

CAP. II. OSCILAȚII

Se numește *proces oscilatoriu (oscilație)* variația în timp, după o lege periodică sau cvasiperiodică a mărimilor fizice caracteristice unui sistem, variație corelată cu o conversie a energiei dintr-o formă în alta.

Exemple: oscilații mecanice (sistem mecanic oscilant într-un mediu elastic), oscilații electromagnetice (într-un circuit “RLC” alimentat la tensiune sinusoidală), oscilații termice, electromecanice, magnetomecanice.

II.1. Oscilatorul liniar armonic ideal

este un punct material asupra căruia acționează o forță de tip elastic $F_e = -kx$, alte forțe posibile (de ex. forța de frecare) fiind neglijabile (Fig. II.1).

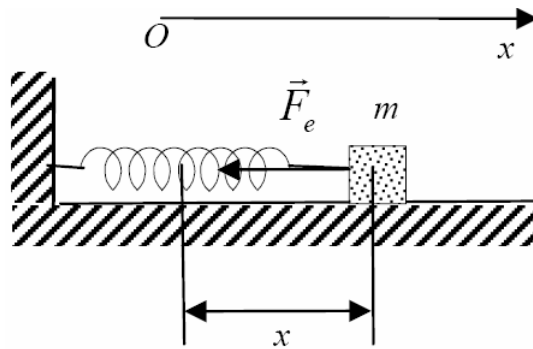


Fig. II. 1. Exemplu de oscilator liniar armonic ideal (forța de frecare este neglijabilă).

Mișcarea se produce simetric față de o *poziție de echilibru stabil* definită prin proprietatea că, în această poziție, energia potențială $U(x)$ este *minimă*. Pentru un sistem oscilator real dezvoltăm funcția $U(x)$ în serie Taylor în jurul poziției de echilibru (poziție notată, pentru simplificarea discuției, cu $x_0 = 0$).

$$U(x) = U(0) + x \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=0} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=0} + \dots \quad (\text{II.1})$$

în care: $U(0) = 0$ prin convenție, iar $\left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=0} = 0$ (condiția de minim). Rezultă:

$$U(x) \cong \frac{kx^2}{2} \quad (\text{II.2})$$

unde $k = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=0} > 0$ este constanta elastică.

Conform Fig.II.2 și relației (II.1) concordanța dintre comportarea sistemului real și rezultatele obținute din studiul modelului teoretic este bună pentru $|x|$ mic, adică în cazul micilor oscilații.

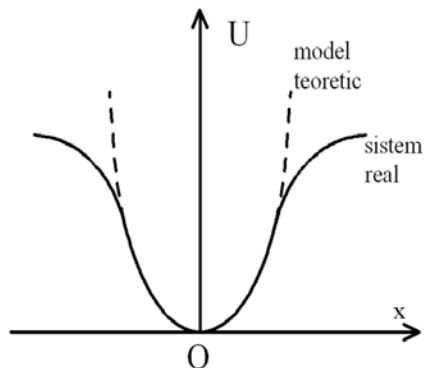


Fig. II.2 Graficul energiei potențiale pentru un oscilator liniar ideal $U(x) = kx^2 / 2$ (parabolă) și pentru unul real.

Forța care acționează asupra punctului material este:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (\text{II.3})$$

Folosind principiul fundamental al mecanicii clasice obținem ecuația de mișcare:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (\text{II.4})$$

pe care o rescriem sub forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{II.4}')$$

unde: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{II.5})$

se numește *pulsația proprie* a sistemului.

Frecvența proprie ν_0 și perioada proprie T_0 sunt:

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0} \quad (\text{II.6})$$

Ecuția (II.4') fiind o ecuație diferențială liniară, omogenă, de gradul doi, cu coeficienți constanți, are soluții de forma $x(t) \sim e^{rt}$. Rădăcinile ecuației caracteristice $r^2 + \omega_0^2 = 0$ sunt $r_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Soluția ecuației (II.4') adică *legea de mișcare a oscilatorului liniar armonic liber* este:

$$x(t) = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t) \quad (\text{II.7})$$

$$= B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t) \quad (\text{II.7'})$$

$$= A \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.7''})$$

Cele trei forme (II.7), (II.7') și (II.7'') ale legii de mișcare sunt echivalente (se obțin folosind formula Euler: $\exp(\pm i\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t)$ și alte formule trigonometrice) și conțin, evident, câte două constante (C_1, C_2 , respectiv B_1, B_2 , respectiv A, φ_0) care se determină din condițiile inițiale, adică din cunoașterea valorilor coordonatei inițiale $x(0)$ și a vitezei inițiale $v(0)$. Vom prefera, în cele ce urmează, forma (II.7'').

Mărimi caracteristice oscilatorului liniar armonic ideal

1. coordonata x se mai numește *elongație*; constanta A reprezintă valoarea maximă a elongației și se numește *amplitudine*; elongația ia valori în intervalul $[-A; +A]$.
2. mărimea $\varphi = \omega_0 t - \varphi_0$ se numește *faza oscilației*; φ_0 este *faza inițială* (la momentul $t = 0$) și depinde de alegerea originii timpului;
3. viteza de variație a fazei: $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ se numește *pulsație* (în cazul de față ω_0 , adică *pulsația proprie*);
4. viteza oscilatorului este:

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.8})$$

5. accelerația oscilatorului este:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = -\omega_0^2 x \quad (\text{II.9})$$

Din ultimele două relații rezultă: $v \in [-\omega_0 A, \omega_0 A]$ și $a \in [-\omega_0^2 A, \omega_0^2 A]$.

6. energia oscilatorului (cinetică, potențială, totală):

$$E_{\text{cinetică}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.10})$$

$$U = E_{\text{potentia}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.11})$$

$$E = E_c + U = \frac{kA^2}{2} = U_{\text{max}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = E_{c,\text{max}} = \text{const.} \quad (\text{II.12})$$

În decursul oscilației are loc transformarea energiei din cinetică în potențială și invers, dar energia totală a oscilatorului este constantă în timp (se conservă).

II.2. Oscilatorul liniar armonic amortizat

Asupra punctului material acționează forța elastică $F_e = -kx$ și o forță de rezistență $F_r = -\gamma\dot{x}$ (în mediu vâscos, la viteze mici); *coeficientul de rezistență* γ este pozitiv. Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad (\text{II.13})$$

sau:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{II.13}')$$

unde δ este *coeficientul de amortizare*: $\delta = \frac{\gamma}{2m}$ (II.14)

iar ω_0 este pulsația proprie a oscilatorului neamortizat (relația II.5). Ecuația caracteristică atașată celei diferențiale:

$$r^2 + 2r\delta + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{II.15})$$

are rădăcinile: $r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ (II.15')

Distingem trei cazuri:

a) $\delta > \omega_0$ ($|F_{\text{rezistentă}}| > |F_{\text{elastica}}|$); legea de mișcare are forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t) = \\ &= e^{-\delta t} \left[C_1 \exp\left(t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) + C_2 \exp\left(-t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Mișcarea este *aperiodică* (Fig.II.3, curba a). Forma curbei depinde și de semnul vitezei inițiale v_0 .

b) $\delta = \omega_0$; $r_{1,2} = -\delta$; legea de mișcare este:

$$x(t) = e^{-\delta t} (C_1 t + C_2) \quad (\text{II.17})$$

Mișcarea se numește *aperiodică critică* (Fig.II.3, curba b).

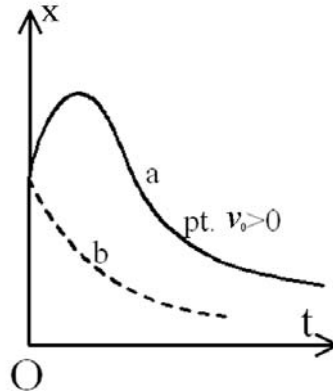


Fig. II.3 Graficul legii de mișcare $x(t)$ pentru mișcarea aperiodică când $v_0 > 0$ (curba a) și pentru cea aperiodică critică (curba b).

c) $\delta < \omega_0$ ($|F_{rezistentă}| < |F_{elastica}|$); rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere complexe: $r_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Folosind notația:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\text{II.18})$$

obținem forma legii de mișcare:

$$x(t) = e^{-\delta t} [C_1 \exp(i\omega_a t) + C_2 \exp(-i\omega_a t)] =$$

$$= e^{-\delta t} [B_1 \cos(\omega_a t) + B_2 \sin(\omega_a t)]$$

sau: $x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi_a) \quad (\text{II.19})$

Mișcarea este *oscilatorie armonică amortizată* cu pulsația ω_a (dată de relația II.18) și *amplitudinea descrescătoare exponențial în timp*. A_0 și φ_a sunt constante care se determină din condițiile inițiale. Legea de mișcare (II.19) este reprezentată în Fig.II.4.

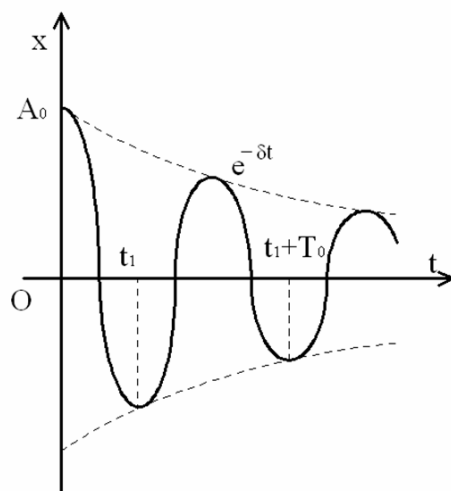


Fig. II.4 Graficul legii de mișcare $x(t)$ pentru oscilatorul liniar armonic amortizat.

Mărimi caracteristice oscilatorului liniar armonic amortizat:

1. pulsația oscilatorului amortizat (pseudopulsația): $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$
Pentru oscilator slab amortizat ($\delta \ll \omega_0$) pseudopulsația devine: $\omega_a \cong \omega_0$.
2. amplitudinea (pseudoamplitudinea):

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (\text{II.20})$$

3. durata de relaxare (τ) este timpul după care amplitudinea scade de e ori; din condiția: $A(\tau) = A_0 / e$ rezultă: $\tau = 1/\delta$ (II.21)

4. decrementul logaritmic (Λ) este logaritmul natural al raportului dintre amplitudinea la momentul t și amplitudinea la momentul $t + T$:

$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (\text{II.22})$$

Prelucrând definiția (II.22) obținem:

$$\Lambda = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (\text{II.23})$$

5. factorul de calitate (Q) stabilește gradul de atenuare energetică a oscilației, fiind definit prin raportul dintre energia oscilatorului (E) și energia disipată prin frecare într-o perioadă (E_d), raport multiplicat cu 2π :

$$Q = 2\pi \frac{E}{P_d T_a} \quad (\text{II.24})$$

unde P_d este puterea disipată prin frecare. Am arătat că, pentru oscilatorul liniar armonic liber, energia este direct proporțională cu pătratul amplitudinii (II.12), proprietate care se menține și la oscilatorul liniar armonic amortizat: $E \sim A^2$. Rezultă:

$$E = E_0 e^{-2\delta t} \quad (\text{II.25})$$

unde $E_0 = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2}$ este energia inițială.

Puterea disipată prin frecare într-un mediu vâscos este:

$$P_d = -\frac{dE}{dt} = 2\delta E_0 e^{-2\delta t} = 2\delta E \quad (\text{II.26})$$

Obținem:

$$Q = \frac{2\pi E}{2\delta E T_a} = \frac{\omega_a}{2\delta} \quad (\text{II.27})$$

Pentru un oscilator slab amortizat ($\delta \ll \omega_0$) rezultă:

$$Q \cong \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\text{II.27'})$$

Aplicație: Fie un oscilator liniar în mediu vâscos; amplitudinea inițială este $A_0 = 10,3$ cm; după $t = 10T_a$ amplitudinea oscilațiilor scade de 10 ori; $T_a = 2$ s. A alegem ca origine a timpului momentul în care oscilatorul trece prima dată prin poziția de echilibru. Să se determine: a) coeficientul de amortizare și decrementul logaritmic; b) coeficientul de vâscozitate al mediului (η), considerând că forța de rezistență din partea mediului are forma Stokes: $\vec{F}_r = -6\pi\eta R\vec{v}$, unde R este raza bilei oscilatorului ($R = 15$ mm); densitatea bilei este 7800 kg/m³; c) soluția ecuației de mișcare.

Rezolvare: a) $A(t) = A_0 e^{-\delta t} = A_0 / 10$; $\delta = 0,115 \text{ s}^{-1}$; $\Lambda = \delta T_a = 0,23$; b) $F_r = -\gamma\dot{x} = -6\pi\eta Rv$; deci: $\gamma = 6\pi\eta R$; dar: $\gamma = 2m\delta$ și $m = 4\pi\rho R^3 / 3$; rezultă: $\eta = 4\delta\rho R^2 / 9 = 0,0897 \text{ kg/(m.s)}$;

c) $x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi_a)$; $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \pi \text{ s}^{-1}$; $x(0) = 0$ implică $\cos\varphi_a = 0$, deci:

$\varphi_a = \pm\pi/2$; rezultă: $x(t) = 10,3 e^{-0,115t} \cos(\pi t \pm \pi/2)$ cm.

II.3. Oscilatorul liniar armonic amortizat și forțat (întreținut)

Pe lângă forța elastică $F_e = -kx$ și forța de rezistență $F_r = -\gamma\dot{x}$, asupra oscilatorului acționează o forță exterioară periodică $F_{ext} = F_0 e^{i\omega t}$, unde F_0 este amplitudinea forței, iar ω este pulsația ei.

Ecuția de mișcare este:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.28})$$

sau:
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (\text{II.28'})$$

Ecuția (II.28') este o ecuație diferențială liniară neomogenă, de gradul 2, cu coeficienți constanți. Soluția ei este suma dintre soluția ecuației omogene, dată de relația (II.19), și o soluție particulară a ecuației neomogene, de forma termenului liber, $x_{neomog}(t) = B e^{i\omega t}$.

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi_a) + B e^{i\omega t} \quad (\text{II.29})$$

Pentru $t < \tau$ soluția (II.29) descrie regimul tranzitoriu, iar pentru $t \gg \tau$ neglijăm $x_{omog}(t)$ (deoarece scade exponențial în timp) și obținem soluția care descrie regimul permanent.

$$x_p(t) \cong B e^{i\omega t} \quad (\text{II.30})$$

Înlocuind în relația (II.28) obținem:

$$B = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} \quad (\text{II.31})$$

Constanta complexă B se scrie sub forma:

$$B = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} = a + ib = C e^{-i\varphi_1} \quad (\text{II.32})$$

unde $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $\text{tg}\varphi_1 = -b/a$ (semnul "-" la faza constantei B este o convenție).
Rezultă:

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{II.33})$$

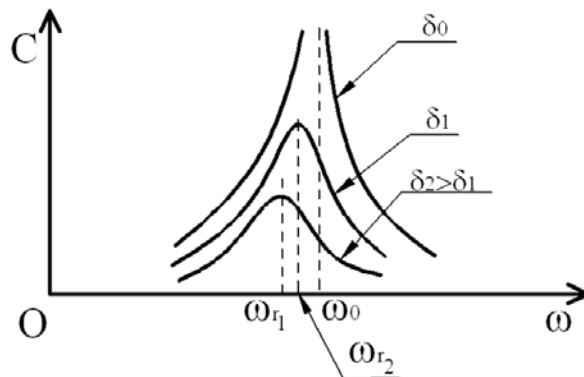


Fig. II.6 Dependența amplitudinii oscilațiilor întreținute de pulsația forței periodice, în regim permanent

II.4. Oscilații electromagnetice. Analogia mecano-electromagnetică

Fie un circuit RLC (format dintr-o bobină reală, de rezistență R și inductanță L , și condensator ideal, de capacitate C). Folosind montajul din Fig.II.7 încărcăm condensatorul de la o sursă de tensiune continuă U_0 (comutatorul k pe poziția 1), apoi îl conectăm în serie cu bobina (comutatorul k pe poziția 2).

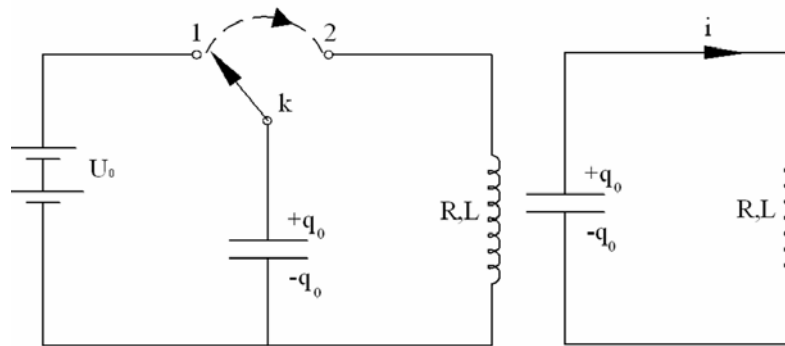


Fig. II.7 Circuitul RLC în care se produc oscilații electromagnetice amortizate dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ se obțin oscilații ale sarcinii electrice de pe fiecare armătură a condensatorului și, de asemenea, oscilații ale intensității curentului electric. Amplitudinea lor scade datorită transformării energiei electromagnetice în căldură (efect Joule), deci oscilațiile sunt amortizate.

În ochiul de circuit RLC aplicăm teorema Kirchhoff pentru valori instantanee ale căderilor de tensiune:

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (\text{II.38})$$

Folosind relațiile:

$$u_C = \frac{q}{C}; \quad u_R = iR; \quad i = \frac{dq}{dt}; \quad u_L = -e_{\text{autoindusa}} = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (\text{II.39})$$

rezultă:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$\text{sau: } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (\text{II.40}')$$

Folosind notațiile: $\frac{R}{L} = 2\delta$ și $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ obținem:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{II.41})$$

adică o ecuație de aceeași formă cu (II.13').

Pentru cazul $\delta < \omega_0$ (adică $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, după prelucrare), soluția este:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi_a) \quad (\text{II.42})$$

de aceeași formă cu (II.19); $q_0 = CU_0$ este sarcina electrică inițială a condensatorului.

Pulsația oscilației amortizate este:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (\text{II.43})$$

Pulsația proprie a circuitului este:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{II.44})$$

Expresia intensității curentului este:

$$i(t) = -q_0 \delta e^{-\delta t} \cos(\omega_a t - \varphi_a) - q_0 \omega_a e^{-\delta t} \sin(\omega_a t - \varphi_a) \quad (\text{II.45})$$

Cazuri particulare:

a) Dacă $R = 0$ (*caz ideal*) se obțin în circuitul LC *oscilații electromagnetice armonice libere* descrise de ecuația:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{II.46})$$

cu soluția:

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.47})$$

Intensitatea curentului este:

$$i(t) = -\omega_0 q_{\max} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.48})$$

Energia circuitului oscilant LC este:

$$W_{\text{electric}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.49})$$

$$W_{\text{magnetic}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (\text{II.50})$$

$$W = W_{\text{electric}} + W_{\text{magnetic}} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{II.51})$$

b) Pentru *oscilații electromagnetice întreținute* este necesară o sursă de tensiune alternativă sinusoidală $u = U_0 e^{i\omega t}$. În regim permanent, sarcina electrică a condensatorului variază conform relației:

$$q_{\text{perm}}(t) \cong Q_{\max}(\omega) e^{i(\omega t - \varphi_1)} \quad (\text{II.52})$$

Analogia mecano-electromagnetică

Mărimi fizice pentru oscilator mecanic

masa (m)
 constanta elastică (k)
 coeficientul de rezistență (γ)
 elongația (x)
 viteza ($v = \dot{x}$)
 accelerația ($a = \ddot{x}$)
 forța (F)

- elastică ($F_e = -kx$)
- de rezistență ($F_r = -\gamma\dot{x}$)

 energia potențială ($E_p = kx^2/2$)
 energia cinetică ($E_c = mv^2/2$)
 pulsația proprie ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$)
 coeficientul de amortizare ($\delta = \frac{\gamma}{2m}$)
 pseudopulsația ($\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$)
 ecuația oscilatorului amortizat
 $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
 ecuația oscilatorului întreținut
 $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$

Mărimi fizice pentru oscilator electromagnetic

inductanța (L)
 inversul capacității electrice ($1/C$, elastața)
 rezistența electrică (R)
 sarcina electrică (q)
 intensitatea curentului electric ($i = \dot{q}$)
 viteza de variație a intensității ($\frac{di}{dt}$)
 tens. electrică instantanee (u)

- tens. inst. pe condensator
- tens. inst. pe rezistență (u_R)

 energ. cp. electr. ($W_e = q^2/2C$)
 energ. cp. magn. ($W_m = Li^2/2$)
 pulsația proprie ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)
 coef. de amortizare ($\delta = \frac{R}{2L}$)
 $\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
 ecuația oscilatorului amortizat
 $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$
 ecuația oscilatorului întreținut
 $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} e^{i\omega t}$

II.5. Compunerea oscilațiilor armonice

II.5.1. Compunerea a două oscilații paralele, de aceeași pulsație

Un punct material de masă m este supus simultan acțiunii forțelor $F_1 = -kx_1$ și $F_2 = -kx_2$. Fiecare forță produce câte o oscilație armonică de pulsație $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ecuațiile lor sunt:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_{01}) \text{ și } x_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_{02}) \quad (\text{II.52})$$

Oscilația rezultantă se obține prin însumarea celor două oscilații armonice și, în mod evident, are tot formă armonică:

$$x(t) = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (\text{II.53})$$

Prelucrând relațiile (II.52) și (II.53) obținem:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\omega t) \cos \varphi_{01} + A_1 \sin(\omega t) \sin \varphi_{01} + \\ & + A_2 \cos(\omega t) \cos \varphi_{02} + A_2 \sin(\omega t) \sin \varphi_{02} = \\ & = A \cos(\omega t) \cos \varphi_0 + A \sin(\omega t) \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (\text{II.53'})$$

Condiția (II.53') este îndeplinită la orice moment t dacă:

$$\begin{aligned} A \cos \varphi_0 &= A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02} \\ A \sin \varphi_0 &= A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Prin ridicarea la pătrat a celor două relații (II.54) și adunarea pătratelor obținem pătratul amplitudinii oscilației rezultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \quad (\text{II.55})$$

Prin împărțirea relațiilor (II.54) rezultă tangenta fazei inițiale a oscilației rezultante:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \quad (\text{II.56})$$

Cazuri particulare:

a) Dacă $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = 2z\pi$, cu z număr întreg, cele două oscilații sunt în concordanță de fază și $A = A_{\max} = A_1 + A_2$;

b) Dacă $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = (2z+1)\pi$, cu z număr întreg, cele două oscilații sunt în opoziție de fază și $A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$, iar pentru $A_1 = A_2$, $A_{\min} = 0$;

c) Dacă $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = (2z+1)\pi/2$, cu z număr întreg, cele două oscilații sunt în cuadratură de fază și $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

II.5.2. Compunerea a două oscilații paralele având pulsații apropiate (fenomenul de bătăi)

Un punct material de masă m este supus simultan acțiunii forțelor $F_1 = -k_1x_1$ și $F_2 = -k_2x_2$. Fiecare forță produce câte o oscilație armonică de pulsații $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_{1,2}}{m}}$.

Cele două oscilații sunt descrise de ecuațiile:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_{01}) \text{ și } x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_{02}) \quad (\text{II.57})$$

$$\text{Folosind notațiile: } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ și } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\varepsilon \quad (\text{II.58})$$

unde $\varepsilon > 0$ și $\varepsilon \ll \omega$ obținem:

$$\omega_1 = \omega + \varepsilon \text{ și } \omega_2 = \omega - \varepsilon. \quad (\text{II.59})$$

Însumăm elongațiile celor două oscilații paralele:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos[\omega t - (\varphi_{01} - \varepsilon t)] + A_2 \cos[\omega t - (\varphi_{02} + \varepsilon t)] \quad (\text{II.60})$$

Considerăm oscilația rezultantă de forma:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t - \varphi_0(t)) \quad (\text{II.60}')$$

Identificând coeficienții funcțiilor $\cos(\omega t)$ și $\sin(\omega t)$ din relațiile (II.60) și (II.60') obținem:

$$\begin{aligned} A \cos \varphi_0 &= A_1 \cos(\varepsilon t - \varphi_{01}) + A_2 \cos(\varepsilon t + \varphi_{02}) \\ A \sin \varphi_0 &= A_1 \sin(\varepsilon t - \varphi_{01}) + A_2 \sin(\varepsilon t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

Prin ridicarea la pătrat a celor două relații (II.61) și adunarea pătratelor rezultă:

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2\varepsilon t + \varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad (\text{II.62})$$

Prin împărțirea relațiilor (II.61) obținem:

$$\operatorname{tg} \varphi_0(t) = \frac{-A_1 \sin(\varepsilon t - \varphi_{01}) + A_2 \sin(\varepsilon t + \varphi_{02})}{A_1 \cos(\varepsilon t - \varphi_{01}) + A_2 \cos(\varepsilon t + \varphi_{02})} \quad (\text{II.63})$$

Concluzii:

a) Amplitudinea oscilației rezultante și faza ei inițială depind de timp (relațiile II.62 și II.63), deci *oscilația nu mai este armonică*. Deoarece $\varepsilon \ll \omega$ mărimile $A(t)$ și $\varphi_0(t)$ *variază lent în timp*. Se spune că procesul oscilatoriu rezultat este *modulat* atât în amplitudine cât și în fază.

b) Pătratul amplitudinii rezultante $A^2(t)$ variază între $A_{\max}^2 = (A_1 + A_2)^2$ pentru $2\varepsilon t + \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2z\pi$, cu z număr întreg, și $A_{\min}^2 = (A_1 - A_2)^2$ pentru $2\varepsilon t + \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2z+1)\pi$, cu z număr întreg. Fenomenul oscilator în care se produc periodic maxime și minime ale pătratului amplitudinii poartă numele de *bătăi* (Fig.II.8).

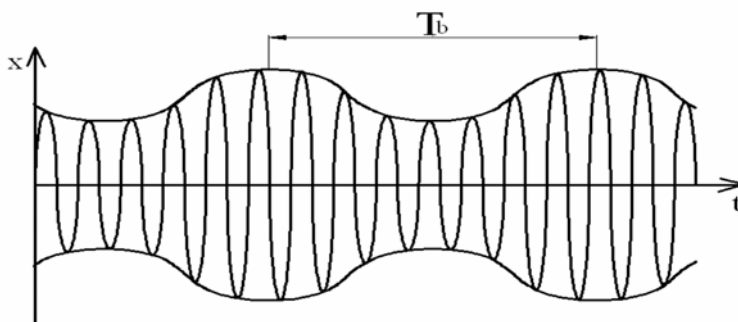


Fig. II.8 Graficul legii de mișcare $x(t)$ pentru fenomenul de bătăi (T_b este perioada bătăilor).

c) *Perioada bătăilor* T_b este intervalul de timp dintre momentele în care se obțin valori maxime succesive ale pătratului amplitudinii (sau valori minime succesive). Din relațiile:

$$2\varepsilon t + \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2z\pi \quad \text{și} \quad 2\varepsilon t + \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2(z+1)\pi \quad (\text{II.64})$$

rezultă:

$$T_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (\text{II.65})$$

Exemple: 1) Fie două diapazoane; dacă frecvențele lor, ν_1 și ν_2 , diferă cu mai mult de 6% din $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ urechea umană (și creierul uman) sesizează un sunet total format din două note separate, de înălțimi (frecvențe) puțin diferite (dacă $\nu_1 = 5\nu_2/4$ se aud două note la interval de terță majoră); dacă ν_1 și ν_2 diferă cu mai puțin de 10 Hz urechea înregistrează un sunet de înălțime unică, dată de $\nu_b = 1/T_b$; urechea este un *detector pătratic* deoarece înregistrează pătratul amplitudinii (deci intensitatea sunetului) și nu amplitudinea.

2) Fie două semnale luminoase; atomul de mercur emite o radiație verde intensă, formată, în realitate, din două radiații cu frecvențe foarte apropiate (doublet); ele se văd separat dacă atomul se află în câmp magnetic; folosind o celulă fotoelectrică (care este un detector pătratic) se înregistrează maxime și minime ale intensității luminoase.

Caz particular: Pentru $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ și $A_1 = A_2 = A_0$ formulele (II.62) și (II.63) conduc la:

$$A(t) = 2A_0 \cos(\varepsilon t) \quad \text{și} \quad \varphi_0 = 0, \quad \text{iar ecuația bătăilor (II.60') devine:}$$

$$x(t) = 2A_0 \cos(\varepsilon t) \cos(\omega t).$$

II.5.3. *Compunerea a două oscilații perpendiculare, de aceeași pulsație*

Un punct material de masă m este supus simultan acțiunii forțelor $F_x = -kx$ și $F_y = -ky$. Fiecare forță produce câte o oscilație armonică, de pulsație $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ecuțiile lor sunt:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad \text{și} \quad y(t) = B \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (\text{II.66})$$

Eliminăm timpul între relațiile (II.66):

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t) \quad \text{și} \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t) \cos \varphi_0 + \sin(\omega t) \sin \varphi_0 \quad (\text{II.66'})$$

Obținem:
$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (\text{II.66''})$$

Ridicăm la pătrat (după ce “izolăm” în membrul drept termenul care conține radical) și ordonăm:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0 \quad (\text{II.67})$$

Relația (II.67) reprezintă ecuația traiectoriei punctului material, adică o elipsă de semiaxe A și B , rotită, față de axa Ox (Fig.II.9), cu unghiul θ , dat de formula:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2AB \sin \varphi_0}{A^2 - B^2} \quad (\text{II.68})$$

Elipsa este înscrisă într-un dreptunghi de laturi $2A$ și $2B$ ($-A \leq x \leq A; -B \leq y \leq B$). Procesul periodic rezultat poartă numele de *oscilație eliptic polarizată*.

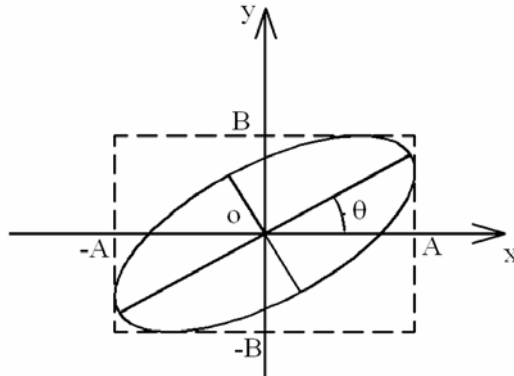


Fig. II.9 Traiectoria unui punct material rezultată prin compunerea a două oscilații perpendiculare, de aceeași pulsație (oscilație eliptic polarizată).

Cazuri particulare:

a) $\varphi_0 = 2z\pi$, cu z număr întreg, adică oscilațiile componente $x(t)$ și $y(t)$ sunt în concordanță de fază; traiectoria punctului material este, în acest caz, o dreaptă care trece prin originea

$$O; \quad y = \frac{B}{A}x \quad (\text{II.69})$$

Procesul periodic rezultat poartă numele de *oscilație liniar polarizată*.

b) $\varphi_0 = (2z+1)\pi/2$, cu z număr întreg, adică oscilațiile componente $x(t)$ și $y(t)$ sunt în cuadratură de fază; traiectoria punctului material este acum o elipsă având axele Ox , Oy ;

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{II.70})$$

“Oscilația” rezultantă este *eliptic polarizată*. Pentru z par (de ex. $\varphi_0 = \pi/2$) elipsa este parcursă în sensul acelor de ceasornic (sens orar), iar oscilația se numește *polarizată dreapta*. Pentru z impar (de ex. $\varphi_0 = 3\pi/2$) elipsa este parcursă în sens trigonometric (sens antiorar), iar oscilația se numește *polarizată stânga*. Dacă, în plus, $A = B$ (amplitudinile oscilațiilor componente sunt egale) traiectoria punctului material este un cerc cu centrul în originea O și raza A .

$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (\text{II.70}')$$

Oscilația este *circular polarizată* (dreapta sau stânga, după sensul de parcurs).

c) $\varphi_0 = (2z+1)\pi$, cu z număr întreg, adică oscilațiile componente $x(t)$ și $y(t)$ sunt în opoziție de fază sau în antifază; traiectoria punctului material este, în acest caz, o dreaptă care trece prin originea O ;

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (\text{II.71})$$

Oscilația este *liniar polarizată*.

Pentru φ_0 cuprins între 0 și $3\pi/2$ traiectoriile punctului material sunt reprezentate în Fig.II.10.

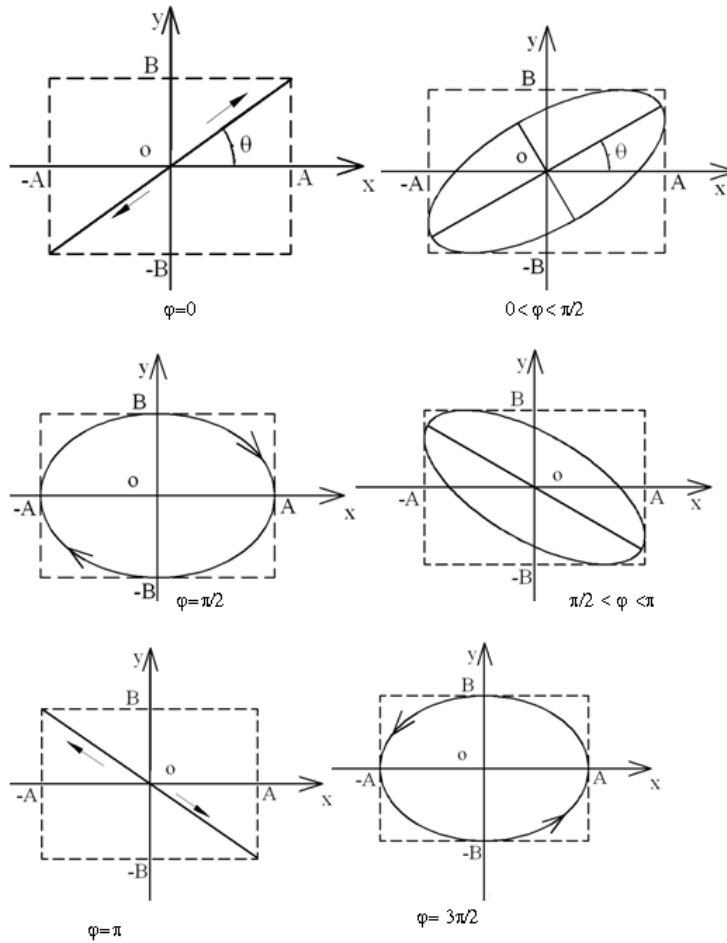


Fig. II.10 Traiectoria unui punct material rezultată prin compunerea a două oscilații perpendiculare, de aceeași pulsație, pentru diferite valori ale defazajului φ (cazuri particulare ale oscilației eliptic polarizate).

II.5.3. Compunerea a două oscilații perpendiculare având pulsații diferite

Un punct material de masă m este supus simultan acțiunii forțelor $F_1 = -k_1 x$ și $F_2 = -k_2 y$. Fiecare forță produce câte o oscilație armonică pulsațiile fiind $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, respectiv $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$. Ecuațiile oscilațiilor sunt:

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad \text{și} \quad y(t) = B \cos(\omega_2 t - \varphi_0) \quad (\text{II.72})$$

În cazul general se obține o curbă complicată, închisă sau deschisă, dar mereu înscrisă în dreptunghiul de laturi $2A$ și $2B$ ($-A \leq x \leq A; -B \leq y \leq B$). Pentru a obține o *curbă închisă* trebuie ca funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ să aibă aceeași perioadă, adică:

$$x(t+T') = x(t) \text{ și } y(t+T') = y(t) \quad (\text{II.73})$$

Rezultă: $T' = n_1 T_1 = n_2 T_2$ (II.74)

unde n_1 și n_2 sunt numere naturale (1, 2, 3,...). Relația (II.73) se rescrie sub forma:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2} = \text{număr rațional.} \quad (\text{II.74'})$$

Forma curbei rezultante depinde de raportul ω_2 / ω_1 , dar și de defazajul φ_0 . Aceste curbe se numesc *figuri Lissajous* (Fig.II.11).

II.6. Oscilații anarmonice

Un proces periodic nearmonic se descompune în serie Fourier obținându-se un spectru discret de frecvențe. *Teorema Fourier: Orice funcție periodică poate fi reprezentată printr-o sumă (serie) de funcții armonice simple (cosinusoidale sau sinusoidale) având amplitudini diferite, iar ca pulsații posibile valorile discrete: $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$.*

Funcția periodică $f(t) = f(t+T)$ se scrie ca:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{II.74})$$

Coefficienții sunt: $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \text{media funcției } f(t) \text{ pe o perioadă}$ (II.75)

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\text{II.76})$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{II.77})$$

unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, iar în relațiile (II.76) și (II.77) $n = 1, 2, 3, \dots$. Frecvența minimă $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ se numește *frecvență fundamentală*, iar celelalte frecvențe, $\nu_n = n\nu$, se numesc *armonice*.

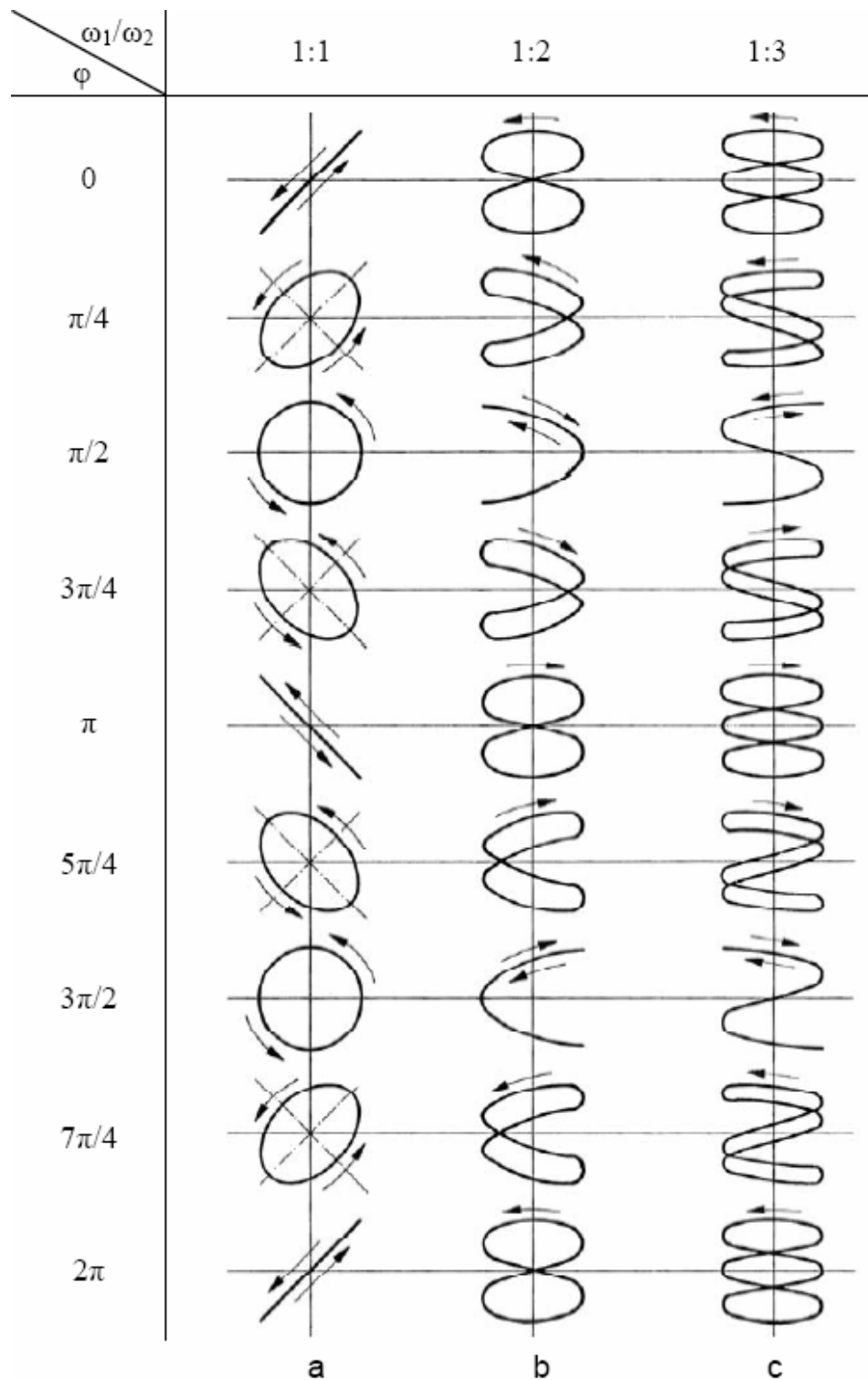
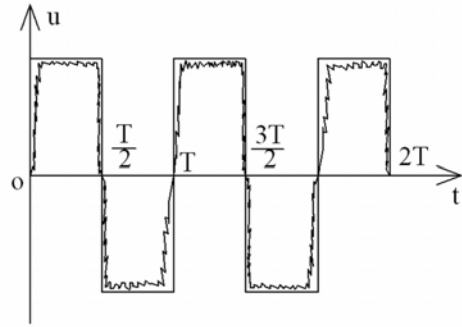


Fig. II.11 Exemple de figuri Lissajous (compunerea a două oscilații perpendiculare având pulsațiile în raportul $\omega_2 / \omega_1 =$ număr rațional).

Exemplu de oscilație anarmonică:

Un semnal de tensiune electrică având forma unui puls rectangular este descris de funcția:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{pentru } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -U_0 & \text{pentru } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (\text{II.78})$$



Din relațiile (II.75) - (II.77) rezultă: $A_0 = 0$, $A_n = 0$

și

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t) dt - \frac{2U_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \sin(n\omega t) dt = \\ &= \frac{2U_0}{Tn\omega} \left[\cos 0 - \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) + \cos(n\omega T) \right] = \frac{2U_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

Pentru n impar: $B_n = \frac{4U_0}{n\pi}$, iar pentru n par: $B_n = 0$. Rezultă:

$$u(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4U_0}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4U_0}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \quad (\text{II.80})$$

Se observă că ponderea armonicelor scade pe măsură ce pulsația crește, deci, pentru calculul circuitelor electronice (unde se aplică această descompunere în serie Fourier), se rețin primii doi sau trei termeni.