de coordonata x şi de timp, $\eta(x, t)$.

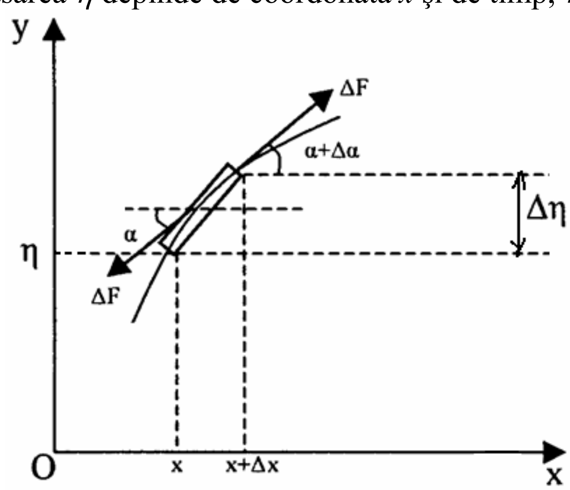


Fig. III.5. Deformarea elementului de coardă (bară) Δx în propagarea undei elastice transversale.

Conform Fig.III.5 forța rezultantă pe axa Oy este:

$$dF_y = dF[\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha] \tag{III.37}$$

Dar: $\sin\alpha \cong tg\alpha = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_x$, iar $\sin(\alpha+\Delta\alpha) \cong \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$. Dezvoltăm funcția sin (α + Δα) în serie Taylor în jurul lui *x* şi reținem primii doi termeni:

$$\sin(\alpha+\Delta\alpha) \cong \sin\alpha + \frac{\partial(\sin\alpha)}{\partial x}\cdot\Delta x \qquad \text{(III.38)}$$

adică:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_x \cdot\Delta x + ... \qquad \text{(III.38')}$$

Înlocuind în relația (III.37) obținem:

$$dF_y \cong dF\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)\cdot\Delta x \qquad \text{(III.39)}$$

Dar: $dF = \tau\, dA$, unde τ este efortul unitar tangențial. Pe de altă parte: $dF_y = \Delta m\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$.

Din aceste relații şi din (III.39) rezultă:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \qquad \text{(III.40)}$$

Relația (III.40) reprezintă ecuația de propagare a undelor elastice transversale şi are forma (III.3) din teoria generală a undelor. Din identificarea acestor forme rezultă viteza de propagare a undelor elastice transversale:

$$v_{trans} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \qquad \text{(III.41)}$$

Dar: $\tau/\rho = F_T / m_\ell$, unde F_T este forța de întindere din coardă, iar $m_\ell = m/\ell$ este masa unității de lungime.

Pentru unda armonică plană, soluția ecuației (III.40) este:

$$\vec{\eta}(x,t) = \vec{\eta}_{\max} e^{i(\omega t - kx)} \text{ sau } \vec{\eta}(x,t) = \vec{\eta}_{\max}\cos(\omega t - kx) \qquad \text{(III.42)}$$

care descrie *unda de deplasare transversală*, cu proprietatea, esențială, $\vec{\eta}\cdot\vec{k} = 0$, adică vectorul deplasare transvesală $\vec{\eta}$ este perpendicular pe vectorul de undă $\vec{k}$ (undă transversală). *Undele elastice transversale se propagă numai în solide.*

III.3.3. Mărimi energetice în unda elastică longitudinală

Propagarea undei elastice într-un mediu dat presupune un transfer continuu de energie de la sursă la mediu. Energia astfel transferată se regăseşte în mediu ca energie de mişcare a particulelor mediului în jurul poziţiilor lor de echilibru şi ca energie potenţială de deformare. Fie un element de volum Δ*V* şi masă Δ*m* = ρΔ*V* în mediul perturbat de o undă elastică longitudinală.

1) *Energia cinetică* a elementului considerat este:

$$\Delta E_c = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \omega^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \tag{III.43}$$

unde s-a folosit expresia (III.28) pentru unda de viteză de oscilaţie.

2) *Energia potenţială* a elementului considerat este: $\Delta E_p = \dfrac{k^*(\Delta \ell)^2}{2}$, unde $k^* = \dfrac{SE}{\ell_0}$ este constanta elastică, iar $\Delta \ell = \varepsilon \ell_0$.

Folosim expresia (III.30) a undei de deformare elastică şi relaţia $S\ell_0 = \Delta V$. Rezultă:

$$\Delta E_p = \frac{ES \cdot \ell_0 \varepsilon^2}{2} = \frac{E \Delta V k^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \tag{III.44}$$

Dar: $E = \rho v^2$, iar $k = \dfrac{\omega}{v}$. Relaţia (III.44) devine:

$$\Delta E_p = \frac{\rho \Delta V \omega^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \tag{III.44'}$$

Se constată că cele două energii sunt egale: $$\Delta E_c = \Delta E_p \tag{III.45}$$

3) *Energia totală* a elementului considerat este: $$\Delta W = \Delta E_c + \Delta E_p = 2\Delta E_c \tag{III.46}$$

4) *Densitatea volumică de energie* este energia cuprinsă în unitatea de volum, $w = \dfrac{\Delta W}{\Delta V}$; *w* se măsoară în J/m^3. În cazul undei elastice longitudinale, folosind (III.46) şi (III.43) în definiţia mărimii *w*, rezultă:

$$w(x,t) = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) = \rho u^2 \tag{III.47}$$

5) *Densitatea volumică* ***medie*** *de energie*, $\langle w \rangle$, reprezintă media pe o perioadă a densităţii volumice de energie:

$$\langle w\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w dt = \frac{\rho\omega^2 A^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos[2(\omega t - kx)]}{2}dt = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2} \quad \text{(III.48)}$$

În Fig.III.6 sunt reprezentate mărimile w şi $\langle w\rangle$ în funcţie de timp.

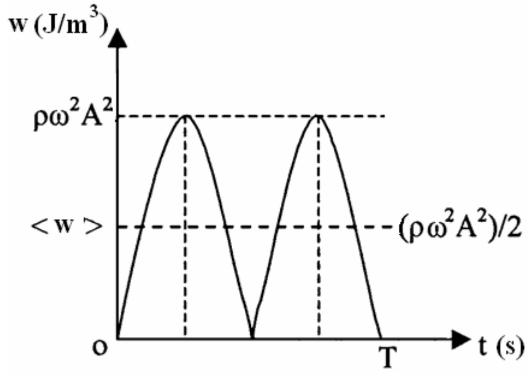


Fig. III. 6. Densitatea volumică de energie şi valoarea ei medie în funcţie de timp, pentru unda elastică longitudinală.

6) *Fluxul energetic* este energia transferată printr-o anumită suprafaţă în unitatea de timp. Se măsoară în watt (W).

$$\Phi_{en} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{(III.49)}$$

7) *Densitatea fluxului energetic*, J_{en}, este egală cu energia transferată în unitatea de timp prin unitatea de arie dispusă normal pe direcţia de transfer a energiei. Se măsoară în W/m^2.

$$J_{en} = \frac{\Delta W}{\Delta S_n \Delta t} \quad \text{(III.50)}$$

Conform Fig. III. 7:

$$J_{en} = \frac{w\Delta S_n(v\Delta t)}{\Delta S_n \Delta t} = w\cdot v \quad \text{(III.51)}$$

Vectorial:

$$\vec{J}_{en} = w\cdot\vec{v} \quad \text{(III.51')}$$

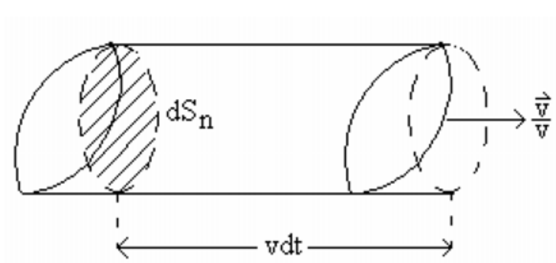


Fig. III.7. Calculul densităţii fluxului energetic pentru unda elastică longitudinală.

8) *Intensitatea undei* este media în timp de o perioadă a modulului densității fluxului de energie.

$$I = \langle J_{en} \rangle = \langle w \rangle \cdot v \tag{III.52}$$

Din relațiile (III.48) şi (III.52) rezultă: $$I = \frac{\rho\omega^2 A^2 v}{2} \tag{III.53}$$

Definim impedanța acustică a mediului (analogie cu rezistența electrică) prin:

$$Z = \rho v \tag{III.54}$$

Relația (III.53) devine: $$I = Z\omega^2 A^2 / 2\,. \tag{III.55}$$

Concluzie: Intensitatea undei depinde atât de caracteristicile sursei (A, ω), cât şi de cele ale mediului ($Z = \rho v$). Prelucrând expresia presiunii maxime: $p_{u,\max} = EkA = \rho A v\omega$, relația (III.53) devine:

$$I = \frac{p_{u,\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{u,\max}^2}{2Z} \tag{III.56}$$

III.4. Ecuația atemporală a undelor. Unde staționare

În general, mediile în care se propagă undele sunt limitate de o suprafață bine definită care le separă de exterior. *În medii limitate se formează unde staționare.*

Pentru ecuația unidimensională a undelor:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{III.57}$$

soluția, în cazul undei armonice, poate fi: $$\Psi(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \tag{III.58}$$

unde $f(x)$ este o funcție care depinde numai de coordonata x. Dorim să determinăm $f(x)$ pentru un mediu limitat. Din relațiile (III.57) şi (III.58) rezultă:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0 \tag{III.59}$$

sau $$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \tag{III.60}$$

unde $k = \dfrac{\omega}{v}$ este modulul vectorului de undă. Relația (III.60) reprezintă *ecuația atemporală a undelor* în cazul unidimensional şi, totodată o *ecuație cu valori proprii*. Soluția ei este:

$$f(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \tag{III.61}$$

unde A şi B sunt constante. Pentru a fi univoc determinată, această funcție trebuie să îndeplinească condițiile la frontieră (la limită). Aceste condiții sunt specifice fiecărui caz.

Fie ***cazul particular*** al unei *coarde elastice*, de lungime ℓ, *fixată la ambele capete*. Condițiile la limită sunt:

$$f(0) = 0 \text{ şi } f(\ell) = 0. \tag{III.62}$$

Din prima obținem $B = 0$, iar din a doua rezultă: $k\ell = n\pi$, cu n = 1, 2, 3,... din care:

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \text{ cu } n = 1, 2, 3,.... \tag{III.63}$$

Valorile k_n ale modulului vectorului de undă formează un *şir discret* şi se numesc *valori proprii*.

În mod corespunzător, obținem valori discrete pentru lungimea de undă (λ_n), pulsație (ω_n) şi frecvență (υ_n):

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}\ ; \quad \omega_n = \frac{n\pi v}{\ell};\quad \upsilon_n = \frac{nv}{2\ell} \tag{III.64}$$

Soluția $f(x)$ este, de fapt, un *şir discret de funcții* numite *funcții proprii*.

$$f_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ cu } n = 1, 2, 3,... \tag{III.65}$$

Funcțiile de undă corespunzătoare alcătuiesc şi ele un şir discret de forma:

$$\Psi_n(x,t) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\exp(i\,\omega_n\, t), \text{ cu } n = 1, 2, 3,... \tag{III.66}$$

unde $f_n(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$ este amplitudinea, dependentă de x, a funcției de undă. Amplitudinea $f_n(x)$ prezintă maxime (numite *ventre*) şi minime (numite *noduri*).

Condiția pentru maxime este: $\sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right) = \pm 1$, din care rezultă pozițiile ventrelor:

$$x_{ventru} = \frac{(2z+1)\ell}{2n}, \quad \text{cu } z \text{ număr întreg, astfel încât } x_v \in [0, \ell] \qquad \text{(III.67)}$$

dar: $\lambda_n = \dfrac{2\ell}{n}$, deci: $$x_{ventru} = \frac{(2z+1)\lambda_n}{4} \qquad \text{(III.68)}$$

Distanța dintre două ventre succesive este: $$\Delta x_v = \frac{\lambda_n}{2} \qquad \text{(III.69)}$$

Condiția pentru minime este: $\sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right) = 0$, din care rezultă pozițiile nodurilor:

$$x_{nod} = \frac{z\ell}{n}, \text{ cu } z \text{ număr întreg, astfel încât } x_{nod} \in [0, \ell] \qquad \text{(III.70)}$$

dar: $\lambda_n = \dfrac{2\ell}{n}$, deci: $$x_{nod} = \frac{z\lambda_n}{2} \qquad \text{(III.71)}$$

Distanța dintre două noduri succesive este: $\Delta x_{nod} = \dfrac{\lambda_n}{2}$, aceeaşi ca şi în cazul ventrelor.

În Fig.III.8 sunt prezentate primele şapte moduri de oscilație ale coardei vibrante fixate la ambele capete.

Concluzii referitoare la ***undele staționare*** produse în ***coarda vibrantă fixată la ambele capete***:

1. La un moment dat toate punctele coardei vibrante au aceeaşi fază, egală cu $\omega_n t$, pentru n dat [relația (III.66)].
2. Mărimile pulsație, frecvență, lungime de undă şi vector de undă (în modul) au valori care formează şiruri discrete, determinate de numărul n = 1, 2, 3,....(se spune că sunt *mărimi cuantificate*); relațiile (III.63) şi (III.64).
3. Amplitudinea undelor staționare $X_n(x)$ este o funcție periodică de poziție, maximele şi minimele ei având poziții constante în timp, pentru n dat [relațiile (III.68) şi (III.70)], ceea ce justifică denumirea de *unde staționare*.
4. Distanța dintre două ventre succesive sau două noduri succesive este: $\Delta x = \dfrac{\lambda_n}{2}$.

Exemplu: lucrarea de laborator "Interferența undelor electromagnetice".

Observație: Soluția ecuației atemporale a undelor depinde esențial de *condițiile* pe care funcția de undă trebuie să le îndeplinească *la frontieră*. Pentru coarda vibrantă fixată numai la un capăt ele sunt: $f(0) = 0$ şi $f(\ell) =$ maxim, adică: $\left[\dfrac{df}{dx}\right]_{x=\ell} = 0$. Relațiile (III.63) - (III.66) şi (III.70) au alte forme, iar (III.69) este aceeaşi.

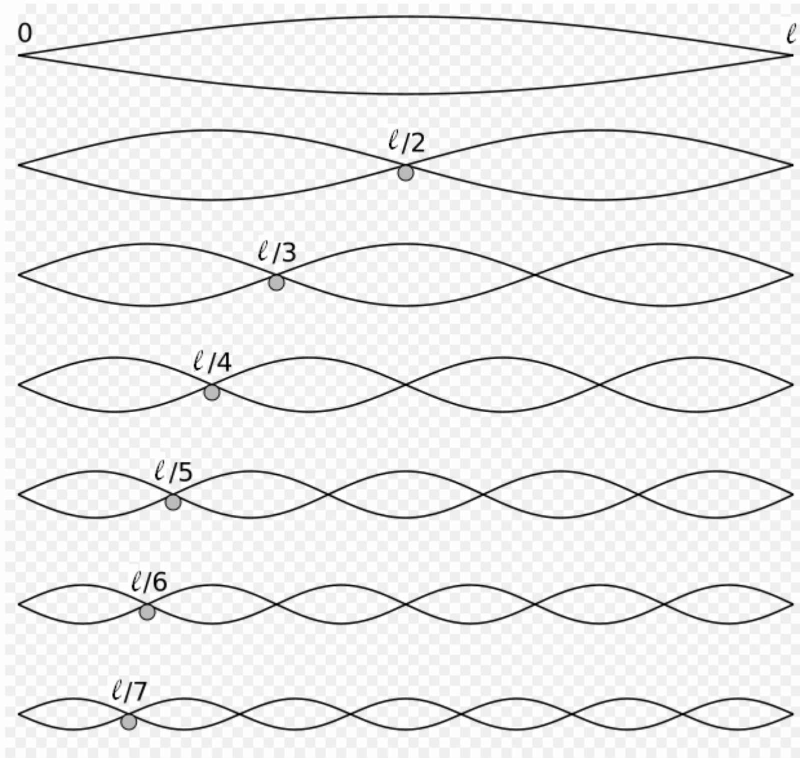


Fig.III.8 Primele şapte moduri de oscilaţie ale coardei vibrante fixate la ambele capete; $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$ cu n = {1, 2…7}.

III.5. Unde elastice produse de surse aflate în mişcare

Mişcarea sursei care produce undele elastice determină: modificarea suprafeţelor (fronturilor) de undă şi modificarea frecvenţei recepţionate de un observator.

III.5.1. *Modificarea fronturilor de undă*

Suprafaţa de undă cea mai avansată se numeşte *front de undă*. Fie o sursă punctiformă de oscilaţii aflată într-un mediu elastic, omogen şi izotrop.

Notăm: u_S^* = viteza sursei; v = viteza de propagare a undei (nu depinde de viteza sursei, ci numai de caracteristicile mediului).

Deosebim următoarele cazuri:

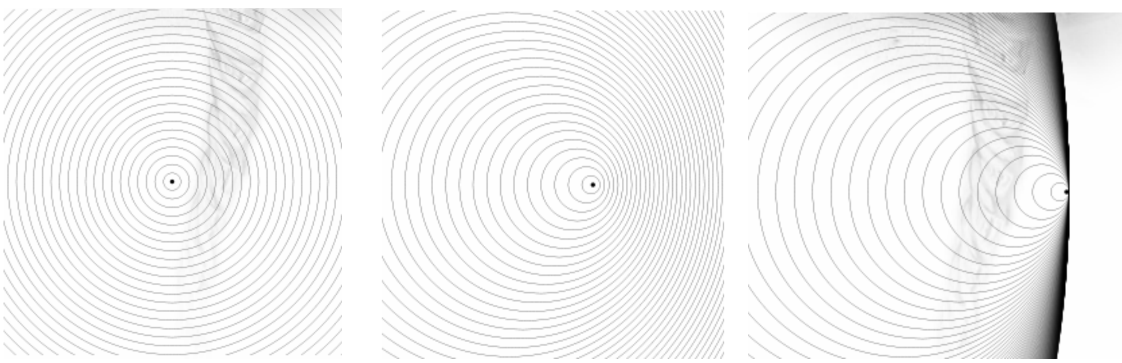
a) $u_S^* = 0$ (sursă fixă) - fronturile de undă Σ_j sunt sfere concentrice, cu centrul în sursă (Fig.III.9a);

b) $u_S^* < v$ - fronturile de undă sunt sfere cu centrele în S_1, S_2, S_3 (poziţiile succesive ale sursei) şi nu se intersectează; se produce o *apropiere a fronturilor de undă pe direcţia şi în sensul vitezei sursei* (Fig.III.9b); evident că în sensul opus (în spatele sursei) ele se depărtează;

c) $u_S^* = v$ - fronturile de undă sunt sfere de raze diferite, având un punct comun şi anume poziţia S a sursei la momentul t (Fig.III.9c); S_1, S_2, S_3 sunt poziţii anterioare ale sursei. Ca efect al suprapunerii undelor în punctul S, intensitatea şi presiunea undei cresc foarte mult, propagarea ei fiind resimţtită ca un şoc. De aceea se şi numeşte *undă de şoc*.

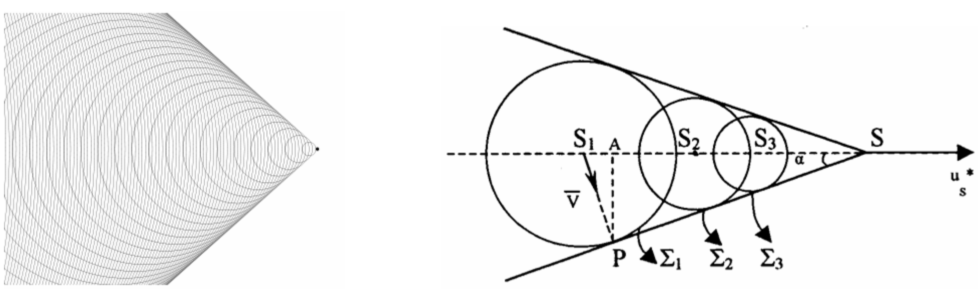
d) $u_S^* > v$ - fronturile de undă sunt cuprinse (înscrise) într-un con cu vârful în sursă (Fig.III.10). Undele produse astfel se numesc *unde balistice*.

Din Fig.III.10 rezultă $S_1S = u_S^* \cdot t$, iar $S_1P = v \cdot t$; apoi: $\sin\alpha = \dfrac{v}{u_S^*}$, unde α este jumătate din unghiul plan de la vârful conului. Raportul $\dfrac{u_S^*}{v}$>1 se numeşte *numărul lui Mach*.



a) b) c)

Fig. III. 9. Modificarea fronturilor de undă pentru unde elastice produse de surse aflate în mişcare: a) $u_S^* = 0$; b) $u_S^* < v$; c) $u_S^* = v$.



a) b)

Fig. III. 10. a) Modificarea fronturilor de undă la undele balistice (unde elastice produse de surse care se deplasează cu viteze supersonice, $u_S^* > v$); b) schema undelor balistice (aplicaţie referitoare la avionul cu reacţie).

Aplicaţie: Un avion cu reacţie zboară la înălţimea h = 6,8 km cu viteza u_S* = 500 m/s. La ce distanţă d faţă de o casă se află avionul când geamurile acesteia încep să vibreze? Viteza sunetului în aer este v = 340 m/s.

Rezolvare: Conform Fig. III.10b: SP = d; PA = h; $\sin\alpha = \frac{v}{u_S^*} = \frac{h}{d}$; $d = \frac{hu_S^*}{v}$ = 10 km.

III.5.2. *Modificarea frecvenței recepționate de un observator (efect Doppler)*

Când există o viteză relativă între sursa sonoră S *şi receptorul R frecvența* υ' *a sunetului detectat de către receptor este diferită față de frecvența* υ *măsurată în sistemul de referință al sursei.*

Considerăm *cazul particular* în care sursa şi receptorul se apropie, vitezele lor fiind pe aceeaşi direcție (*efect Doppler longitudinal*; Fig. III. 11).

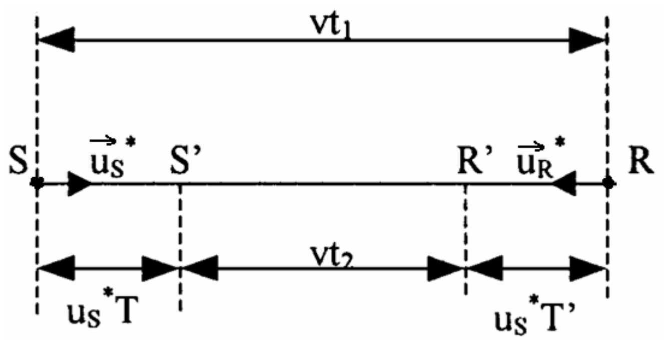


Fig. III. 11. Schemă pentru efect Doppler longitudinal, cazul în care sursa şi receptorul se apropie, pe aceeaşi direcție.

Notații: u_S^* = viteza sursei; u_R^* = viteza receptorului; v = viteza sunetului; $T = \frac{1}{\upsilon}$ = perioada sunetului emis de sursă; $T' = \frac{1}{\upsilon'}$ = perioada sunetului înregistrat de receptor; S = poziția sursei când ea emite primul sunet; S' = poziția sursei când ea emite al doilea sunet; R = poziția receptorului când el înregistrează (aude) primul sunet; R' = poziția receptorului când el înregistrează (aude) al doilea sunet. Sunt evidente relațiile:
$u_S^* \cdot T + vt_2 + u_R^* \cdot T' = v \cdot t_1$ şi $T + t_2 - t_1 = T'$; rezultă:

$$T' = T\frac{v - u_S^*}{v + u_R^*} \text{, iar pentru frecvențe: } \upsilon' = \upsilon\frac{v + u_R^*}{v - u_S^*} \qquad \text{(III.72)}$$

Pentru cazul când sursa şi receptorul se depărtează pe aceeaşi direcție obținem:

$$\upsilon' = \upsilon\frac{v - u_R^*}{v + u_S^*} \qquad \text{(IV.73)}$$

Se constată că în cazul apropierii dintre sursă şi receptor frecvența recepționată creşte ($\upsilon' > \upsilon$), iar în cazul depărtării lor frecvența recepționată scade ($\upsilon' < \upsilon$).

Exemple: a) frecvența înregistrată de un observator fix aflat într-o gară prin care trece, fără să oprească, un tren a cărui sirenă este în funcțiune: când trenul se apropie sunetul este mai acut, iar când trenul se depărtează sunetul este mai grav.

b) doi observatori aflați în repaus, unul în fața unei ambulanțe aflate în mişcare, cu sirena în funcțiune, altul în spatele ambulanței (Fig. III. 12).

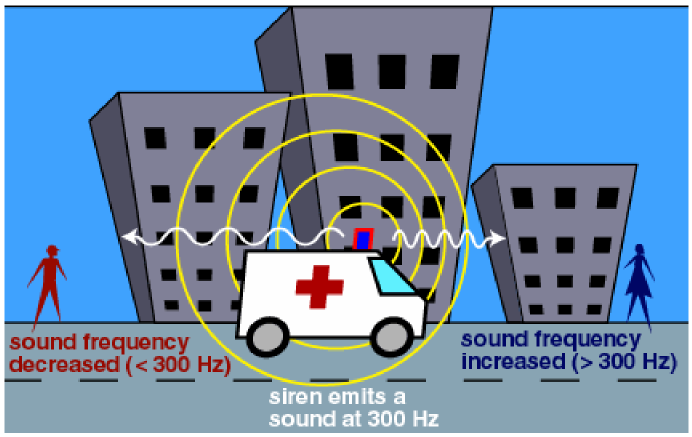


Fig. III. 12. Exemplu de efect Doppler longitudinal.

Aplicație: Un observator în repaus înregistrează sunetele emise de două diapazoane identice: unul se apropie, iar celălalt se depărtează de observator, pe aceeaşi direcție, cu viteza de 1 m/s. Frecvența sunetului fiecărui diapazon, în sistemul propriu de referință, este $\upsilon = 650$ Hz, iar $v = 340$ m/s. Să se calculeze frecvența bătăilor percepute de observator.

Rezolvare: $u_R^* = 0$; $u_S^* = 1$ m/s; din formula (III.72): $\upsilon_1 = \upsilon \dfrac{v}{v - u_S^*}$; din formula (III.73): $\upsilon_2 = \upsilon \dfrac{v}{v + u_S^*}$; frecvența bătăilor este: $\upsilon_b = \upsilon_1 - \upsilon_2 = \dfrac{2\upsilon_0 v}{v^2 - \left(u_S^*\right)^2} \cong 3{,}8$ Hz.