CAP. IV. UNDE ELASTICE

Un *mediu elastic* este un mediu continuu format din particule care interacționează. Dacă una din ele începe să oscileze perturbația se transmite şi celorlalte.

Unda elastică reprezintă propagarea unei perturbații mecanice într-un mediu elastic, fenomenul fiind descris de variația în timp şi spațiu a unor mărimi fizice caracteristice punctelor mediului (presiune, densitate, deplasare, viteză de oscilație etc.). Pentru mărimile vectoriale unda elastică poate fi longitudinală sau transversală.

Undele elastice *nu se propagă în vid*.

IV.1. Ecuația de propagare a undelor longitudinale

Fie un element de masă Δm, delimitat pe axa Ox între x şi $x + \Delta x$, într-un mediu solid, elastic şi ideal (Fig.IV.1). În urma propagării undei elastice se produce o deplasare ξ şi o deformare a acestui element, el fiind acum delimitat de $x + \xi\,(x, t)$ şi $x + \Delta x + \xi\,(x + \Delta x, t)$; Δx este foarte mic. Masa Δm este constantă. Presiunea p se modifică cu p_u (presiunea produsă de undă), iar densitatea ρ se modifică cu ρ_u.

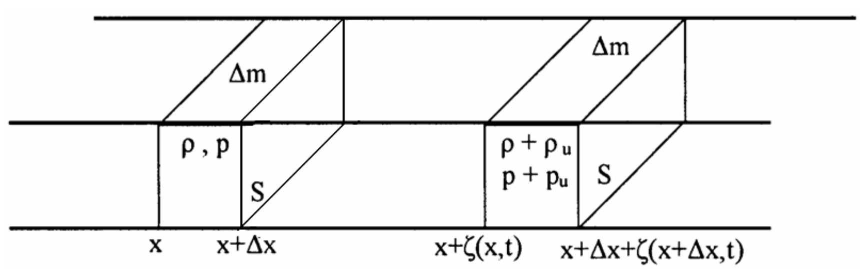


Fig. IV.1. Deformarea elementului de volum ΔV în propagarea undei elastice longitudinale.

Mediul fiind elastic, este valabilă legea lui Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \text{(IV.1)}$$

unde $\sigma = \dfrac{F}{S}$ = efort unitar, $\varepsilon = \dfrac{\Delta \ell}{\ell_0}$ = deformație specifică (alungire relativă), iar E este modulul de elasticitate de-a lungul axei Ox.

Dezvoltăm deplasarea $\xi\,(x + \Delta x, t)$ în serie Taylor în jurul lui x:
$\xi(x + \Delta x, t) = \xi(x, t) + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x + ...$, reținem primii doi termeni şi calculăm alungirea elementului considerat:

$$\Delta\ell = \xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t) \cong \frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\Delta x \tag{IV.2}$$

Deoarece $\ell_0 = \Delta x$ rezultă că deformația specifică este: $\varepsilon = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ (IV.3)

Dezvoltăm efortul unitar σ (x + Δx, t) în serie Taylor în jurul lui x:
$\sigma(x+\Delta x,t) = \sigma(x,t) + \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot\Delta x + ...$, reținem primii doi termeni şi calculăm forța rezultantă care acționează asupra elementului Δm:

$$F = S[\sigma(x+\Delta x,t) - \sigma(x,t)] \cong S\Delta x\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x} \tag{IV.4}$$

Dar: $F = \Delta m\cdot a$; $\Delta m = \rho\Delta V = \rho S\Delta x$, iar $a = \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$; introducând aceste rezultate în relația (IV.4) obținem:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{IV.5}$$

Diferențiem legea Hooke $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ în funcție de x:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{IV.6}$$

Relația (IV.6) reprezintă ecuația de propagare a undelor elastice longitudinale şi are forma (III.3) din teoria generală a undelor. Din identificarea acestor forme rezultă viteza de propagare a undelor elastice longitudinale:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{IV.7}$$

Pentru unda armonică plană soluția ecuației (IV.6) este:

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \text{ sau } \xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{IV.8}$$

care descrie

• *unda de deplasare longitudinală* (A este amplitudinea acestei unde; alegem $\varphi_0 = 0$, pentru simplificarea calculelor).

Alte mărimi fizice perturbate de unda elastică, care satisfac ecuații de tipul (IV.6), sunt:

• *unda de viteză de oscilație* (u)

$$u(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega A e^{i(\omega t - kx)} = \omega A e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{sau} \quad u(x,t) = -\omega A \sin(\omega t - kx) \quad \text{(IV.9)}$$

unde $u_{\max} = \omega A$ este viteza maximă de oscilație a particulelor mediului (amplitudinea undei de viteză).

• *unda de accelerație (a)*

$$a(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - kx)} = \omega^2 A e^{i(\omega t - kx + \pi)} \quad \text{(IV.10)}$$

sau $$a(x,t) = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) \quad \text{(IV.10')}$$

unde $a_{\max} = \omega^2 A$ este accelerația maximă a mişcării de oscilație a particulelor mediului (amplitudinea undei de accelerație).

• *unda de deformare elastică* (ε)

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -ikA e^{i(\omega t - kx)} = kA e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{sau} \quad \varepsilon(x,t) = kA \sin(\omega t - kx) \quad \text{(IV.11)}$$

unde $\varepsilon_{\max} = kA$ este deformația specifică maximă a mediului (amplitudinea undei de deformare).

• *unda de presiune* (p_u)

$$p_u(x,t) = \sigma = \varepsilon E = EkA e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{sau} \quad p_u(x,t) = EkA \sin(\omega t - kx) \quad \text{(IV.12)}$$

unde $p_{u,\max} = EkA$ este presiunea maximă a undei elastice (amplitudinea undei de presiune).

• *unda de densitate* $(\rho_u = \rho\varepsilon)$

$$\rho_u(x,t) = \rho\varepsilon = \rho kA e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{sau} \quad \rho_u(x,t) = \rho kA \sin(\omega t - kx) \quad \text{(IV.13)}$$

unde $\rho_{u,\max} = \rho kA$ este densitatea maximă produsă de unda elastică (amplitudinea undei de densitate).

Observație: deplasarea longitudinală $\vec{\xi}(x,t)$, viteza de oscilație $\vec{u}(x,t)$ şi accelerația $\vec{a}$ sunt mărimi vectoriale orientate, în exemplul discutat, pe axa *Ox*.

Undele elastice longitudinale se propagă atât în solide, cât şi în lichide şi gaze.

În lichide propagarea undei elastice se produce asemănător cu cazul solidelor. În formula (IV.7) a vitezei de propagare modulul de elasticitate se înlocuieşte cu coeficientul de compresibilitate $K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, deci:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{K}{\rho_{lichid}}} \qquad \text{(IV.14)}$$

În gaze folosim tot coeficientul de compresibilitate, *K*, dar deosebim două cazuri:
a) *proces adiabatic* (dacă frecvenţa undei este foarte mare, în timpul procesului de propagare nu are loc un transfer de căldură între gaz şi mediul înconjurător).

Diferenţiem ecuaţia procesului adiabatic $pV^{\gamma} = const.$ (γ este exponentul adiabatic). Obţinem: $Vdp + \gamma\, pdV = 0$ din care: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{Q=0} = -\frac{\gamma\, p}{V}$, apoi: $K = \gamma\, p$.

Viteza de propagare este:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_{gaz}}} \qquad \text{(IV.15)}$$

Folosind ecuaţia termică de stare a gazului ideal $pV = mRT/\mu$ (μ = masa molară a gazului, *R* = constanta gazelor ideale, *T* = temperatura absolută) şi $\rho_{gaz} = m/V$ obţinem: $\rho_{gaz} = \frac{p\mu}{RT}$, iar viteza de propagare devine:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \qquad \text{(IV.16)}$$

b) *proces izoterm* (dacă frecvenţa undei este mică putem presupune că temperatura rămâne constantă în timpul propagării).

Diferenţiem ecuaţia procesului izoterm $pV = const.$ Obţinem: $Vdp + pdV = 0$ din care: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{p}{V}$, apoi: $K = p$.

Viteza de propagare este:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{p}{\rho_{gaz}}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \qquad \text{(IV.17)}$$

Exemplu: sunetul este o undă elastică longitudinală; el se propagă prin comprimări şi rarefieri succesive ale mediului elastic (Fig. IV. 2).

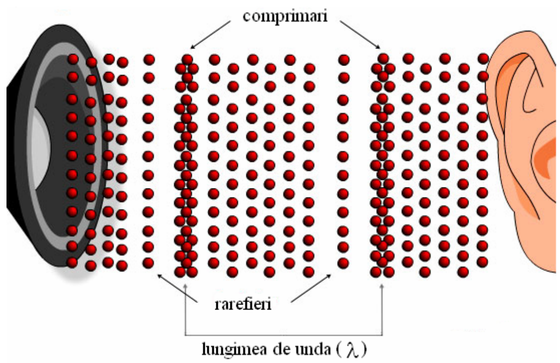


Fig. IV. 2. Propagarea sunetului în aer.

IV.2. Ecuaţia de propagare a undelor transversale

Fie un mediu solid, elastic şi ideal. Mai concret, considerăm o coardă elastică orientată de-a lungul axei Ox şi un element de coardă, Δx foarte mic. Masa acestui element este: $\Delta m = \rho dA\Delta x$ (dA este elementul de suprafaţă perpendicular pe Ox). Coarda este deformată astfel încât elementul Δx este scos din poziţia de echilibru având o deplasare η pe direcţia Oy (***perpendiculară*** pe Ox). Perturbaţia se propagă după axa Ox, antrenând şi restul corzii, deci deplasarea η depinde de coordonata x şi de timp, $\eta(x, t)$.

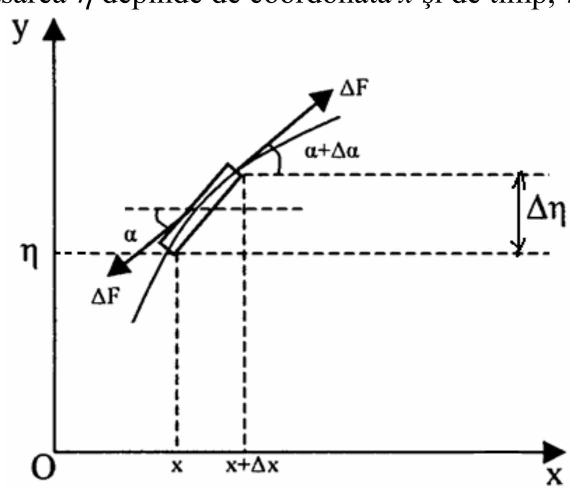


Fig. IV.3. Deformarea elementului de coardă (bară) Δx în propagarea undei elastice transversale.

Conform Fig.IV.3 forţa rezultantă pe axa Oy este:

$$dF_y = dF[\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha] \tag{IV.18}$$

Dar: $\sin\alpha \cong tg\alpha = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_x$, iar $\sin(\alpha+\Delta\alpha) \cong \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$. Dezvoltăm funcția sin (α + Δα) în serie Taylor în jurul lui *x* şi reținem primii doi termeni:

$$\sin\,(\alpha+\Delta\alpha) \cong \sin\alpha + \frac{\partial(\sin\alpha)}{\partial x}\cdot\Delta x \tag{IV.19}$$

adică:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_x \cdot \Delta x + ... \tag{IV.19'}$$

Înlocuind în relația (IV.18) obținem:

$$dF_y \cong dF\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)\cdot\Delta x \tag{IV.20}$$

Dar: $dF = \tau\, dA$, unde τ este efortul unitar tangențial. Pe de altă parte: $dF_y = \Delta m\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$.

Din aceste relații şi din (IV.20) rezultă:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \tag{IV.21}$$

Relația (IV.21) reprezintă ecuația de propagare a undelor elastice transversale şi are forma (III.3) din teoria generală a undelor. Din identificarea acestor forme rezultă viteza de propagare a undelor elastice transversale:

$$v_{trans} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{IV.22}$$

Dar: $\tau/\rho = F_T / m_\ell$, unde F_T este forța de întindere din coardă, iar $m_\ell = m/\ell$ este masa unității de lungime.

Pentru unda armonică plană, soluția ecuației (IV.21) este:

$$\vec{\eta}(x,t) = \vec{\eta}_{\max} e^{i(\omega t - kx)} \text{ sau } \vec{\eta}(x,t) = \vec{\eta}_{\max}\cos(\omega t - kx) \tag{IV.23}$$

care descrie *unda de deplasare transversală*, cu proprietatea, esențială, $\vec{\eta}\cdot\vec{k} = 0$, adică vectorul deplasare transvesală $\vec{\eta}$ este perpendicular pe vectorul de undă $\vec{k}$ (undă transversală). *Undele elastice transversale se propagă numai în solide.*

IV.3. Mărimi energetice în unda elastică longitudinală

Propagarea undei elastice într-un mediu dat presupune un transfer continuu de energie de la sursă la mediu. Energia astfel transferată se regăseşte în mediu ca energie de mişcare a particulelor mediului în jurul poziţiilor lor de echilibru şi ca energie potenţială de deformare. Fie un element de volum ΔV şi masă $\Delta m = \rho\Delta V$ în mediul perturbat de o undă elastică longitudinală.

1) *Energia cinetică* a elementului considerat este:

$$\Delta E_c = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2} = \frac{\rho\Delta V\omega^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \qquad \text{(IV.24)}$$

unde s-a folosit expresia (IV.9) pentru unda de viteză de oscilaţie.

2) *Energia potenţială* a elementului considerat este: $\Delta E_p = \dfrac{k^*(\Delta\ell)^2}{2}$, unde $k^* = \dfrac{SE}{\ell_0}$ este constanta elastică, iar $\Delta\ell = \varepsilon\,\ell_0$.

Folosim expresia (IV.11) a undei de deformare elastică şi relaţia $S\ell_0 = \Delta V$. Rezultă:

$$\Delta E_p = \frac{ES \cdot \ell_0 \varepsilon^2}{2} = \frac{E\Delta V k^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \qquad \text{(IV.25)}$$

Dar: $E = \rho v^2$, iar $k = \dfrac{\omega}{v}$. Relaţia (IV.25) devine:

$$\Delta E_p = \frac{\rho\Delta V\omega^2 A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t - kx) \qquad \text{(IV.25')}$$

Se constată că cele două energii sunt egale: $\Delta E_c = \Delta E_p$ (IV.26)

3) *Energia totală* a elementului considerat este: $\Delta W = \Delta E_c + \Delta E_p = 2\Delta E_c$ (IV.27)

4) *Densitatea volumică de energie* este energia cuprinsă în unitatea de volum, $w = \dfrac{\Delta W}{\Delta V}$; *w* se măsoară în J/m^3. În cazul undei elastice longitudinale, folosind (IV.27) şi (IV.24) în definiţia mărimii *w*, rezultă:

$$w(x,t) = \rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) = \rho u^2 \qquad \text{(IV.28)}$$

5) *Densitatea volumică* ***medie*** *de energie*, $\langle w \rangle$, reprezintă media pe o perioadă a densităţii volumice de energie:

$$\langle w\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T w dt=\frac{\rho\omega^2A^2}{T}\int_0^T\frac{1-\cos[2(\omega t-kx)]}{2}dt=\frac{\rho\omega^2A^2}{2} \quad \text{(IV.29)}$$

În Fig.IV.4 sunt reprezentate mărimile w şi $\langle w\rangle$ în funcție de timp.

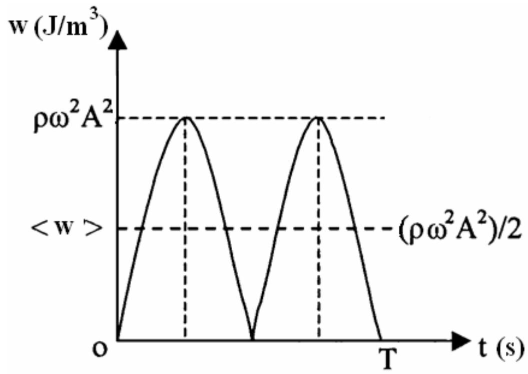


Fig. IV. 4. Densitatea volumică de energie şi valoarea ei medie în funcție de timp, pentru unda elastică longitudinală.

6) *Fluxul energetic* este energia transferată printr-o anumită suprafață în unitatea de timp. Se măsoară în watt (W).

$$\Phi_{en}=\frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{(IV.30)}$$

7) *Densitatea fluxului energetic*, J_{en}, este egală cu energia transferată în unitatea de timp prin unitatea de arie dispusă normal pe direcția de transfer a energiei. Se măsoară în W/m^2.

$$J_{en}=\frac{\Delta W}{\Delta S_n\Delta t} \quad \text{(IV.31)}$$

Conform Fig. IV. 5:

$$J_{en}=\frac{w\Delta S_n(v\Delta t)}{\Delta S_n\Delta t}=w\cdot v \quad \text{(IV.32)}$$

Vectorial:

$$\vec{J}_{en}=w\cdot\vec{v} \quad \text{(IV.32')}$$

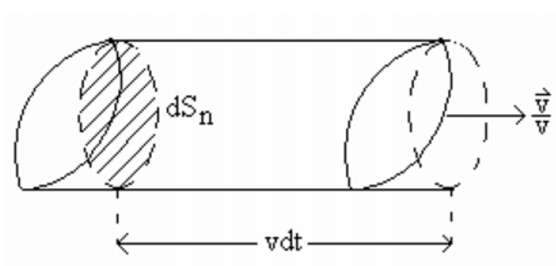


Fig. IV.5. Calculul densității fluxului energetic pentru unda elastică longitudinală.

8) *Intensitatea undei* este media în timp de o perioadă a modulului densității fluxului de energie.

$$I = \langle J_{en} \rangle = \langle w \rangle \cdot v \qquad \text{(IV.33)}$$

Din relațiile (IV.29) şi (IV.32) rezultă: $$I = \frac{\rho\omega^2 A^2 v}{2} \qquad \text{(IV.34)}$$

Definim impedanța acustică a mediului (analogie cu rezistența electrică) prin:

$$Z = \rho v \qquad \text{(IV.35)}$$

Relația (IV.34) devine: $$I = Z\omega^2 A^2 / 2\,. \qquad \text{(IV.34')}$$

Concluzie: Intensitatea undei depinde atât de caracteristicile sursei (A, ω), cât şi de cele ale mediului ($Z = \rho v$). Prelucrând expresia presiunii maxime: $p_{u,\max} = EkA = \rho A v\omega$, relația (IV.34) devine:

$$I = \frac{p_{u,\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{u,\max}^2}{2Z} \qquad \text{(IV.34")}$$

IV.4. Unde elastice produse de surse aflate în mişcare

Mişcarea sursei care produce undele elastice determină: modificarea suprafețelor (fronturilor) de undă şi modificarea frecvenței recepționate de un observator.

IV.4.1. *Modificarea fronturilor de undă*

Suprafața de undă cea mai avansată se numeşte *front de undă*. Fie o sursă punctiformă de oscilații aflată într-un mediu elastic, omogen şi izotrop.

Notăm: u_S^* = viteza sursei; v = viteza de propagare a undei (nu depinde de viteza sursei, ci numai de caracteristicile mediului).

Deosebim următoarele cazuri:

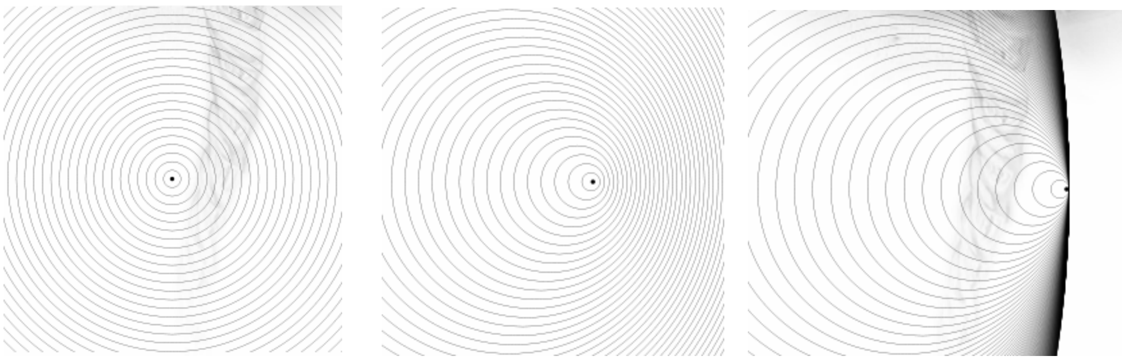
a) $u_S^* = 0$ (sursă fixă) - fronturile de undă Σ_j sunt sfere concentrice, cu centrul în sursă (Fig.IV.6a);

b) $u_S^* < v$ - fronturile de undă sunt sfere cu centrele în S_1, S_2, S_3 (pozițiile succesive ale sursei) şi nu se intersectează; se produce o *apropiere a fronturilor de undă pe direcția şi în sensul vitezei sursei* (Fig.IV.6b); evident că în sensul opus (în spatele sursei) ele se depărtează;

c) $u_S^* = v$ - fronturile de undă sunt sfere de raze diferite, având un punct comun şi anume poziția S a sursei la momentul t (Fig.IV.6c); S_1, S_2, S_3 sunt poziții anterioare ale sursei. Ca efect al suprapunerii undelor în punctul S, intensitatea şi presiunea undei cresc foarte mult, propagarea ei fiind resimțită ca un şoc. De aceea se şi numeşte *undă de şoc*.

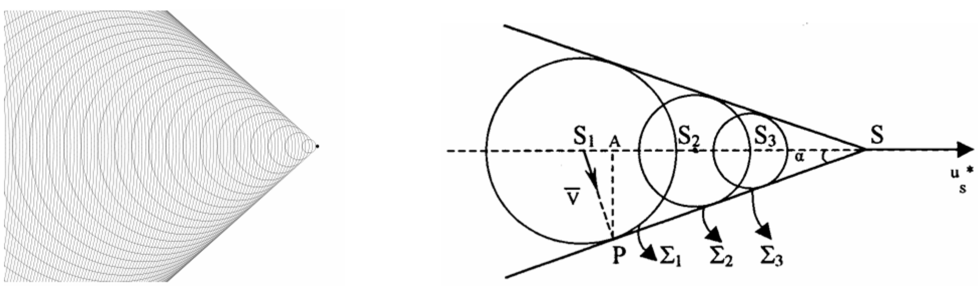
d) $u_S^* > v$ - fronturile de undă sunt cuprinse (înscrise) într-un con cu vârful în sursă (Fig.IV.7). Undele produse astfel se numesc *unde balistice*.

Din Fig.IV.7 rezultă $S_1S = u_S^* \cdot t$, iar $S_1P = v \cdot t$; apoi: $\sin\alpha = \dfrac{v}{u_S^*}$, unde α este jumătate din unghiul plan de la vârful conului. Raportul $\dfrac{u_S^*}{v}$>1 se numeşte *numărul lui Mach*.



a) b) c)

Fig. IV. 6. Modificarea fronturilor de undă pentru unde elastice produse de surse aflate în mişcare: a) $u_S^* = 0$; b) $u_S^* < v$; c) $u_S^* = v$.



a) b)

Fig. IV. 7. a) Modificarea fronturilor de undă la undele balistice (unde elastice produse de surse care se deplasează cu viteze supersonice, $u_S^* > v$); b) schema undelor balistice (aplicație referitoare la avionul cu reacție).

Aplicație: Un avion cu reacție zboară la înălțimea h = 6,8 km cu viteza u_S* = 500 m/s. La ce distanță d față de o casă se află avionul când geamurile acesteia încep să vibreze? Viteza sunetului în aer este v = 340 m/s.

Rezolvare: Conform Fig. IV.7b: SP = d; PA = h; $\sin\alpha = \dfrac{v}{u_S^*} = \dfrac{h}{d}$; $d = \dfrac{hu_S^*}{v}$ = 10 km.

IV.4.2. ***Modificarea frecvenței recepționate de un observator (efect Doppler)***

Când există o viteză relativă între sursa sonoră S *şi receptorul R frecvența* υ' *a sunetului detectat de către receptor este diferită față de frecvența* υ *măsurată în sistemul de referință al sursei.*

Considerăm *cazul particular* în care sursa şi receptorul se apropie, vitezele lor fiind pe aceeaşi direcție (*efect Doppler longitudinal*; Fig. IV. 8).

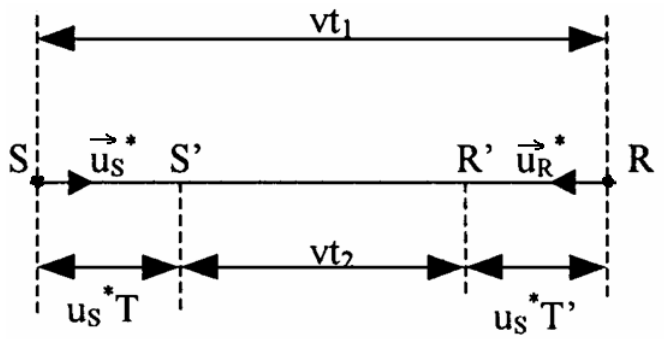


Fig. IV. 8. Schemă pentru efect Doppler longitudinal, cazul în care sursa şi receptorul se apropie, pe aceeaşi direcție.

Notații: u_S^* = viteza sursei; u_R^* = viteza receptorului; v = viteza sunetului; $T = \frac{1}{\upsilon}$ = perioada sunetului emis de sursă; $T' = \frac{1}{\upsilon'}$ = perioada sunetului înregistrat de receptor; S = poziția sursei când ea emite primul sunet; S' = poziția sursei când ea emite al doilea sunet; R = poziția receptorului când el înregistrează (aude) primul sunet; R' = poziția receptorului când el înregistrează (aude) al doilea sunet. Sunt evidente relațiile:
$u_S^* \cdot T + vt_2 + u_R^* \cdot T' = v \cdot t_1$ şi $T + t_2 - t_1 = T'$; rezultă:

$$T' = T\frac{v - u_S^*}{v + u_R^*} \text{, iar pentru frecvențe: } \upsilon' = \upsilon\frac{v + u_R^*}{v - u_S^*} \qquad \text{(IV.36)}$$

Pentru cazul când sursa şi receptorul se depărtează pe aceeaşi direcție obținem:

$$\upsilon' = \upsilon\frac{v - u_R^*}{v + u_S^*} \qquad \text{(IV.37)}$$

Se constată că în cazul apropierii dintre sursă şi receptor frecvența recepționată creşte ($\upsilon' > \upsilon$), iar în cazul depărtării lor frecvența recepționată scade ($\upsilon' < \upsilon$).

Exemple: a) frecvența înregistrată de un observator fix aflat într-o gară prin care trece, fără să oprească, un tren a cărui sirenă este în funcțiune: când trenul se apropie sunetul este mai acut, iar când trenul se depărtează sunetul este mai grav.
b) doi observatori aflați în repaus, unul în fața unei ambulanțe aflate în mişcare, cu sirena în funcțiune, altul în spatele ambulanței (Fig. IV. 9).

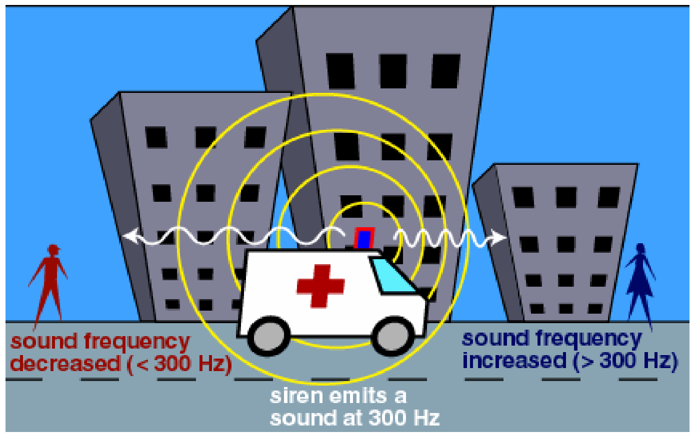


Fig. IV. 9. Exemplu de efect Doppler longitudinal.

Aplicație: Un observator în repaus înregistrează sunetele emise de două diapazoane identice: unul se apropie, iar celălalt se depărtează de observator, pe aceeaşi direcție, cu viteza de 1 m/s. Frecvența sunetului fiecărui diapazon, în sistemul propriu de referință, este $\upsilon = 650$ Hz, iar $v = 340$ m/s. Să se calculeze frecvența bătăilor percepute de observator.

Rezolvare: $u_R^* = 0$; $u_S^* = 1$ m/s; din formula (IV.36): $\upsilon_1 = \upsilon \dfrac{v}{v - u_S^*}$; din formula (IV.37): $\upsilon_2 = \upsilon \dfrac{v}{v + u_S^*}$; frecvența bătăilor este: $\upsilon_b = \upsilon_1 - \upsilon_2 = \dfrac{2\upsilon_0 v}{v^2 - \left(u_S^*\right)^2} \cong 3{,}8$ Hz.