CAP. I. ELEMENTE DE MECANICĂ NEWTONIANĂ

I.1. Noțiuni fundamentale

Punctul material (particula) este un sistem mecanic fără dimensiuni, caracterizat numai prin masă.

Solid rigidul se defineşte ca un sistem de puncte materiale distribuite omogen într-o regiune finită din spaţiu, astfel încât distanţa dintre două puncte oarecare rămâne constantă în timpul mişcării.

Se numeşte *referenţial* (*sistem de referinţă*) un sistem de coordonate în raport cu care se studiază mişcarea sistemului mecanic, însoţit de un dispozitiv pentru măsurarea duratelor (ceas).

Vectorul de poziţie ($\vec{r}$) este un vector având drept componente coordonatele *x*, *y*, *z* (într-un sistem de axe rectangulare) care determină poziţia punctului material la momentul *t* (Fig. I1).

Traiectoria este locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de punctul material în spaţiu (sau curba descrisă de vârful vectorului de poziţie).

Legea de mişcare arată dependenţa de timp a vectorului de poziţie şi are forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad \text{(I.1)}$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor de coordonate în sistemul de coordonate cartezian **OXYZ** (Fig. I.1).

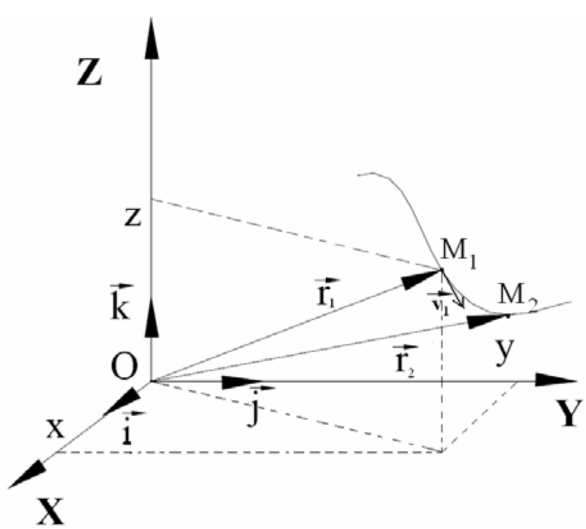


Fig. I.1 Noţiuni fundamentale ale cinematicii punctului material; sistem de coordonate cartezian.

Viteza $\vec{v}$ se defineşte prin relaţia:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$$
$$=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \qquad \text{(I.2)}$$

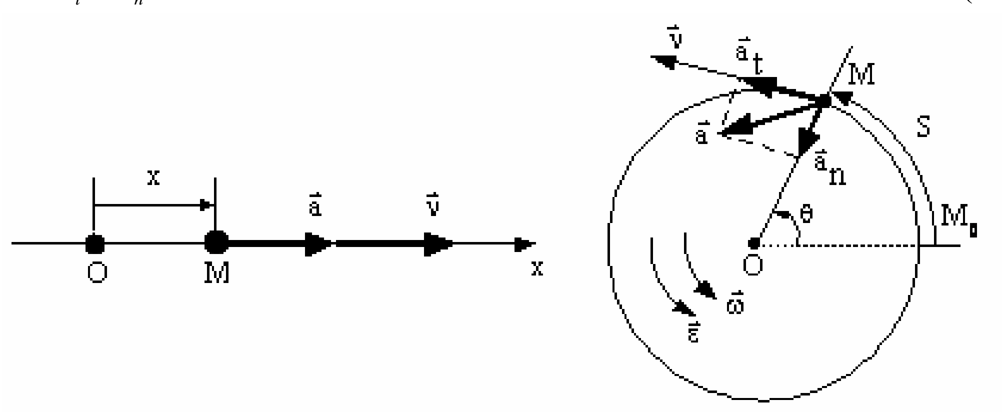
Viteza este tangentă la traiectorie în punctul care reprezintă poziţia punctului material (Fig. I.1).

Acceleraţia $\vec{a}$ se defineşte prin relaţia:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$
$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \qquad \text{(I.3)}$$

Acceleraţia poate fi descompusă după două direcţii perpendiculare: tangentă, respectiv normală la traiectorie, $\vec{a}_t$ şi $\vec{a}_n$ (Fig. I.2):

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n \qquad \text{(I.3')}$$



a) b)

Fig. I.2 Acceleraţia în: a) mişcarea rectilinie; b) mişcarea circulară.

Clasificarea mişcărilor după acceleraţie:

a) uniforme: $\vec{a}=0$;

b) uniform variate: $\vec{a}=const\neq 0$;

c) variate: $\frac{d\vec{a}}{dt}\neq 0$.

I.2. Principiile mecanicii newtoniene

a) *Principiul I (al inerției)*

Orice corp asupra căruia nu acționează nici o forță își păstrează starea de mişcare rectilinie şi uniformă sau de repaus relativ.

Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției se numesc *sisteme de referință inerțiale* (SRI). Orice sistem de referință aflat în mişcare rectilinie şi uniformă față de un SRI este, de asemenea, SRI. În caz contrar sistemul de referință se numeşte neinerțial, dar se poate trata ca unul inerțial dacă introducem forțe specifice numite forțe de inerție.

Folosind noțiunea de impuls al punctului material $\vec{p} = m\vec{v}$ putem scrie forma matematică a principiului inerției:

$$\vec{p} = const. \tag{I.4}$$

b) *Principiul al II-lea (principiul fundamental al mecanicii)*

O forță care acționează asupra unui corp îi imprimă acestuia o accelerație direct proporțională cu forța şi invers proporțională cu masa corpului.

Forma matematică este:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \tag{I.5}$$

Deoarece în mecanica newtoniană *m* = const. relația (I.5) se mai scrie:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{I.5'}$$

c) *Principiul al III-lea (al acțiunii şi reacțiunii)*

Dacă un corp "i" acționează asupra unui alt corp "j" cu o forță $\vec{F}_{ij}$ atunci corpul "j" va acționa asupra corpului "i" cu o forță egală şi de sens contrar $\vec{F}_{ji}$.

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \tag{I.6}$$

Acest principiu presupune propagarea instantanee (deci cu viteză infinită) a interacțiunilor, fapt infirmat de teoria relativității einsteiniene.

d) *Principiul al IV-lea (al independenței acțiunii forțelor)*

Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe fiecare forță imprimă corpului o accelerație, independent de prezența celorlalte, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a celor individuale (principiu de superpoziție).

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k \quad \text{sau} \quad \vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{I.7}$$

e) *Principiul al V-lea (al relativității clasice - Galilei)*
Legile mecanicii au aceeaşi formă (sunt invariante) în orice SRI.
f) *Principiul al VI-lea (al condițiilor inițiale)*
Starea mecanică a unui sistem este determinată la orice moment t dacă se cunoaşte starea mecanică a sistemului la momentul inițial t_0.

Problema fundamentală a mecanicii constă în determinarea stării mecanice a unui sistem la un moment oarecare *t*, ceea ce se obține prin integrarea ecuației de mişcare $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ şi prin cunoaşterea stării inițiale $\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$.

I.3. Teoreme generale şi legi de conservare în dinamica punctului material

I.3.1. *Teorema impulsului*
Forța care acționează asupra unui punct material este egală cu derivata impulsului acestuia.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(I.8)}$$

De fapt, această teoremă reprezintă o altă formă a principiului fundamental (I.5) al mecanicii.

Pentru $\vec{F} = 0$, din relația (I.8) rezultă $\vec{p} = const.$ (I.8')

adică *legea conservării impulsului*: ***Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra unui punct material este nulă (sistem mecanic izolat), atunci impulsul mecanic al punctului material rămâne constant în timp (se conservă).***

I.3. 2. *Teorema momentului cinetic*
Momentul cinetic al unui punct material, față de un punct fix din spațiu (numit pol), se defineşte ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție şi impuls (Fig.I.3):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \text{(I.9)}$$

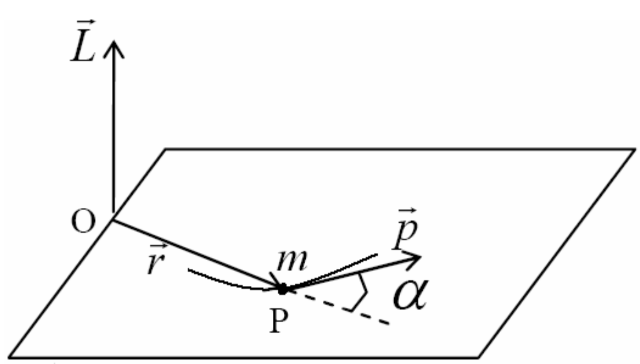


Fig. I.3. Momentul cinetic al unui punct material

Momentul forței în raport pol se defineşte ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței (față de pol) şi forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(I.10)}$$

Pentru deducerea teoremei momentului cinetic calculăm derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \qquad \text{(I.11)}$$

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al punctului material față de un punct fix numit pol este egală cu momentul forței care acționează asupra punctului material față de acelaşi pol.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad \text{(I.11')}$$

Pentru $\vec{M} = 0$, din (I.11') rezultă $\vec{L} = const.$ Aceasta se întâmplă în următoarele cazuri:
a) $\vec{F} = 0$ şi b) $\vec{F} = F\frac{\vec{r}}{r}$ (forță centrală).

Legea conservării momentului cinetic: ***Dacă momentul forței rezultante care acționează asupra unui punct material este nul față de un punct fix numit pol, atunci momentul cinetic al punctului material față de acelaşi pol rămâne constant în timp (se conservă).***

I.3.3. *Lucrul mecanic. Energia cinetică şi energia potențială. Teorema energiei*

A. *Lucrul mecanic*

a) Pentru $\vec{F} = const.$ lucrul mecanic este definit ca produsul scalar dintre forță şi vectorul deplasare:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha \qquad \text{(I.12)}$$

b) Pentru $\vec{F} \neq const.$ se defineşte lucrul mecanic elementar ca produsul scalar dintre forță şi deplasarea elementară $d\vec{r}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad \text{(I.13)}$$

Prin integrare rezultă lucrul mecanic în procesul mecanic care se desfăşoară între stările (1) şi (2) (Fig.I.4):

$$L = \int_{(1)}^{(2)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) \qquad \text{(I.14)}$$

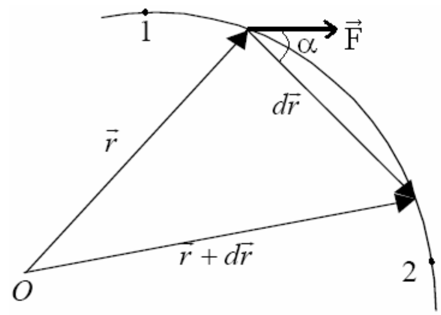


Fig. I. 4. Calculul lucrului mecanic al forței $\vec{F}$.

Observație: Lucrul mecanic este o *mărime de proces* (depinde de stările intermediare), deci nu admite, în general, o diferențială totală exactă (adică, în general, $\vec{F} \cdot d\vec{r} \neq d\Phi$).

B. *Energia cinetică* se defineşte ca semiprodusul dintre masa punctului material şi pătratul vitezei sale:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \qquad \text{(I.15)}$$

Teorema variației energiei cinetice
Într-un proces mecanic elementar (infinitezimal):

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \left[d\left(m\vec{v} \right)\vec{v} \right] = d\left(\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} \right) = dE_c \qquad \text{(I.16)}$$

Relația $dL = dE_c$ reprezintă teorema variației energiei cinetice pentru un proces mecanic elementar.

Pentru un proces mecanic finit care se desfăşoară între stările (1) şi (2) rezultă:

$$L_{1\to 2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} dE_c = E_c(2) - E_c(1) \qquad \text{(I.16')}$$

Aşadar, ***lucrul mecanic efectuat de forțele care acționează asupra unui punct material într-un proces mecanic finit (1)→(2) este egal cu variația energiei cinetice a punctului material între aceste stări.***

C. *Forțe conservative. Energie potențială*

Dacă un punct material suferă un proces mecanic după o curbă închisă (Γ) lucrul mecanic are expresia:

$$L = \oint_{(\Gamma)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) \tag{I.17}$$

adică este egal cu *circulația* vectorului $\vec{F}$ pe curba (Γ).

În general, lucrul mecanic (*mărime de proces*) depinde de stările intermediare prin care trece sistemul, adică de drumul urmat de forță, deci integrala din relația (I.17) este nenulă. Există însă cazuri în care:

$$L = \oint_{(\Gamma)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) = 0 \tag{I.17'}$$

În aceste cazuri lucrul mecanic efectuat de forță asupra punctului material nu depinde decât de starea inițială şi de cea finală a sistemului câmp de forțe + punct material. Forța respectivă se numeşte *forță conservativă*, iar câmpul de forțe se numeşte *câmp conservativ*. Exemple: forța gravitațională, forța elastică.

Condiția necesară şi suficientă pentru îndeplinirea relației (I.17') este ca:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU \tag{I.18}$$

adică lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ să fie o diferențială totală exactă a unei mărimi fizice care depinde de coordonatele *x, y, z*. Această mărime, considerată cu semnul "-" (prin convenție), este *energia potențială U(x, y, z)* sau $E_p(x, y, z)$.

Deoarece $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$ rezultă, prin identificare cu relația (I.18):

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{I.19}$$

sau:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) = -gradU = -\nabla U \tag{I.20}$$

Se spune că forțele conservative derivă din energia potențială. Această energie (*U*) depinde de configurația sistemului mecanic şi este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța conservativă la trecerea de la o configurație aleasă *arbitrar* ca referință (pentru care energia potențială este nulă) la configurația dată.

Sistemul mecanic în care acționează *numai* forțe conservative se numeşte *sistem conservativ*, iar în caz contrar se numeşte *disipativ*.

D. *Teorema energiei*

Energia mecanică a unui sistem mecanic este o mărime de stare egală cu suma dintre energia cinetică şi cea potenţială:

$$E = E_c + U \tag{I.21}$$

Explicităm teorema variaţiei energiei cinetice pentru un proces mecanic elementar produs într-un sistem disipativ:

$$dE_c = dL_{cons} + dL_{dis} = -dU + dL_{dis} \tag{I.22}$$

din care, folosind definiţia (I.21), rezultă:

$$dE = dL_{dis} \tag{I.23}$$

Pentru un proces mecanic finit:

$$\Delta E = E(2) - E(1) = L_{dis\,1\to 2} \tag{I.24}$$

Teorema energiei se enunţă astfel: ***Variaţia energiei mecanice a unui sistem mecanic disipativ este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele neconservative (disipative).***

Într-un sistem conservativ: $dL_{dis} = 0$, deci: $dE = 0 \Rightarrow E = const.$, adică se obţine *legea conservării energiei mecanice*: ***Energia mecanică E a unui sistem conservativ izolat este constantă (se conservă).***

I.4. Teoreme generale şi legi de conservare în dinamica sistemelor de puncte materiale

Fie un sistem de N puncte materiale. Asupra fiecărui punct material din sistem, punct de masă m_i, acţionează două categorii de forţe:

a) forţe externe (de la corpuri care nu aparţin sistemului), a căror rezultantă este $\vec{F}_i$

b) forţe interne, $\vec{\Im}_{ij}$, din partea celorlalte puncte materiale $j \neq i$.

Teoremă: Rezultanta forţelor interne şi momentul rezultant al acestora faţă de un pol sunt nule.

$$\vec{\Im}_{\text{int}} = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{\Im}_{ij} = 0; \quad \vec{M}_{\text{int}} = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{\Im}_{ij} = 0 \tag{I.25}$$

I.4.1. *Teorema impulsului mecanic total şi legea de consevare a impulsului mecanic total*

Aplicăm teorema impulsului mecanic (I.8) pentru fiecare punct material m_i.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\Im}_{\text{int},i} + \vec{F}_{ext,i} \qquad \text{, cu } i = 1, 2, \ldots N \tag{I.26}$$

unde $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ este impulsul punctului material "i", $\vec{\Im}_{\text{int},i} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\Im}_{ij}$ (cu $j \neq i$) este rezultanta forțelor interne care acționează asupra acestui punct material, iar $\vec{F}_{ext,i}$ este rezultanta forțelor externe asupra aceluiaşi punct material (Fig. I. 5).

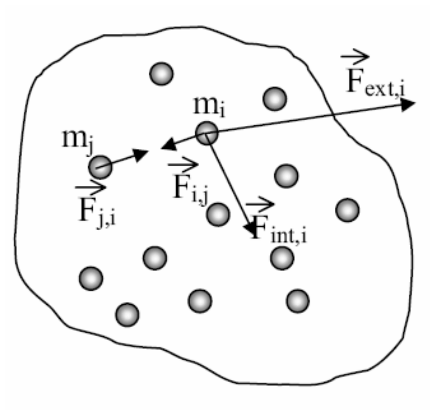


Fig. I. 5. Sistem de puncte materiale

Prin sumare după indicele i rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Im}_{\text{int},i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} \tag{I.27}$$

Definim impulsul total al sistemului de puncte materiale:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{I.28a}$$

şi rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului:

$$\vec{F}_{rez.ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i}$$

(I.28b)

Relația (I.27) devine:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{rez.ext} \tag{I.29}$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului mecanic total al unui sistem de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului.

Pentru un sistem izolat ($\vec{F}_{rez.ext} = 0$) rezultă:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const. \tag{I.30}$$

Relația (I.30) reprezintă *legea conservării impulsului mecanic total* al unui sistem de puncte materiale: ***Pentru un sistem izolat de puncte materiale impulsul mecanic total este constant (se conservă)***.

I.4.2. *Teorema momentului cinetic total şi legea de conservare a momentului cinetic total*

Aplicăm teorema momentului cinetic (I.11) pentru fiecare punct material m_i.

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\aleph}_i + \vec{M}_i \text{, cu } i = 1, 2, ... N \tag{I.31}$$

unde $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ este momentul cinetic al punctului material "i", $\vec{\aleph}_i = \vec{r}_i \times \vec{\Im}_i$ este momentul forțelor interne față de un pol pentru acest punct material, iar $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ este momentul forțelor externe față de acelaşi pol, pentru acelaşi punct material. Prin sumare după indicele i rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\aleph}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \tag{I.32}$$

Definim momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \tag{I.33a}$$

şi momentul rezultant al forțelor externe care acționează asupra sistemului:

$$\vec{M}_{rez.ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \tag{I.33b}$$

Relația (I.32) devine:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{rez.ext} \tag{I.34}$$

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale, față de un pol, este egală cu momentul rezultant al forțelor externe care acționează asupra sistemului, față de acelaşi pol.

Dacă $\vec{M}_{rez.ext} = 0$, condiție îndeplinită în două cazuri: când sistemul este izolat ($\vec{F}_{rez.ext} = 0$) sau când forțele externe sunt centrale ($\vec{F}_i = F_i \frac{\vec{r}_i}{r_i}$) rezultă:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \qquad \text{(I.35)}$$

Relația (I.35) reprezintă *legea conservării momentului cinetic total* al unui sistem de puncte materiale: ***Dacă momentul rezultant al forțelor externe care acționează asupra unui sistem de puncte materiale, față de un pol, este nul momentul cinetic total față de acelaşi pol este constant (se conservă)***.

I.4.3. *Teorema variației energiei cinetice totale şi legea conservării energiei mecanice totale*

Aplicăm teorema variației energiei cinetice $dL = dE_c$ (I.16) pentru punctul material "m_i":

$$dE_{c,i} = dL_i + d\int_i \qquad \text{(I.36)}$$

unde $dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$ este lucrul mecanic elementar al forțelor externe, iar $d\int_i = \vec{\Im}_i \cdot d\vec{r}_i$ este lucrul mecanic elementar al forțelor interne care acționează asupra punctului material "m_i". Prin sumare după indicele "i" rezultă:

$$d\left(\sum_{i=1}^{N} E_{c,i}\right) = \sum_{i=1}^{N} dL_i + \sum_{i=1}^{N} d\int_i \qquad \text{(I.37)}$$

sau: $$dE_c = dL_{ext} + dL_{\text{int}} \qquad \text{(I.37')}$$

Relația (I.37') reprezintă *forma locală* a teoremei energiei cinetice (pentru proces mecanic infinitezimal). Pentru un proces mecanic finit care se desfăşoară între stările (1) şi (2) avem:

$$\Delta E_c = E_{c(2)} - E_{c(1)} = L_{ext} + L_{\text{int}} \qquad \text{(I.38)}$$

Relația (I.38) reprezintă *forma integrală* a teoremei energiei cinetice totale.
Variația energiei cinetice totale a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele, atât cele externe cât şi cele interne.

Caz particular: sistemul de puncte materiale este izolat ($\vec{F}_{rez.ext} = 0 \Rightarrow L_{ext} = 0$) şi conservativ ($L_{\text{int}} = -\Delta U$, unde $U = \sum_{i=1}^{N} U_i$ este energia potențială totală a sistemului de puncte materiale). În aceste condiții relația (I.38) devine:

$$\Delta E_c = -\Delta U \tag{I.39}$$

adică se obține *legea conservării energiei mecanice totale a unui sistem de puncte materiale*:

Pentru un sistem de puncte materiale izolat în care forțele interne sunt conservative energia mecanică totală $E = E_c + U$ ***este constantă (se conservă).***