

## CAP. VI. UNDE ELECTROMAGNETICE. OPTICĂ

### VI.1. Operatori algebrici vectoriali

Fie  $V$  o mărime fizică scalară și  $\vec{A}$  o mărime fizică vectorială. Definim operațiunile: gradient ( $grad = \nabla$ ), divergență ( $div = \nabla \cdot$ ), rotor ( $rot = \nabla \times$ ), laplaceian ( $\nabla^2 = \Delta$ ).

$$grad V = \vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (VI.1)$$

$$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \text{ unde } \vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z \quad (VI.2)$$

$$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (VI.3)$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (VI.4)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = grad(div \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (VI.5)$$

Fluxul vectorului  $\vec{A}$  prin suprafața  $\Sigma$  este:  $\Phi_A = \iint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S}$  (VI.6)

Circulația vectorului  $\vec{A}$  pe curba  $\Gamma$  este:  $C_A = \int_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell}$  (VI.7)

Teorema Gauss - Ostrogradski:  $\oiint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \iiint_{V_{\Sigma}} (\nabla \cdot \vec{A}) dv$  (VI.8)

Teorema Stokes:  $\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S}$  (VI.9)

## VI.2. Legile electromagnetismului

### 1) Legea lui Coulomb

Forța de interacțiune dintre două corpuri punctiforme care au sarcinile electrice  $Q$ , respectiv  $q$  este dirijată pe linia ce unește corpurile având modulul direct proporțional cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele.

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{VI.10})$$

unde  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ,  $\epsilon$  este permitivitatea mediului (pentru vid  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}}$ ), iar  $\vec{r}$  este vectorul de poziție al sarcinii  $q$  față de  $Q$  (Fig.VI.1).

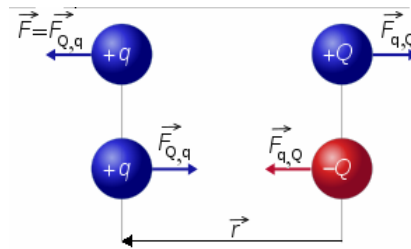


Fig. VI. 1. Forța de interacțiune dintre două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcini electrice (legea lui Coulomb).

2) *Intensitatea câmpului electric în vid* este egală cu raportul dintre forța care acționează asupra corpului de probă având sarcina electrică  $q$  și valoarea acesteia:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (\text{VI.11})$$

În cazul în care sarcina electrică generatoare de câmp,  $Q$ , este punctiformă se obține un câmp radial:

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{VI.12})$$

*Principiul superpoziției:*  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$  are următoarele forme:

- pentru o distribuție discretă de sarcini electrice  $Q_i$ , fixe:

$$\vec{E}(x,y,z) = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (\text{VI.12}')$$

- pentru o distribuție continuă de sarcină electrică, în repaus (Fig.VI.2):

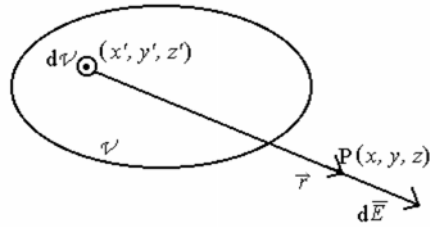


Fig. VI.2 Intensitatea câmpului electric pentru o distribuție continuă de sarcină electrică.

$$\vec{E}(x,y,z) = k_0 \iiint_{V'} \frac{\rho(x',y',z')}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dx' dy' dz' \quad (\text{VI.12''})$$

unde:  $\rho = \frac{dQ}{dv'}$  este densitatea volumică de sarcină electrică (în SI se măsoară în  $C/m^3$ ),  $dv' = dx'dy'dz'$  este elementul de volum al distribuției, iar  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ .

### 3) Lucrul mecanic al forțelor electrice. Potențialul electric

Câmpul electric generat de sarcini electrice fixe se numește *câmp electrostatic*.

Pentru o deplasare infinitesimală  $d\vec{\ell}$  lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \vec{F}d\vec{\ell} = q\vec{E}d\vec{\ell} = \frac{k_0 qQ\vec{r}d\vec{\ell}}{r^3} \quad (\text{VI.13})$$

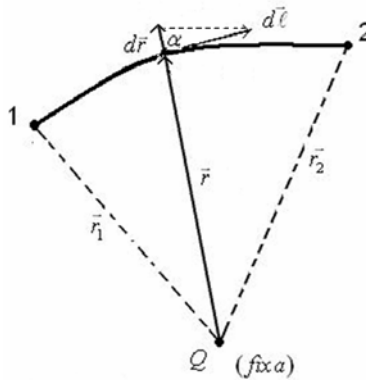


Fig.VI.3 Calculul lucrului mecanic elementar în câmp electrostatic.

Din Fig.VI.3 rezultă:  $\vec{r}d\vec{\ell} = rd\ell \cos \alpha = rdr$  (VI.14)

Așadar:  $dL = k_0 qQ \frac{dr}{r^2}$ , iar:

$$L_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} = k_0 q Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k_0 q Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{VI.15})$$

Lucrul mecanic  $L_{12}$  efectuat de forțele electrice între stările 1 și 2 depinde numai de aceste poziții și nu depinde de stările intermediare, deci *câmpul electrostatic este un câmp conservativ*. Este evidentă proprietatea  $L_{21} = -L_{12}$ , deci lucrul mecanic pe o curbă închisă, în câmp electrostatic, este nul. Rezultă:

$$q \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \text{ adică: } \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{VI.16})$$

Din relația (VI.16) și din teorema Stokes (III.109) obținem:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{VI.16}')$$

relație care se interpretează astfel:

a) câmpul electrostatic este *irotațional*, deci are linii de câmp deschise (Fig. VI.4, pentru un electron izolat, în repaus);

b) vectorul  $\vec{E}$  provine din gradientul unei mărimi fizice scalare:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (\text{VI.17})$$

Mărima  $V$  se numește *potențial electric* (unitatea de măsură, în SI, este voltul, notat V).

Semnul "-" arată că vectorul  $\vec{E}$  este dirijat în sensul scăderii potențialului electric. Pe componente, relația (VI.17) are forma:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{VI.17}')$$

Diferența de potențial  $V_1 - V_2$  dintre două puncte ale câmpului electrostatic este egală cu raportul dintre lucrul mecanic necesar deplasării sarcinii electrice  $q$  între cele două puncte și valoarea sarcinii  $q$ . Obținem:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} = k_0 Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{VI.18})$$

Pentru determinarea univocă a potențialului electric este necesar un punct de referință, ales arbitrar, în care  $V_{\text{ref}} = 0$ . În exemplul prezentat (câmp generat de sarcina electrică  $Q$  punctiformă) alegem  $V_2 = 0$  pentru  $r_2 \rightarrow \infty$ . Rezultă:

$$V_1 = \frac{L_{1,ref}}{q} = k_0 \frac{Q}{r_1} \quad (VI.19)$$

Suprafețele care au același potențial în toate punctele lor se numesc *suprafețe echipotențiale*. Ele sunt perpendiculare pe liniile de câmp  $\vec{E}$  (Fig. VI. 4).

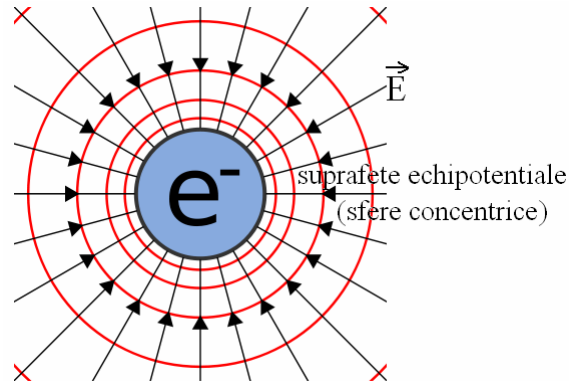


Fig. VI. 4. Liniile de câmp, intensitatea câmpului electric și suprafețele echipotențiale pentru un electron izolat, aflat în repaus.

Potențialul electric este o *mărime aditivă*.

- Pentru o distribuție discretă de sarcini electrice  $Q_i$ , fixe:

$$V(x,y,z) = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (VI.19')$$

- pentru o distribuție continuă de sarcină electrică, în repaus (Fig.VI.2):

$$V(x,y,z) = k_0 \iiint_{V'} \frac{\rho(x',y',z')}{r} dx' dy' dz' \quad (VI.19'')$$

#### 4) Energia potențială ( $W_p$ )

- pentru o pereche de sarcini electrice, notate  $q_1$  și  $q_2$ , aflate la distanța  $r_{12}$  una de alta, energia potențială este egală cu lucrul mecanic necesar aducerii sarcinii electrice  $q_2$  de la infinit până la distanța  $r_{12}$ :

$$W_p = L_{2,\infty} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_2 V_1 = q_1 V_2 \quad (VI.20)$$

unde  $V_1$  este potențialul electric creat de sarcina electrică  $q_1$  în punctul în care se află sarcina  $q_2$ .

- pentru o distribuție discretă de sarcini electrice se însumează energiile potențiale ale tuturor perechilor de sarcini electrice (fiecare pereche este considerată o singură dată):

$$W_p = k_0 \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \dots + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (\text{VI.21})$$

sau:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i^* \quad (\text{VI.21}')$$

unde  $V_i^*$  reprezintă potențialul electric creat în punctul în care se află sarcina electrică  $q_i$  de către celelalte sarcini electrice  $q_j$  cu  $j \neq i$ .

- pentru o distribuție continuă de sarcini electrice se adaptează rezultatul (VI.21'):

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{v'} V^*(x', y', z') \rho(x', y', z') dv' \quad (\text{VI.22})$$

### 5) Legea lui Gauss

Conform relației (VI.6) fluxul vectorului câmp electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $\Sigma$  este:

$\Phi_E = \iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S}$ , iar printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  este:

$$\Phi_{E, \Sigma \text{ închisă}} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{VI.23})$$

Să calculăm fluxul electric printr-o suprafață sferică de rază  $r$ , centrată în sarcina electrică fixă  $q$ . În toate punctele acestei sfere intensitatea câmpului electric are același modul  $E = k_0 \frac{q}{r^2}$  și este orientată radial (Fig. VI.5).

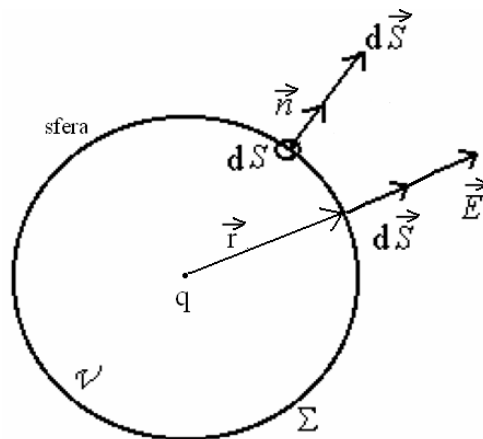


Fig. VI. 5. Calculul fluxului câmpului electric al unei sarcini punctiforme prin suprafața unei sfere.

Obținem:

$$\oiint_{sfera} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{sfera} E dS = k_0 \frac{q}{r^2} \oiint_{sfera} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (VI.24)$$

Rezultatul se poate generaliza sub forma: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (VI.25)$$

unde  $q_{int}$  este sarcina electrică totală din interiorul suprafeței închise  $\Sigma$  de formă oarecare. Relația (VI.25) reprezintă *forma integrală a legii Gauss, în vid: fluxul electric printr-o suprafață închisă este egal cu raportul dintre sarcina electrică totală din interiorul acelei suprafețe și permitivitatea vidului*. Distingem cazurile:

- distribuție discretă de sarcini electrice fixe: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (VI.25')$$

- distribuție continuă de sarcini electrice în repaus: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv \quad (VI.25'')$$

Forma diferențială (locală) a legii Gauss, în vid, se obține din relația (VI.25'') folosind teorema Gauss-Ostrogradski (VI.8). Rezultă:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (VI.26)$$

**Observații:** 1° densitatea volumică de sarcini electrice cuprinde atât sarcinile electrice libere cât și sarcinile electrice legate (în atomi, molecule, ioni):  $\rho = \rho_{libere} + \rho_{legate}$   
 2° din relațiile (VI.17) și (VI.26) rezultă ecuația Poisson, utilizată pentru calculul potențialului electric atunci când se cunoaște densitatea volumică de sarcini electrice:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (VI.27)$$

3° expresia energiei potențiale devine:

$$W_p = \iiint_v \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \quad (VI.28)$$

unde  $w_{electric} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  reprezintă densitatea volumică de energie a câmpului electric (în SI se măsoară în J/m<sup>3</sup>).

6) *Legea conservării sarcinii electrice (ecuația de continuitate)*

Pentru caracterizarea deplasării sarcinilor electrice definim:

a) intensitatea curentului electric:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{în SI unitatea de măsură este amperul, A}) \quad (\text{VI.29})$$

b) densitatea de curent printr-o suprafață:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_n} \cdot \vec{u}_j \quad (\text{VI.30})$$

unde  $\vec{u}_j = \frac{\vec{v}}{v}$  este versorul densității de curent și al vitezei de deplasare a sarcinilor electrice, iar  $dS_n$  este suprafața elementară așezată perpendicular pe direcția de deplasare;  $j$  se măsoară în A/m<sup>2</sup>. Este evidentă relația:

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} \quad (\text{VI.31})$$

Pentru o suprafață  $\Sigma$  închisă:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq_{int}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv \right) \quad (\text{VI.32})$$

Relația (VI.32) reprezintă *forma integrală a legii conservării sarcinii electrice*.

Pentru a găsi forma diferențială a acestei legi folosim teorema Gauss - Ostrogradski (VI.8):

$\oiint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = \iiint_{v_{\Sigma}} \nabla \cdot \vec{j} dv$  și relația  $q_{int} = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho dv$ , unde densitatea volumică de sarcină electrică

$\rho$  depinde de  $x, y, z$  și  $t$ . Rezultă forma diferențială a legii conservării sarcinii electrice:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VI.33})$$

care se mai numește *ecuația de continuitate*, prin analogie cu cea din mecanica fluidelor.



### 7) Legea lui Ohm

În regim staționar  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  și deci  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , ceea ce se interpretează astfel: vectorul

$\vec{j}$  este un *vector solenoidal*, adică are linii de câmp închise. Așadar, *curentul electric staționar se produce numai în circuite închise*. Pentru a-l menține este necesară o *sursă electrică*, adică un dispozitiv în care purtătorii de sarcină electrică sunt deplasați de forțe neelectrice astfel încât circuitul lor să se închidă. Purtătorii de sarcină electrică pozitivă se deplasează în exteriorul sursei de la polul ei pozitiv la cel negativ, iar în interiorul sursei invers. Forțele care deplasează purtătorii de sarcină electrică prin interiorul sursei se numesc *forțe imprimare* și au drept corespondent *câmpul electric imprimat*  $\vec{E}_i$ .

Se numește *tensiune electromotoare (t.e.m.)* mărimea numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele imprimare pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă printr-o porțiune de circuit. Pe tot circuitul (interior și exterior) forța este:  $\vec{F} = \vec{F}_{electric} + \vec{F}_{imprimat} = q(\vec{E} + \vec{E}_i)$ . Lucrul mecanic între două puncte ale circuitului este:

$$L_{12} = q \left( \int_1^2 \vec{E} d\vec{\ell} + \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{\ell} \right) = q(V_1 - V_2) + q \epsilon_{12} \quad (VI.34)$$

unde  $\epsilon_{12}$  reprezintă t.e.m. între punctele 1 și 2.

*Tensiunea electrică sau căderea de tensiune* este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat, în total, de forțele imprimare și de cele electrostatice, pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă pe o porțiune de circuit (între punctele 1 și 2):

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} \quad (VI.35)$$

Din ultimele două relații rezultă *legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit*:

$$U_{12} = V_1 - V_2 + \epsilon_{12} \quad (VI.36)$$

Pentru un circuit închis  $V_1 = V_2$  și deci: 
$$U = \epsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E}_i d\vec{\ell} \quad (VI.37)$$

adică: ***T.e.m. pentru întregul circuit este egală cu circulația câmpului electric imprimat.***

*Forma locală (diferențială) a legii lui Ohm este:*

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (VI.38)$$

unde  $\sigma$  este conductivitatea electrică a mediului.

Pentru a obține *forma integrală a legii lui Ohm* folosim formula rezistenței electrice  $R$  a unui fir conductor, de lungime  $\ell$  și secțiune  $S$ , confecționat dintr-un material cu rezistivitatea  $\rho^*$ :  $R = \frac{\rho^* \ell}{S} = \frac{\ell}{\sigma S}$  precum și  $U_{12} = \ell(E + E_i)$ . Din relațiile (VI.31) și

(VI.38) rezultă:  $E + E_i = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S}$ . În final:

$$I = \frac{U_{12}}{R} \quad (\text{VI.39})$$

### 8) Legea Biot – Savart

se folosește la calculul inducției magnetice produse de un curent electric staționar. Inducția magnetică elementară  $d\vec{B}$ , produsă, în vid, de curentul  $I$  ce trece prin elementul de linie  $d\vec{\ell}$  al curbei  $\Gamma$ , în punctul P poziționat prin vectorul  $\vec{r}$  (Fig.VI.5) este:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (\text{VI.40})$$

unde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  este permeabilitatea vidului.

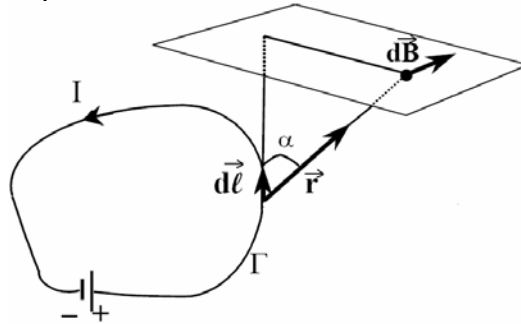


Fig. VI. 6. Calculul inducției magnetice produse de un curent electric staționar (legea Biot-Savart).

Inducția magnetică în punctul P se obține prin integrarea relației (VI.40) pe curba închisă  $\Gamma$  parcursă de curent și deci depinde de forma acesteia:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (\text{VI.41})$$

**Aplicație:** Să se calculeze inducția magnetică produsă într-un punct P situat la distanța  $R$  de un conductor liniar, infinit, parcurs de curentul staționar  $I$  (Fig.VI.7). Modulul inducției magnetice elementare este:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{rd\ell \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cos \beta}{r^2}. \quad (\text{VI.42})$$

Din Fig. VI.6:  $\ell = R \tan \beta$ , iar  $d\ell = \frac{R d\beta}{\cos^2 \beta}$ ; de asemenea:  $r = \frac{R}{\cos \beta}$ .

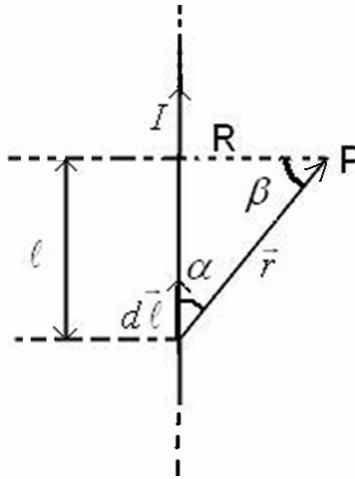


Fig. VI.7. Calculul inducției magnetice la distanța  $R$  de un conductor liniar infinit, aflat în vid și parcurs de curentul electric staționar  $I$ .

Înlocuind în relația (VI.42) obținem:  $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \beta d\beta$ , apoi:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (\text{VI.43})$$

### 9) Legea fluxului magnetic

se justifică prin analogie cu legea Gauss (a fluxului electric): deoarece nu există "sarcini magnetice" (analoage celor electrice) **fluxul inducției magnetice printr-o suprafață închisă este nul.**

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (\text{VI.44})$$

Relația (VI.44) reprezintă *forma integrală a legii fluxului magnetic*, iar *forma locală (diferențială)* este:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{VI.45})$$

10) *Legea lui Ampère*

se referă la circulația vectorului  $\vec{H}$  (intensitatea câmpului magnetic) pe o curbă închisă.

În vid există relația: 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{VI.46})$$

Intensitatea câmpului magnetic  $H$  se măsoară în A/m, iar inducția magnetică  $B$  în tesla (T). Fie un curent staționar, de intensitate  $I$ , care străbate un conductor liniar, foarte lung (considerat infinit). Folosind relațiile (VI.43) și (VI.46) calculăm circulația vectorului  $\vec{H}$  pe un cerc de rază  $R$ , centrat pe conductor și perpendicular pe acesta. Obținem:

$$\oint_{\text{cerc } \Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{I}{2\pi R} \oint_{\text{cerc}} d\ell = I, \text{ rezultat care se generalizează sub forma:}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = I_{\text{total}} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} \quad (\text{VI.47})$$

*Legea lui Ampère pentru curenți staționari* (Fig. VI.8) se enunță astfel: **Circulația vectorului intensitate a câmpului magnetic pe o curbă închisă  $\Gamma$  este egală cu intensitatea totală a curentului prin suprafața mărginită de curba  $\Gamma$ .**

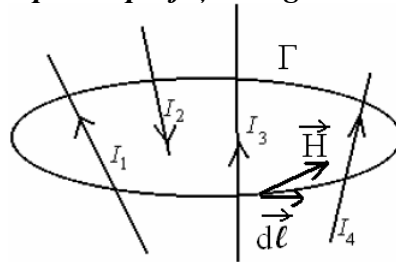


Fig. VI. 8. Legea lui Ampère pentru curenți staționari.

Mai general, pentru curenți nestaționari, legea lui Ampère are forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{D} d\vec{S} \right), \quad (\text{VI.48})$$

unde vectorul  $\vec{D}$  reprezintă inducția electrică (se măsoară în C/m<sup>2</sup>), care depinde de  $x, y, z$  și  $t$ . În vid:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ . Relația (VI.48) reprezintă forma integrală a legii lui Ampère.

Pentru a obține forma diferențială a acestei legi folosim teorema Stokes (VI.9) aplicată circulației vectorului  $\vec{H}$ , apoi egalăm integranții. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{VI.49})$$

unde  $\vec{j}$  este densitatea curentului de conducție, iar  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_d$  se interpretează ca densitatea curentului de deplasare.

11) *Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday)*

se referă la apariția unui câmp electric într-o regiune în care fluxul magnetic variază în timp. Se arată experimental că **într-un circuit închis străbătut de un flux magnetic variabil în timp apare o t.e.m. egală cu viteza de variație a fluxului magnetic, luată cu semn schimbat.**

$$\epsilon_{indusa} = - \frac{d\Phi_{mg}}{dt}, \quad (VI.50)$$

unde  $\Phi_{mg} = \iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}$  este fluxul inducției magnetice prin suprafața circuitului (Fig. VI. 9).

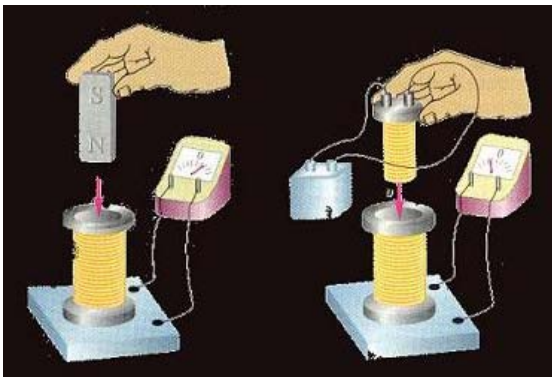
Dar:  $\epsilon_{indusa} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell}$ , deci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{S} \right). \quad (VI.51)$$

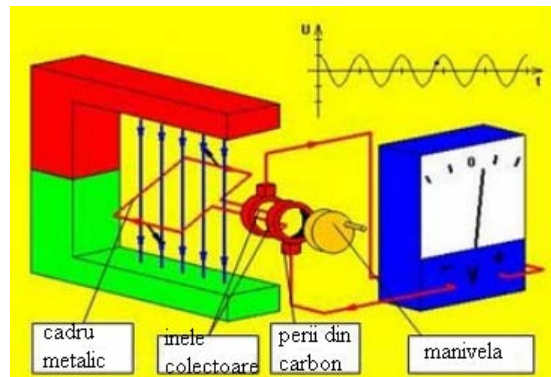
Relația (VI.51) reprezintă *forma integrală a legii lui Faraday*. Pentru a obține *forma diferențială* a acestei legi folosim teorema Stokes (VI.9) aplicată circulației vectorului  $\vec{E}$ , apoi egalăm integrații. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (VI.52)$$

unde inducția magnetică  $\vec{B}$  depinde de  $x, y, z$  și  $t$ .



a)



b)

Fig. VI. 9. Experimente care demonstrează apariția unei t.e.m. într-un circuit în care fluxul magnetic variază în timp: a) deplasarea unui magnet (sau a unei bobine parcurse de curent electric) în interiorul unei bobine fixe nelegată la vreo sursă electrică; b) rotirea unui cadru metalic într-un câmp magnetic static (principiul producerii curentului alternativ).

Mai general, *fenomenul de inducție electromagnetică constă în apariția unui câmp electric, având linii de câmp închise, într-o regiune cu flux magnetic variabil în timp* (Fig. VI. 10).

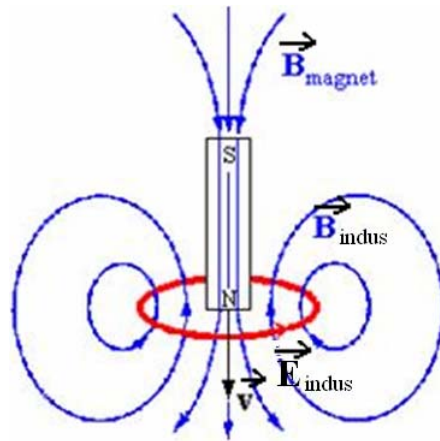


Fig. VI. 10. Apariția unui câmp electric, având linii de câmp închise, într-o regiune cu flux magnetic variabil în timp.

## 12) Legi de material

a) legea lui Ohm (forma locală):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{VI.53})$$

b) în medii dielectrice:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (\text{VI.54})$$

unde vectorul  $\vec{P}$  reprezintă *polarizația*, iar  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  este permitivitatea relativă (sau

constanta dielectrică) a mediului. Pentru a defini polarizația, pornim de la *dipolul electric* (sistem format din două sarcini electrice punctiforme, egale și de semn contrar, aflate la distanța  $d$ , Fig.VI.11) care este caracterizat prin momentul dipolar:  $\vec{p} = q\vec{d}$  (se măsoară în

C.m). Polarizația este momentul dipolar al unității de volum:  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$  (se măsoară în C/m<sup>2</sup>).

c) în medii magnetice:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (\text{VI.55})$$

unde vectorul  $\vec{M}$  reprezintă *magnetizația*, iar  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  este permeabilitatea relativă a mediului.

Pentru a defini magnetizația, pornim de la o *buclă de curent* (Fig.VI.12) care este caracterizată prin momentul magnetic:  $\vec{m} = IS\vec{n}$  (se măsoară în  $A \cdot m^2$ ). Magnetizația este momentul magnetic al unității de volum:  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}$  (se măsoară în  $A/m$ ).

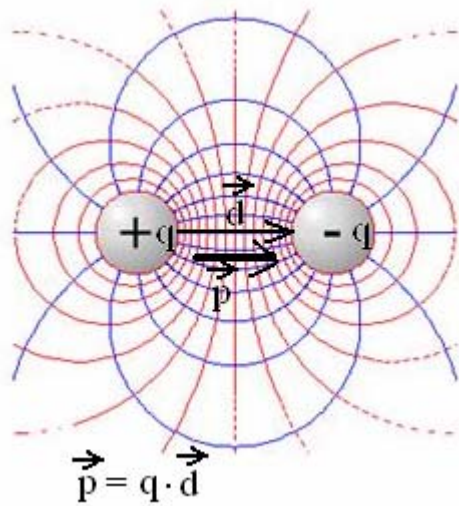


Fig. VI.11. Dipolul electric.

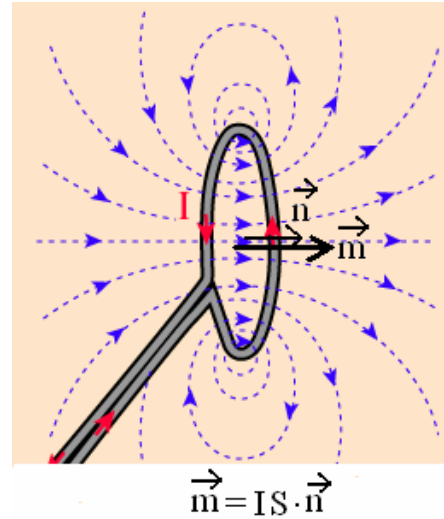


Fig. VI.11. Buclă de curent.

### VI.3. Ecuațiile Maxwell

reprezintă, într-o formă sintetică, legile electromagnetismului.

Forma diferențială:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libere}$  (VI.56)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (VI.57)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (VI.58)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (VI.59)$$

Forma integrală: 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q_{libere} = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho_{libere} dv \quad (VI.60)$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (VI.61)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{S} \right) \quad (VI.62)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Sigma_{\Gamma}} \vec{D} d\vec{S} \right) \quad (VI.63)$$

Pentru caracterizarea completă a fenomenelor electromagnetice se adaugă legile de material:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (VI.64)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (VI.65)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (VI.66)$$

#### VI.4. Energia câmpului electromagnetic (teorema Poynting)

Energia câmpului electromagnetic, evidențiată experimental, are anumite proprietăți exprimate în următoarele două postulate:

a) energia câmpului electromagnetic  $W$  este formată, aditiv, din energia câmpului electric și energia câmpului magnetic:

$$W = W_{el} + W_{mg} \quad (VI.67)$$

b) densitățile volumice de energie ale celor două câmpuri sunt:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \text{și} \quad w_{mg} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (VI.68)$$

Reunind cele două postulate obținem:

$$W = \iiint_v \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) dv \quad (VI.69)$$

integrarea efectuându-se pe domeniul (volumul  $v$ ) care conține energia  $W$ .



**Într-un sistem izolat energia câmpului electromagnetic se conservă.**

Într-un sistem neizolat câmpul electromagnetic schimbă energie atât cu corpurile din domeniul (volumul)  $v$  în care există câmpul cât și cu corpurile din exteriorul acestui domeniu, în acest ultim caz energia fiind transferată prin suprafața  $\Sigma$  care delimitează volumul considerat. În timpul  $dt$  energia câmpului scade cu  $dW$ . Viteza de variație a energiei se scrie sub forma:

$$-\frac{dW}{dt} = P_v + P_\Sigma \quad (\text{VI.70})$$

unde  $P_v$  și  $P_\Sigma$  au dimensiuni de putere și reprezintă cele două căi ale schimbului de energie:  $P_v$  - cu corpurile din volumul  $v$ , iar  $P_\Sigma$  cu cele din exteriorul acestuia. Să calculăm viteza de variație a energiei câmpului electromagnetic în cazul în care mediul este omogen și izotrop, iar suprafața  $\Sigma$  este imobilă. Folosim relația (VI.69) precum și relațiile de material  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , respectiv  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_v \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) dv = \iiint_v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D^2}{2\epsilon} + \frac{B^2}{2\mu} \right) dv = \\ &= \iiint_v \left( \frac{\vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv = \iiint_v \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv \end{aligned} \quad (\text{VI.71})$$

Din ecuațiile Maxwell (VI.58) și (VI.59) avem:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$  și  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{j}$ ; înlocuim în relația (VI.71); rezultă:

$$-\frac{dW}{dt} = \iiint_v \left[ \vec{H} \nabla \times \vec{E} - \vec{E} (\nabla \times \vec{H} - \vec{j}) \right] dv \quad (\text{VI.72})$$

Dar:  $\vec{H} \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \nabla \times \vec{H} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$ , deci:

$$-\frac{dW}{dt} = \iiint_v \left[ \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} \right] dv \quad (\text{VI.73})$$

Vectorul Poynting se definește prin:

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{VI.74})$$

Din ultimele două relații și din teorema Gauss - Ostrogradski (VI.8) obținem **teorema Poynting**:

$$-\frac{dW}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{S}_p d\vec{S} + \iiint_{v_{\Sigma}} (\vec{j} \cdot \vec{E}) dv \quad (\text{VI.75})$$

Prin identificarea termenilor din relațiile (VI.70) și (VI.75) rezultă:

$$P_v = \iiint_{v_{\Sigma}} (\vec{j} \cdot \vec{E}) dv \quad (\text{VI.76})$$

și 
$$P_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{S}_p d\vec{S} \quad (\text{VI.77})$$

**Interpretare:** 1° Relația (VI.76) reprezintă *legea Joule - Lenz* și indică un transfer ireversibil de energie, realizat totdeauna de la câmp la mediu (vectorii  $\vec{j}$  și  $\vec{E}$  au aceeași orientare într-un mediu omogen), transfer care se manifestă prin *efect termic* (încălzirea mediului).

2° Relația (VI.77) evidențiază un transport de energie prin suprafața  $\Sigma$  (într-un sens sau altul) de-a lungul unei direcții perpendiculare pe planul determinat de vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ , deci pe direcția vectorului Poynting; sensul de transfer este dat de sensul vectorului Poynting.

Enunțul teoremei Poynting: *Viteza de variație a energiei câmpului electromagnetic din volumul  $v$  este egală cu suma dintre fluxul vectorului Poynting prin suprafața  $\Sigma$  ce delimitează acest volum și puterea disipată în mediu prin efect termic.*

## VI.5. Unda electromagnetică în vid

În vid ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) ecuațiile Maxwell au următoarea formă:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{VI.78})$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{VI.79})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{VI.80})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{VI.81})$$

Vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  depind, fiecare, de coordonatele spațiale  $x, y, z$  și de timp ( $t$ ):  $\vec{E}(x, y, z, t)$ , respectiv  $\vec{H}(x, y, z, t)$ . Pentru a obține ecuația pe care o satisface vectorul  $\vec{E}$  aplicăm

operatorul "rotor" ecuației (VI.80), folosim relația (VI.5) pentru operatorul "dublu rotor" precum și relațiile (VI.78) și (VI.81). Rezultă:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.82})$$

adică vectorul  $\vec{E}$  verifică ecuația generală a undelor (relația III.2):  $\Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ .

Prin identificarea lor obținem formula vitezei undei electromagnetice *in vid*, notată  $c$  (notația  $v$  se folosește pentru viteza undei elmg. într-un mediu oarecare):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{VI.83})$$

Așadar: 
$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.84})$$

Relația (VI.84), scrisă pe componente, are forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.84'})$$

Pentru a obține ecuația pe care o satisface vectorul  $\vec{H}$  aplicăm operatorul "rotor" ecuației (VI.81), folosim relația (VI.5) pentru operatorul "dublu rotor" precum și relațiile (VI.79) și (VI.80). Rezultă:

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (\text{VI.85})$$

adică vectorul  $\vec{H}$  verifică și el ecuația generală a undelor, viteza de propagare fiind tot  $c$ . Deoarece, *in vid*, vectorul  $\vec{D}$  este direct proporțional cu  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ), iar vectorul  $\vec{B}$  este direct proporțional cu  $\vec{H}$  ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) rezultă că și vectorii  $\vec{D}$ , respectiv  $\vec{B}$  verifică ecuații de tipul (VI.82), (VI.85), adică ecuația undelor.

**Concluzie:** În vid câmpul electromagnetic se propagă sub forma undei electromagnetice care poate fi descrisă de oricare din vectorii  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ , viteza de propagare fiind  $c$ , dată de relația (VI.83).

## VI.6. Proprietățile undei electromagnetice în vid

Soluțiile ecuațiilor (VI.82) și (VI.85), sub forma *undei electromagnetice armonice plane*, sunt:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \text{ respectiv } \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (\text{VI.86})$$

unde  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_k$  este vectorul de undă.

Folosind forma (VI.86) calculăm  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  și  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ . Obținem:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = i\omega \vec{E}, \text{ deci putem înlocui, formal, operatorul } \frac{\partial}{\partial t} \text{ cu } i\omega.$$

Apoi:  $E_x = E_{0x} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]$  și  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = -ik_x E_{0x} \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] = -ik_x E_x$ ;

analog:  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = -ik_y E_y$  și  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_z E_z$ . Rezultă:  $\nabla \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$ , deci putem înlocui,

formal, operatorul  $\nabla$  cu  $-i\vec{k}$ .

1° Din relațiile (VI.78) și (VI.79), folosind echivalența formală  $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$ , rezultă:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \text{ adică } \vec{E} \perp \vec{k} \text{ și } \vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \text{ adică } \vec{H} \perp \vec{k} \quad (\text{VI.87})$$

*Interpretarea relațiilor (VI.87): unda electromagnetică este undă transversală* (oscilațiile mărimilor variabile au loc perpendicular pe direcția de propagare).

2° Din relațiile (VI.80) și (VI.81), folosind echivalențele formale  $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$  și  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$ ,

rezultă:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \text{ și } \vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon_0 \omega \vec{E} \quad (\text{VI.88})$$

*Interpretarea relațiilor (VI.88):*

a)  $\vec{H} \perp \vec{k}$  și  $\vec{E} \perp \vec{k}$ , deci *unda electromagnetică este undă transversală*

b)  $\vec{H} \perp \vec{E}$ , deci *vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  oscilează în plane perpendiculare*

c) **vectorii  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  formează un triedru drept, în această ordine** (sau în cele obținute prin permutări circulare)

d) relațiile (VI.88) fiind îndeplinite la orice moment de timp  $t$  și în orice punct  $\vec{r}$ , rezultă că **vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază** (aceasta este:  $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ , dacă faza inițială este nulă)

e) **modulele vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt direct proporționale:**

$$kE = \mu_0 \omega H \text{ sau } kH = \varepsilon_0 \omega E \quad (\text{VI.89})$$

Deoarece  $k = \frac{\omega}{c}$  și  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  obținem, folosind una din relațiile (VI.89):

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0} \text{ sau } E = Z_0 H \quad (\text{VI.90})$$

unde  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  este impedanța caracteristică a vidului.

*Observație:* Deoarece vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază, iar modulele lor sunt direct proporționale rezultă că și **amplitudinile lor  $E_0$  și  $H_0$  sunt direct proporționale.**

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0} = H_0\sqrt{\mu_0} \text{ sau } E_0 = Z_0 H_0 \quad (\text{VI.90}')$$

Fig.VI.9 prezintă dispunerea vectorilor  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  și variația în timp a vectorilor  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  pentru o undă electromagnetică plană care se propagă de-a lungul axei  $Ox$ ; componentele vectorilor undei sunt:  $\vec{k}(k, 0, 0)$ ,  $\vec{E}(0, E, 0)$  și  $\vec{H}(0, 0, H)$ , iar expresiile pentru  $E$  și  $H$  sunt:

$$E = E_{0y} \exp[i(\omega t - kx)] \text{ și } H = H_{0z} \exp[i(\omega t - kx)] \quad (\text{VI.91})$$

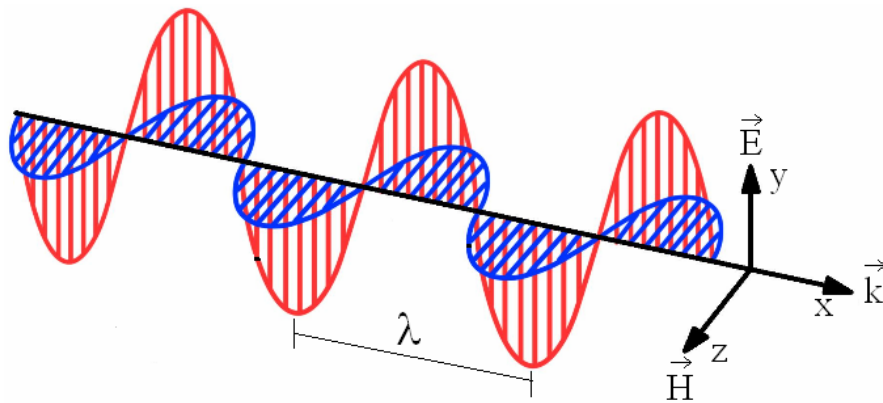


Fig.VI.9 Variația în timp a vectorilor  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  pentru o undă electromagnetică plană care se propagă de-a lungul axei  $Ox$ .

3° Calculăm densitățile volumice de energie  $w_{el}$  și  $w_{mg}$  corespunzătoare celor două câmpuri, pornind de la relațiile (VI.68) și ținând cont că, în vid,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{și} \quad w_{mg} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (\text{VI.92})$$

Din relațiile (VI.90) și (VI.92) rezultă:

$$w_{el} = w_{mg} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{VI.93})$$

**Densitățile volumice de energie  $w_{el}$  și  $w_{mg}$  corespunzătoare celor două câmpuri, electric și magnetic, din unda electromagnetică, sunt egale.**

4° Calculăm vectorul Poynting:

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} = EH \vec{u}_k = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{u}_k \quad (\text{VI.94})$$

**Modulul vectorului Poynting este direct proporțional cu pătratul intensității câmpului electric.** Bineînțeles, acest modul are aceeași proprietate și față de intensitatea câmpului magnetic, conform relației (VI.90).

5° *Intensitatea undei electromagnetice* se definește ca media temporală, pe o perioadă, a modulului vectorului Poynting:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}_p| dt \quad (\text{VI.95})$$

Considerăm partea reală a vectorului  $\vec{E}$  din relația (VI.91):  $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$  și

obținem:  $\int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{T}{2}$ , deci:

$$I = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \quad (\text{VI.96})$$

**Intensitatea undei electromagnetice este direct proporțională cu pătratul amplitudinii câmpului electric.** Bineînțeles, intensitatea are aceeași proprietate și față de amplitudinea câmpului magnetic [vezi relația (VI.90')].

*Observație:* Intensitatea unei electromagnetice se poate calcula și cu formula (IV.33) folosită la undele elastice. În acest caz:  $I = c\langle w \rangle$ , iar

$w = w_{el} + w_{mg} = 2w_{el} = \varepsilon_0 E^2$  [conform relației (VI.93)]. Rezultă:

$$I = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{VI.96'})$$

6° *Viteza de fază este egală cu viteza de grup* (vidul este un mediu nedispersiv):

$$v_f = v_g = c.$$

**Domeniul undelor electromagnetice** este foarte vast și cuprinde mai multe grupe de unde, clasificarea fiind făcută după frecvență ( $\nu$ ) sau după lungimea de undă din vid ( $\lambda = c/\nu$ ) (Fig. VI. 10).

1. *Undele radio (sau hertziene)*. Domeniul de frecvență al acestor unde este cuprins între zeci de hertzi până la un gigahertz (1 GHz =  $10^9$  Hz), adică au lungimea de undă cuprinsă între câțiva km până la 30 cm. Se utilizează, în special, în transmisiile radio și TV. După  $\lambda$ , aceste unde se subîmpart în unde lungi (2 km - 600 m), unde medii (600 m - 100 m) și unde scurte (100 m - 1 cm).

2. *Microundele* sunt generate, ca și undele radio, de instalații electronice. Lungimea de undă este cuprinsă între 30 cm și 1 mm. Corespunzător, frecvența variază între  $10^9$  -  $3 \cdot 10^{11}$  Hz. Se folosesc în sistemele de telecomunicații, în radare și în cercetarea științifică asupra proprietăților atomilor, moleculelor și ale gazelor ionizate. Aceste unde se subîmpart în unde decimetrice, centimetrice și milimetrice. Se mai folosesc și în domeniul casnic.

3. *Radiația infraroșie (IR)* cuprinde domeniul de lungimi de undă situat între 1 mm și  $7,8 \cdot 10^{-7}$  m (ca frecvență, între  $3 \cdot 10^{11}$  -  $4 \cdot 10^{14}$  Hz). În general, sunt produse de corpurile încălzite. În ultimul timp s-au realizat instalații electronice care emit unde infraroșii cu lungimea de undă submilimetrică.

4. *Radiația vizibilă (VIZ)* este acea parte din domeniul undelor electromagnetice care produce senzația luminoasă în ochiul uman. Lungimea de undă este cuprinsă, cu aproximație, între 760 nm și 400 nm (1 nm =  $10^{-9}$  m). Sunt studiate în capitolul numit "Optică".

5. *Radiația ultravioletă (UV)* are lungimea de undă cuprinsă în domeniul 3,8 nm și 0,6 nm. Această radiație este generată de moleculele și atomii dintr-o descărcare electrică în gaze. Soarele este o sursă puternică de radiații ultraviolete.

6. *Radiația X (sau Röntgen)* sunt produse în tuburi speciale în care un fascicul de electroni, accelerați cu ajutorul unei tensiuni electrice de ordinul zecilor de mii de volți, bombardează un electrod metalic.

7. *Radiația  $\gamma$*  constituie regiunea superioară ( $3 \cdot 10^{18}$  Hz -  $3 \cdot 10^{22}$  Hz) în clasificarea undelor electromagnetice în raport cu frecvența lor. Ele sunt produse de către nucleele atomilor.

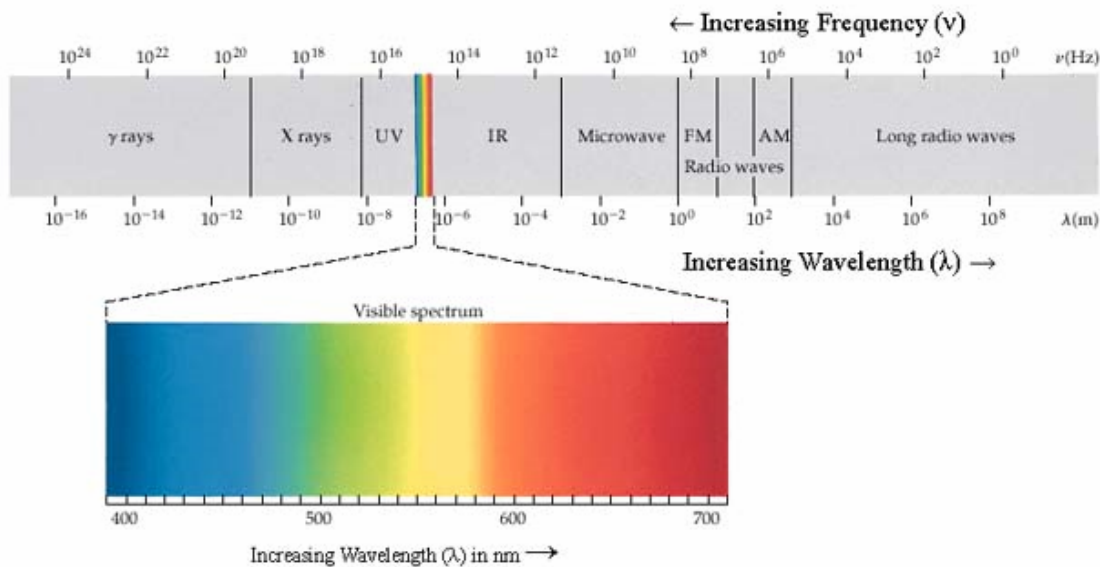


Fig. VI. 10. Domeniul undelor electromagnetice.

### VI. 7. Starea de polarizare a undelor electromagnetice

Deoarece efectele luminoase sunt produse de vectorul câmp electric  $\vec{E}$  analizăm modul său de oscilație. Planul determinat de vectorii  $\vec{k}$  și  $\vec{E}$  se numește *plan de oscilație*.

*Unda electromagnetică liniar polarizată* este unda în care vectorul câmp electric  $\vec{E}$  oscilează pe o *direcție unică* din planul perpendicular pe direcția de propagare (Fig.VI.11a).

*Unda electromagnetică nepolarizată* este unda în care vectorul câmp electric  $\vec{E}$  oscilează pe toate *direcțiile posibile (o infinitate)* din planul perpendicular pe direcția de propagare, *cu aceeași amplitudine* (Fig.VI.11b).

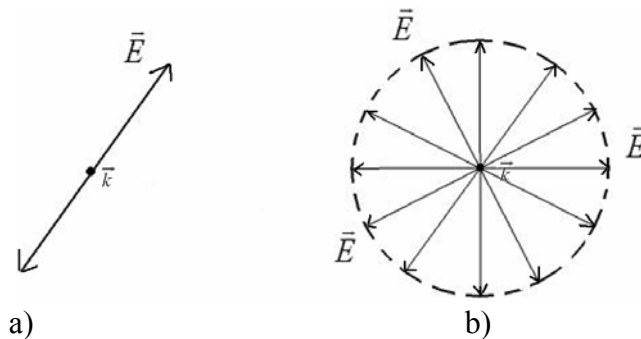


Fig.VI.11 Reprezentarea vectorului  $\vec{E}$  pentru unda electromagnetică: a) liniar polarizată; b) nepolarizată.

*Undele luminoase* (lumina este undă electromagnetică) *produse de sursele naturale* (Soare, flacăra) și *de sursele clasice/convenționale* (bec, tub de descărcare), dar **nu cele produse de laser sunt nepolarizate**. **Explicația** este următoarea: atomii și moleculele emit lumină prin tranziții între diferitele nivele energetice ale lor; numărul de atomi este de



ordinul  $10^{16}$ , iar timpul de emisie pentru fiecare este de ordinul  $10^{-8}$  s; fiecare undă luminoasă emisă are vectorul câmp electric de o anumită amplitudine, de o anumită orientare (direcție și sens) și cu o anumită fază inițială; atomii sunt în mișcare de agitație termică care este haotică, deci vectorii câmp electric ai undelor luminoase emise au toate orientările posibile; se obține astfel lumină nepolarizată.

Pe de altă parte, deoarece nu toți atomii emit în același timp, fazele inițiale ale undelor au valori necorelate; se obține, deci, lumină necoerentă.

*Unda electromagnetică polarizată eliptic*

Vectorul  $\vec{E}$  al unei unde electromagnetice poate fi considerat ca provenind din compunerea a doi vectori perpendiculari, în general defazați. Pentru o undă care se propagă pe axa  $Ox$  notăm acești vectori cu  $E_y$ , respectiv  $E_z$ , iar defazajul dintre ei cu  $\varphi_0$ . Expresiile lor sunt:

$$E_y = A \cos(\omega t - kx) \text{ și } E_z = B \cos(\omega t - kx - \varphi_0) \quad (\text{VI.97})$$

unde  $A = E_{0y}$  și  $B = E_{0z}$  sunt amplitudinile câmpului electric din cele două unde. Prin compunerea acestor două unde rezultă traiectoria descrisă de vârful vectorului câmp electric rezultat în planul perpendicular pe direcția de propagare:

$$\frac{E_y^2}{A^2} + \frac{E_z^2}{B^2} - 2 \frac{E_y E_z}{AB} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0 \quad (\text{VI.98})$$

Relația (VI.98) reprezintă ecuația unei elipse de semiaxe  $A$ ,  $B$  (este analogă cu relația (II.67) din Cap. II Oscilații). Fig.VI.12 prezintă traiectoria descrisă în spațiu de vârful vectorului  $\vec{E}$  al unei unde polarizate eliptic care se propagă de-a lungul axei  $Ox$ . Unda este polarizată eliptic stânga dacă observatorul, privind în sens contrar axei  $Ox$ , vede vârful vectorului  $\vec{E}$  parcurgând elipsa din planul  $yOz$  în sens trigonometric (antiorar).

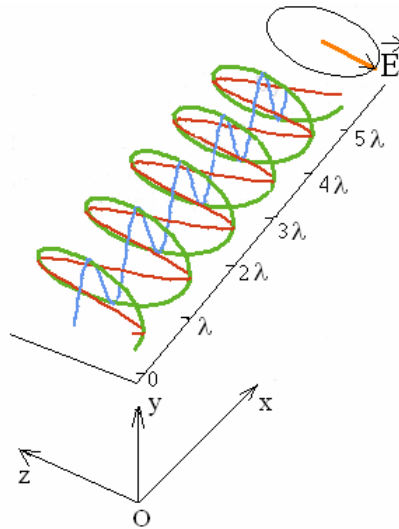


Fig.VI.12. Undă electromagnetică eliptic polarizată (vârful vectorului câmp electric  $\vec{E}$  descrie o elipsă în planul  $yOz$ ; direcția de propagare este  $Ox$ ).

*Cazuri particulare:* a) dacă  $\varphi_0 = p\pi$ , cu  $p \in Z$  (adică undele componente  $E_y, E_z$  sunt în concordanță sau în opoziție de fază) traiectoria este o dreaptă:

$$E_y = \pm \frac{A}{B} E_z, \quad (\text{VI.98}')$$

deci lumina este *liniar polarizată*.

b)  $\varphi_0 = (2p+1)\pi/2$ , cu  $p \in Z$  (adică undele componente  $E_y, E_z$  sunt în cuadratură de fază) și  $A = B = E_0$  (amplitudini egale) traiectoria este un cerc:

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2, \quad (\text{VI.98}'')$$

deci lumina este *circular polarizată*.

**Unda eliptic polarizată** (incluzând, evident, cazurile particulare) este o **undă total polarizată**.

*Unda electromagnetică parțial polarizată* reprezintă un amestec de stări de polarizare, de exemplu o suprapunere a unei unde liniar polarizate cu o undă nepolarizată.

*Gradul de polarizare* se definește prin:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (\text{VI.99})$$

unde  $I_{\max}$  și  $I_{\min}$  sunt intensitatea luminoasă maximă, respectiv minimă. Evident:  $P \in [0, 1]$ ; pentru lumina nepolarizată  $P = 0$ , iar pentru lumina liniar, eliptic sau circular polarizată  $P = 1$ . **Exemplu:** lucrarea de laborator "Studiul luminii polarizate. Legea lui Malus".

Pentru a obține lumină parțial sau total polarizată din lumină naturală (nepolarizată) se folosesc următoarele metode:

- prin reflexie - refracție la suprafața de separare a două medii dielectrice;
- prin birefrință (naturală sau indusă).

## VI.8. Reflexia și refracția undelor electromagnetice

### VI.8.1. Legile reflexiei și refracției undelor electromagnetice

La suprafața de separare a două medii dielectrice (caracterizate de  $\varepsilon_1, \mu_1$  respectiv  $\varepsilon_2, \mu_2$ ) vectorii  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$  se comportă diferit. Pentru  $\vec{D}$  și  $\vec{B}$  componentele normale la suprafața de separare sunt continue ( $D_{1n} = D_{2n}$  și  $B_{1n} = B_{2n}$ ), iar pentru  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  componentele tangente la suprafața de separare sunt continue ( $E_{1t} = E_{2t}$  și  $H_{1t} = H_{2t}$ ).

*Planul de incidență* este planul determinat de direcția de propagare a unei incidente (indicată de viteza  $\vec{v}_i$ ) și normala NN' la suprafața de separare dintre cele două medii, în punctul de incidență (notat O). *Unghiul de incidență*, notat  $\theta_i$ , este unghiul format de

direcția de propagare a undei incidente cu normala NN', *unghiul de reflexie*, notat  $\theta_r$ , este unghiul format de direcția de propagare a undei reflectate (indicată de viteza  $\vec{v}_r$ ) cu normala NN', iar *unghiul de refracție*, notat  $\theta_t$ , este unghiul format de direcția de propagare a undei refractate/transmise (indicată de viteza  $\vec{v}_t$ ) cu normala NN'.

*Indicele absolut de refracție*,  $n$ , al unui mediu este raportul dintre viteza luminii în vid,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  și viteza luminii în acel mediu  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ :

$$n = \frac{c}{v} > 1 \quad (\text{VI.100})$$

Indicele relativ de refracție al mediului 2 față de mediul 1 este:  $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  (VI.100')

Folosind condițiile de continuitate pentru componentele indicate mai sus se obțin următoarele *legi* pentru *fenomenul de reflexie - refracție*:

- a) unda reflectată, unda refractată și unda incidentă au aceeași pulsație  $\omega$ , deci și aceeași frecvență  $\nu$ ;
- b) direcțiile de propagare ale undei reflectate, respectiv refractate se află în planul de incidență;
- c) unghiul de reflexie este egal cu cel de incidență:

$$\theta_r = \theta_i \quad (\text{legea reflexiei}) \quad (\text{VI.101})$$

d) produsul dintre indicele absolut de refracție și sinusul unghiului format de direcția de propagare a undei cu normala NN' este același în cele două medii (este invariant la trecerea undei dintr-un mediu în altul):

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (\text{legea refracției}) \quad (\text{VI.102})$$

### VI.8.2. Coeficienții Fresnel

caracterizează relațiile dintre amplitudinea undei reflectate, respectiv refractate și amplitudinea undei incidente. Indiferent de orientarea vectorului câmp electric al undei incidente  $\vec{E}_i$  față de planul de incidență, acest vector poate fi descompus în două componente, una perpendiculară pe planul de incidență (notată  $E_{i,\perp}$ ) și una cuprinsă în planul de incidență (notată  $E_{i,\parallel}$ ). Evident, componenta  $E_{i,\perp}$  a câmpului electric este însoțită de componenta  $H_{i,\parallel}$  a câmpului magnetic, iar  $E_{i,\parallel}$  este însoțită de  $H_{i,\perp}$ . Trebuie, deci, să studiem ambele cazuri:  $[E_{i,\perp}, H_{i,\parallel}]$  și  $[E_{i,\parallel}, H_{i,\perp}]$ .

*Notații:*  $a_{i,\perp}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde incidente în cazul  $E_{i,\perp}$   
 $a_{i,\parallel}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde incidente în cazul  $E_{i,\parallel}$   
 $a_{r,\perp}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde reflectate în cazul  $E_{i,\perp}$   
 $a_{r,\parallel}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde reflectate în cazul  $E_{i,\parallel}$   
 $a_{t,\perp}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde refractate în cazul  $E_{i,\perp}$   
 $a_{t,\parallel}$  = amplitudinea intensității câmpului electric al unde refractate în cazul  $E_{i,\parallel}$   
 $r = \frac{a_r}{a_i}$  = coeficient Fresnel de reflexie;  $t = \frac{a_t}{a_i}$  = coeficient Fresnel de transmisie.

**Cazul I:**  $[E_{i,\perp}, H_{i,\parallel}]$ , Fig.VI.13a

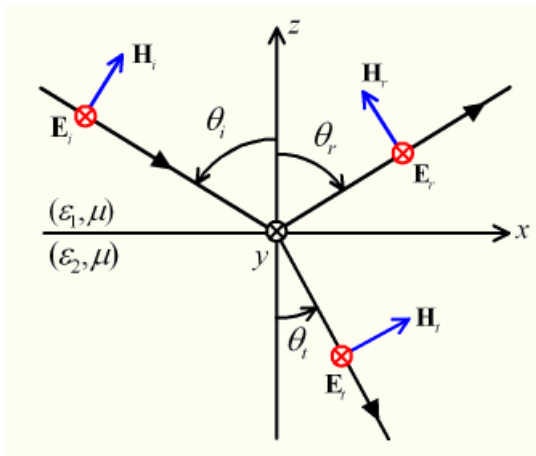
$$r_{\perp} = \frac{a_{r,\perp}}{a_{i,\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}; \quad t_{\perp} = \frac{a_{t,\perp}}{a_{i,\perp}} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (\text{VI.103; 103'})$$

**Cazul II:**  $[E_{i,\parallel}, H_{i,\perp}]$ , Fig.VI.13b

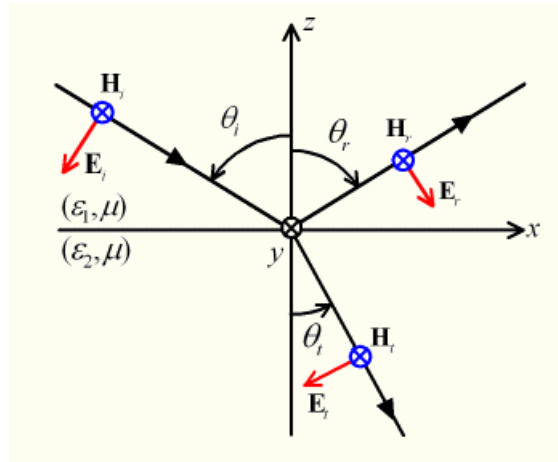
$$r_{\parallel} = \frac{a_{r,\parallel}}{a_{i,\parallel}} = \frac{\text{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\text{tg}(\theta_i + \theta_t)}; \quad t_{\parallel} = \frac{a_{t,\parallel}}{a_{i,\parallel}} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (\text{VI.104; 104'})$$

*Relații între coeficienții Fresnel*

$$r_{\parallel} = -r_{\perp} \frac{\cos(\theta_i + \theta_t)}{\cos(\theta_i - \theta_t)}; \quad t_{\perp} = t_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t) < t_p \quad (\text{VI.105; 105'})$$



a)



b)

Fig. VI.13. Reflexia-refracția undelor electromagnetice la suprafața de separare a două medii dielectrice:  
 a) cazul  $[E_{i,\perp}, H_{i,\parallel}]$ ; b) cazul  $[E_{i,\parallel}, H_{i,\perp}]$ .

**Discuție:**

1° amplitudinile  $a_r$  și  $a_t$  depind de  $a_i$ ,  $\theta_i$  și  $\theta_t$  (sau de  $a_i$ ,  $\theta_i$ ,  $n_1$  și  $n_2$ );

2° semnul amplitudinii  $a_r$  a undei reflectate:

- pentru  $n_2 > n_1$  rezultă din legea refracției că:  $\theta_t < \theta_i$  (raza, în cazul undei luminoase, se apropie de normală); atunci:  $a_{r,\perp} < 0$ , iar  $a_{r,\parallel} > 0$  (amplitudinile celor două componente ale câmpului electric au semne contrare); deoarece  $(-1) = e^{i\pi}$  se spune că vectorul  $\vec{E}_{r,\perp}$  este defazat cu  $\pi$  (sau are un salt de fază egal cu  $\pi$ ) față de vectorul  $\vec{E}_{i,\perp}$ ; componenta paralelă nu are un astfel de salt; fenomenul se numește *reflexie cu schimbare de sens*;

- pentru  $n_2 < n_1$  rezultă din legea refracției că:  $\theta_t > \theta_i$  (raza, în cazul undei luminoase, se depărtează de normală); în acest caz  $a_{r,\perp} > 0$ , iar  $a_{r,\parallel} < 0$ ; deoarece  $(-1) = e^{i\pi}$  se spune că vectorul  $\vec{E}_{r,\parallel}$  este defazat cu  $\pi$  față de vectorul  $\vec{E}_{i,\parallel}$ , iar componenta perpendiculară nu prezintă acest defazaj;

3° semnul amplitudinii  $a_t$  a undei refractate:  $a_t > 0$  pentru ambele componente, deci vectorul  $\vec{E}_t$  nu prezintă defazaj față de vectorul  $\vec{E}_i$ ;

4° *starea de polarizare a undei luminoase reflectate*: pentru fiecare pereche de medii ( $n_1$ ,  $n_2$ ) există un unghi de incidență  $\theta_i = \theta_B$  astfel încât:

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{VI.106})$$

ceea ce implică  $r_{\parallel} = 0$  și deci  $a_{r,\parallel} = 0$ ; în consecință în unda reflectată există **numai**  $a_{r,\perp}$ , așadar această undă este **liniar polarizată (total polarizată)**, direcția unică de oscilație a vectorului câmp electric fiind cea perpendiculară pe planul de incidență (evident, intensitatea câmpului magnetic este paralelă cu planul de incidență,  $H_{\parallel}$ ); unghiul  $\theta_B$  se numește *unghi Brewster*. Folosind legea refracției (VI.102) și relația (VI.106) se obține *legea Brewster*:

$$\text{tg } \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{VI.107})$$

**Concluzie: Dacă unghiul de incidență este  $\theta_i = \theta_B = \text{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  unda reflectată este**

**liniar polarizată având vectorul câmp electric perpendicular pe planul de incidență, iar pentru  $\theta_i \neq \theta_B$  unda reflectată este parțial polarizată având ca direcție preferențială pentru câmpul electric direcția indicată mai sus.**

4° *starea de polarizare a undei luminoase refractate (transmise)*: din relația (VI.104') rezultă că în unda refractată amplitudinea componentei paralele cu planul de incidență este mai mare decât a celei perpendiculare, dar nu există un unghi  $\theta_i$  pentru care  $t_{\perp} = 0$ .

**Concluzie: Unda transmisă nu poate fi liniar polarizată, ci numai parțial polarizată, având ca direcție preferențială de oscilație pentru câmpul electric direcția paralelă cu planul de incidență.**

Pentru a caracteriza din punct de vedere **energetic** fenomenul de reflexie - refracție se definesc mărimile reflectanță și transmitanță:

- **reflectanța**  $\mathfrak{R}$  este raportul dintre fluxul luminos reflectat și fluxul luminos incident:

$$\mathfrak{R} = \frac{\Phi_r}{\Phi_i} = \frac{a_r^2}{a_i^2} = r^2 \quad (\text{VI.108})$$

- **transmitanța**  $\mathfrak{T}$  este raportul dintre fluxul luminos refractat (transmis) și fluxul luminos incident:

$$\mathfrak{T} = \frac{\Phi_t}{\Phi_i} = \frac{a_t^2}{a_i^2} \cdot \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} = t^2 \cdot \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \quad (\text{VI.109})$$

Relațiile (VI.108) și (VI.109) sunt valabile pentru fiecare componentă  $E_{\perp}$ ,  $E_{\parallel}$ :

$$\mathfrak{R}_{\parallel} = r_{\parallel}^2; \quad \mathfrak{R}_{\perp} = r_{\perp}^2 \quad (\text{VI.108}')$$

$$\mathfrak{T}_{\parallel} = t_{\parallel}^2 \frac{n_2^2 \cos^2 \theta_t}{n_1^2 \cos^2 \theta_i}; \quad \mathfrak{T}_{\perp} = t_{\perp}^2 \frac{n_2^2 \cos^2 \theta_t}{n_1^2 \cos^2 \theta_i} \quad (\text{VI.109}')$$

Se constată că: 
$$\mathfrak{R}_{\parallel} = \mathfrak{R}_{\perp} \frac{\cos^2(\theta_i + \theta_t)}{\cos^2(\theta_i - \theta_t)} < \mathfrak{R}_{\perp} \quad (\text{VI.110})$$

De asemenea, prin calcul direct, folosind relațiile (VI.108'), (VI.109') și (VI.103; VI.103'; VI.104; VI.104') rezultă:

$$\mathfrak{R}_{\parallel} + \mathfrak{T}_{\parallel} = 1 \quad \text{și} \quad \mathfrak{R}_{\perp} + \mathfrak{T}_{\perp} = 1 \quad (\text{VI.111})$$

care se interpretează ca **legi de conservare a energiei undei luminoase la fenomenul de reflexie - refracție.**

### VI.8.3. Reflexia totală

În cazul  $n_2 < n_1$  raza luminoasă se depărtează de normală (vezi legea refracției), dar unghiul maxim de refracție este  $\theta_{t,\max} = 90^\circ$ . Unghiul de incidență corespunzător unghiului maxim de refracție se numește unghi-limită ( $\ell$ ) și verifică relația:

$$\sin \ell = \frac{n_2}{n_1} < 1 \quad (\text{VI.112})$$

Dacă  $\theta_i \leq \ell$  există rază refractată (transmisă), dar dacă  $\theta_i > \ell$  (și, bineînțeles,  $n_2 < n_1$ ) se produce fenomenul de *reflexie totală*, adică toată energia undei este repartizată, practic, în unda reflectată.

De fapt, la reflexie totală, în mediul al doilea se obține, pe distanță mică, o undă numită *undă evanescentă* (Fig.VI.14) al cărei câmp electric are expresia:

$$E_t = a_t \exp(-\beta z) \exp[i(\omega t - \alpha x)] \quad (\text{VI.113})$$

unde  $a_t$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  sunt constante pozitive, iar axa  $Ox$  este aleasă de-a lungul suprafeței de separare.

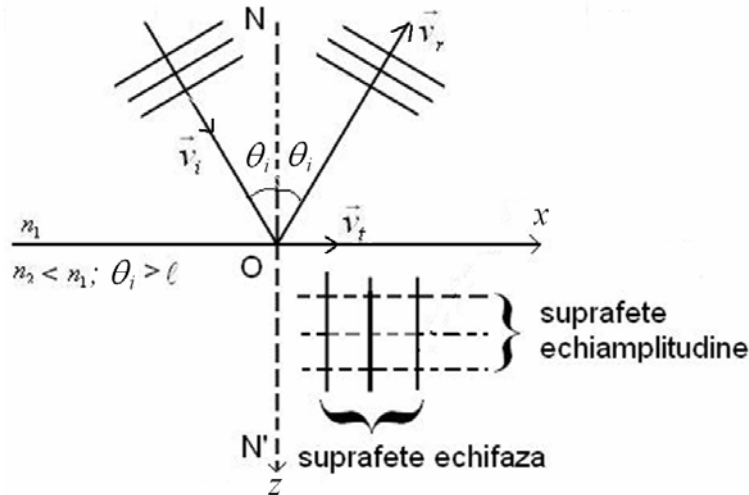


Fig. VI. 14. Reprezentarea fenomenului de reflexie totală.

#### *Proprietățile undei evanescente*

- se propagă de-a lungul suprafeței de separare când această suprafață este plană (în cazul general se propagă pe direcția tangentă la suprafața de separare);
- suprafețele echiamplitudine sunt perpendiculare pe cele echifază;
- amplitudinea scade pe o direcție perpendiculară pe suprafața de separare (axa  $Oz$  în Fig.VI.13);
- calculăm reflectanța  $\mathfrak{R}$  și obținem  $\mathfrak{R} = 1$ , deci transmitanța  $\mathfrak{T} = 0$ , adică, *din punct de vedere energetic, nu există undă transmisă*; acest fapt se interpretează astfel: unda evanescentă se întoarce în mediul 1 din diferite plane situate în imediata vecinătate a suprafeței de separare.

### Aplicații:

a) *prisma cu reflexie totală*: este o prismă din sticlă ( $n = 1,5$ ); unghiul-limită la suprafața de separare sticlă-aer este:  $\ell = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\frac{2}{3} \cong 41,8^\circ$ ; prisma are secțiunea principală de

forma unui triunghi dreptunghic isoscel (Fig.VI.15a); o rază luminoasă care intră perpendicular pe o catetă suferă *reflexie totală* pe ipotenuză ( $\theta_i = 45^\circ > \ell$ ) și iese perpendicular pe cealaltă catetă (deviație de  $90^\circ$ ), fără pierdere de energie la reflexie; se folosesc în construcția aparatelor optice (de ex. periscop)

b) *fibrele optice*: sunt ghiduri de unde în domeniul vizibil, formate dintr-un miez de sticlă cu indicele de refracție  $n_1$ , înconjurat de un înveliș (cămașă) cu indicele de refracție  $n_2 < n_1$  (Fig.VI.15b); diametrul unei astfel de fibre este mai mic de 0,1mm; deoarece  $\theta_i > \arcsin\frac{n_2}{n_1}$  fasciculul luminos suferă *multiple reflexii totale* la suprafața de separare

dintre miez și cămașă, fără pierderi de energie; se folosesc în transmiterea optică (prin radiație laser) a informației.

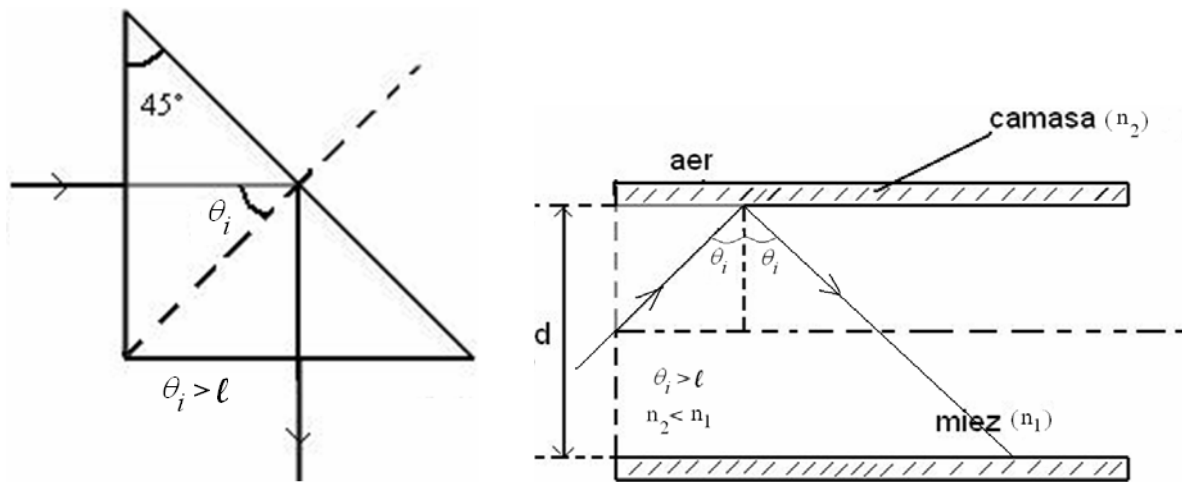


Fig.VI.15. a) Prisma cu reflexie totală; b) Fibra optică.

## VI.9. Interferența luminii

În teoria generală a undelor, la suprapunerea a două unde coerente, s-a obținut pentru intensitatea unei rezultante expresia:  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$  unde defazajul dintre cele două unde  $\Delta\varphi = k\Delta x + \Delta\varphi_0$  este constant în timp (condiția de coerență). Mai general:  $k\Delta x = k\delta$ , unde  $\delta$  este diferența de drum optic (drumul optic este produsul dintre lungimea drumului geometric și indicele absolut de refracție).



### VI.9.1. Coerența undelor luminoase

este limitată de două efecte:

- caracterul discontinuu al emisieii unei luminoase într-o sursă, fie ea chiar punctiformă; sursa emite *grupuri de unde*, ceea ce condiționează coerența temporală a undelor;
- caracterul nepunctiform al surselor reale, aceasta condiționând coerența spațială a undelor.

#### a) Coerența temporală

Fie S o sursă luminoasă punctiformă. Pentru definirea *timpului de coerență* ( $\tau_c$ ) folosim una din relațiile de incertitudine a grupului de unde [relația (III.51)]:  $\Delta t \Delta \omega \cong 2\pi$ . Împărțind cu  $2\pi$  obținem:  $\Delta \nu \cdot \tau_c \cong 1$ , deci:

$$\tau_c \cong \frac{1}{\Delta \nu} \quad (\text{VI.114})$$

unde  $\Delta \nu$  este intervalul (banda) de frecvență.

În concluzie, într-un punct dat din spațiu ( $x$  fixat) există o relație "bine determinată" între amplitudinile și fazele unei la două momente diferite de timp ( $t_2 \neq t_1$ ) dacă diferența dintre aceste momente este mai mică decât timpul de coerență ( $t_2 - t_1 < \tau_c$ ). *Lungimea de coerență*  $\ell_c$  reprezintă valoarea maximă a diferenței de drum optic pentru care se mai produce fenomenul de interferență ( $\delta < \ell_c$ ). Formula ei este:

$$\ell_c = c \cdot \tau_c \quad (\text{VI.114'})$$

#### b) Coerența spațială

O sursă luminoasă reală este formată dintr-o multitudine de oscilatori punctiformi care, în general, emit independent unul de altul.

Între amplitudinile și fazele undelor aflate, la un moment de timp dat ( $t$  fixat), în două puncte diferite din spațiu ( $x_2 \neq x_1$ ), există o relație "bine determinată" dacă diferența de drum optic dintre drumurile străbătute de unde, de la o sursă punctiformă la cele două puncte considerate, este mai mică decât lungimea de undă ( $\delta < \lambda$ ); se obține astfel o limitare a dimensiunilor sursei.

### VI.9.2. Dispozitivele interferențiale

sunt acele dispozitive în care sunt realizate condițiile de coerență, deci se obțin unde coerente. Aceasta se face prin:

- 1) divizarea frontului de undă (exemplu: dispozitivul Young - vezi lucrarea de laborator cu același nume);
- 2) divizarea amplitudinii (exemplu: lama cu fețe plan-paralele).

#### **Dispozitivul Young**

este schematizat în Fig.VI.16:  $S_1$  și  $S_2$  sunt surse punctiforme de pe același front de undă, deci sunt coerente;  $d$  este distanța dintre ele;  $D$  este distanța dintre planul surselor coerente și planul (ecranul) de observare a figurii de interferență; construim  $S_1A \perp S_2P$ .

Deoarece  $D \gg d$  segmentul  $S_2A$  este aproximativ egal cu diferența de drum geometric  $\Delta r = r_2 - r_1$ , unghiurile  $S_2S_1A$  și  $OPM$  sunt aproximativ egale între ele și foarte mici; folosim pentru ele notația  $\theta$ . Rezultă:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{D}$  și  $\sin \theta = \frac{\Delta r}{d}$ ; apoi:  $\Delta r \cong \frac{xd}{D}$ .

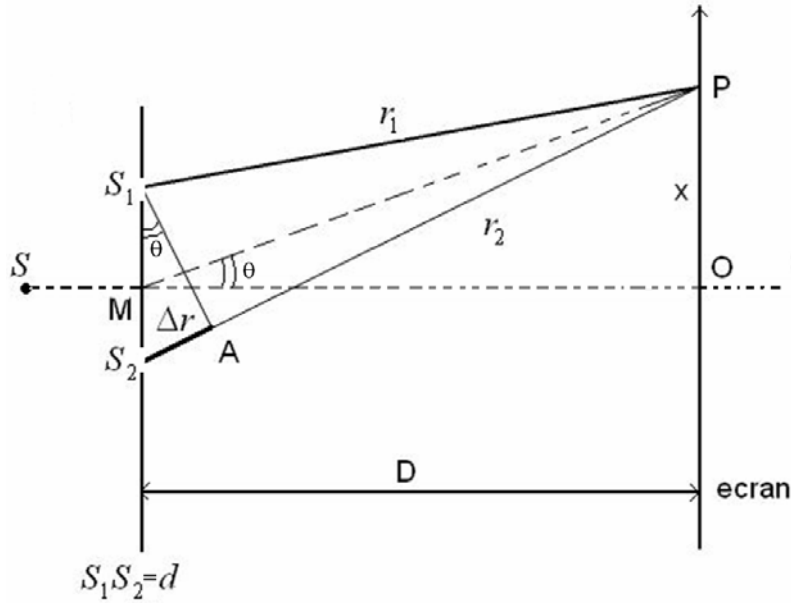


Fig.VI.16. Schema dispozitivului Young.

Pe ecran se observă *figura de interferență* (Fig. VI.17) formată din maxime și minime ale intensității luminii:

- maxime ale intensității undei (franje luminoase), pentru  $\Delta r = p\lambda$ , deci în punctele de coordonată:

$$x_{p, \max} = \frac{p\lambda D}{d}, \text{ unde } p \in Z \quad (\text{VI.115})$$

- minime ale intensității undei (franje întunecate; corespun unor minime nule), pentru  $\Delta r = \frac{(2p+1)\lambda}{2}$ , deci în punctele de coordonată:

$$x_{p, \min} = \frac{(2p+1)\lambda D}{2d}, \text{ unde } p \in Z \quad (\text{VI.116})$$

*Interfranja i* (distanța dintre două maxime consecutive sau dintre două minime consecutive) este:

$$i = x_{p+1, \max} - x_{p, \max} = \frac{\lambda D}{d} \quad (\text{VI.117})$$

Pozițiile maximelor și ale minimelor se rescriu, în funcție de interfranță, sub forma:

$$x_{p, \max} = p \cdot i \quad \text{și} \quad x_{p, \min} = \frac{(2p + 1) \cdot i}{2} \quad (\text{VI.118})$$

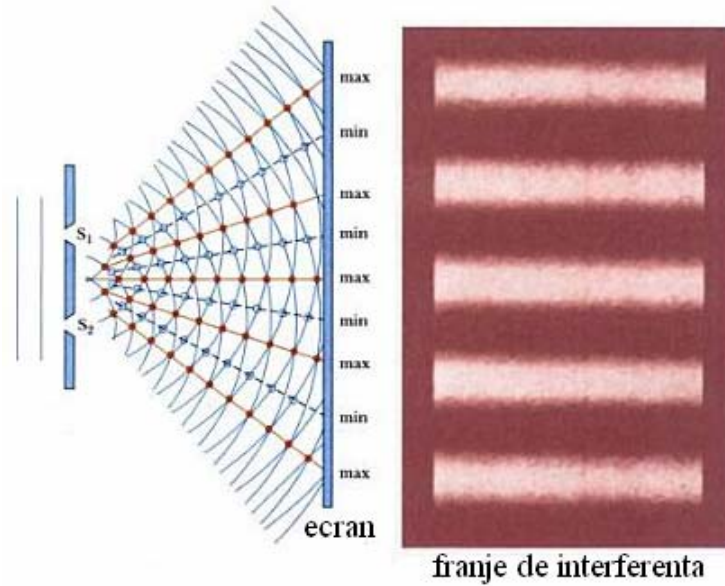


Fig. VI. 17. Franje de interferență obținute cu dispozitivul Young (dispozitiv inteferențial bazat pe divizarea frontului de undă).

**Aplicație:** determinarea grosimilor foarte mici (de ordinul zecimilor de micrometri) sau a indicelui de refracție, pentru medii transparente. Așezând o lamelă transparentă de grosime  $e$  și indice de refracție  $n$  în calea unuia din fascicule (de exemplu, la  $S_1$ ; Fig. VI.18) se produce o deplasare a franjelor pe ecran; ea depinde de: lungimea de undă a luminii ( $\lambda$ ), grosimea lamelei ( $e$ ) și de indicele de refracție  $n$  al acesteia; deplasarea se măsoară experimental. Diferența de drum optic dintre razele care interferă în punctul de coordonată  $x$ , în prezența lamei, este:  $\delta = \Delta r - e(n-1) = xd/D - e(n-1)$ ; din condiția de maxim:  $\delta = p\lambda$  rezultă noile poziții ale maximelor:  $x'_{p, \max} = \frac{p\lambda D}{d} + \frac{eD(n-1)}{d}$ . Deplasarea maximelor pe ecran este:  $\Delta x = x'_{p, \max} - x_{p, \max} = eD(n-1)/d$ ; exemplu:  $\Delta x = 3 \text{ i}$ ; rezultă:  $e = 3\lambda/(n-1)$ .

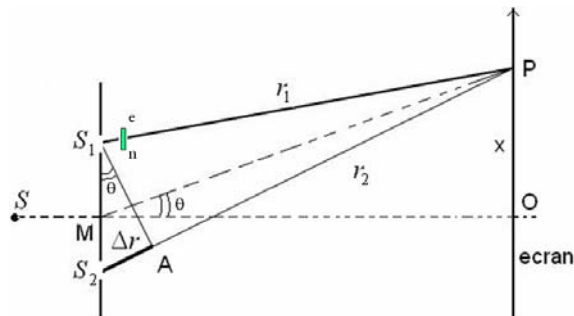


Fig. VI. 18. Determinarea grosimilor submicrometrice cu dispozitivul Young.

### Lama cu fețe plan - paralele

Drumul razelor de lumină este prezentat în Fig.VI.19. Vom calcula diferența de drum optic în două cazuri:

- pentru razele care interferă în reflexie (razele 2 și 3) diferența de drum optic este:

$$\delta_{32} = n(AB + BC) - \left(AD - \frac{\lambda}{2}\right), \text{ unde: } AB = BC = \frac{d}{\cos \theta_t}; \quad \operatorname{tg} \theta_t = \frac{AC}{2d}; \quad \sin \theta_i = \frac{AD}{AC};$$

$\sin \theta_i = n \sin \theta_t$ ; din drumul optic al razei 2 se scade  $\lambda/2$  deoarece ea suferă o reflexie cu schimbare de sens (salt de fază egal cu  $\pi$ , echivalent cu o pierdere de  $\lambda/2$ ); rezultă:

$$\delta_{32} = 2nd \cos \theta_t + \lambda/2 \quad (\text{VI.119})$$

- pentru razele care interferă în transmisie (razele 4 și 5) diferența de drum optic este:

$$\delta_{54} = n(BC + CE) - BF, \text{ unde: } CE = BC = AB; \quad BF = AD; \text{ rezultă:}$$

$$\delta_{54} = 2nd \cos \theta_t \quad (\text{VI.120})$$

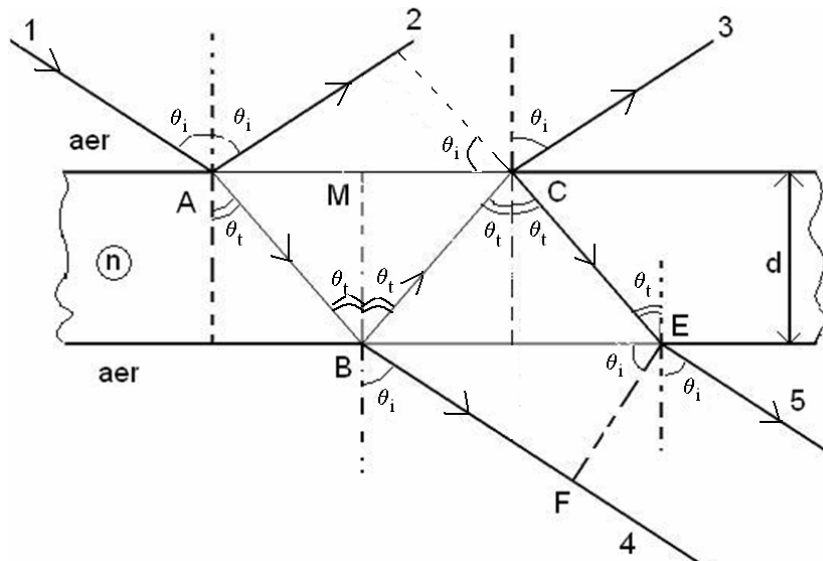


Fig.VI.19. Mersul razelor de lumină în lama cu fețe plan-paralele (dispozitiv interferențial bazat pe divizarea amplitudinii).

#### Aplicații:

1) *strat antireflectător* - anihilează, prin interferență, o radiație luminoasă cu o anumită lungime de undă, deci reduce pierderile de energie datorate reflexiei; se depune pe suprafețele lentilelor din aparatele optice (la obiectivul unui aparat fotografic obișnuit există opt suprafețe de separare aer - sticlă și pierderile de energie prin reflexie ar fi de 40% din fasciculul luminos incident); considerăm situația de incidență normală ( $i_1 = 0$  și, în consecință,  $i_2 = 0$ ); indicele de reflexie al materialului lentilei este  $n = 1,8$ , iar al stratului antireflectător, de criolit (fluorură de magneziu),  $n_{cr} = 1,35$ ; impunem condiția de *minim de*

interferență pentru razele reflectate:  $\delta_{32} = 2n_{cr}d = \frac{(2p+1)\lambda}{2}$ ; grosimea minimă a stratului de criolit este:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_{cr}} \quad (\text{VI.121})$$

2) *strat perfect reflectător* - întărește, prin interferență, o radiație luminoasă cu o anumită lungime de undă; impunem condiția de *maxim de interferență* pentru razele reflectate:

$$\delta_{32} = 2nd = p\lambda ; \text{ grosimea minimă a stratului este: } d_{\min} = \lambda/(2n). \quad (\text{VI.122})$$

## VI.10. Unda electromagnetică în mediu anizotrop. Birefrința

### VI.10.1 Birefrința naturală

Într-un mediu dielectric anizotrop permitivitatea electrică  $\epsilon$  este un tensor reprezentat printr-o matrice  $3 \times 3$ . Pentru un sistem de axe convenabil ales matricea permitivității este diagonalizată:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad (\text{VI.123})$$

Deosebim două cazuri:

- a)  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z \rightarrow$  cristal uniax (prezintă o singură axă optică);
- b)  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z \rightarrow$  cristal biax (prezintă două axe optice).

Relația dintre inducția electrică  $\vec{D}$  și intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  este:

$$\vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \vec{E} \quad (\text{VI.124})$$

adică vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$  nu mai sunt paraleli (ca în mediul dielectric ideal).

În consecință, unda electromagnetică trebuie caracterizată, în mediul anizotrop, prin cel puțin trei vectori și anume:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$  (al patrulea,  $\vec{B}$ , rămâne paralel cu  $\vec{H}$ ). Orientarea lor este prezentată în Fig.VI.20 unde:

- $\vec{u}_N$  este perpendicular pe vectorii  $\vec{D}$  și  $\vec{H}$ , fiind versorul direcției de propagare a suprafețelor echifază;
- $\vec{u}_{S_p}$  este versorul vectorului Poynting  $\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}$ , adică versorul direcției de transfer a energiei.

Unghiul dintre versorii  $\vec{u}_N$  și  $\vec{u}_{S_P}$  este egal cu cel dintre vectorii inducție electrică  $\vec{D}$  și intensitate a câmpului electric  $\vec{E}$ .

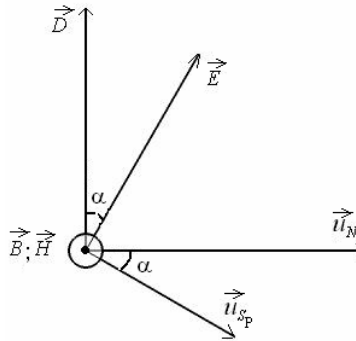


Fig.VI.20. Dispunerea vectorilor caracteristici unei electromagnetice într-un mediu anizotrop.

Folosind ecuațiile lui Maxwell pentru un mediu anizotrop (de exemplu, un **cristal uniax**) se obțin următoarele **rezultate**:

1° Într-un mediu anizotrop se propagă simultan *două unde electromagnetice* având vectorii intensitate a câmpului magnetic în plane perpendiculare; ele se numesc:

- *unda ordinară* - are aceeași viteză de fază în toate direcțiile, notată  $v_o$ ;
- *unda extraordinară* - are viteze de fază diferite pe direcții diferite; de exemplu, pentru un cristal uniax:

$$v_y = v_x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_x \mu}} \neq v_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_z \mu}} \quad (\text{VI.125})$$

Direcția după care unda extraordinară are aceeași viteză de fază cu cea ordinară se numește *axă optică* (în exemplul dat este  $Oz$ ); notații:  $v_z = v_o$  (viteza undei ordinare) și  $v_x = v_y = v_e$  (viteza maximă/minimă a undei extraordinare); pe alte direcții decât cele menționate unda extraordinară are viteze cuprinse între  $v_o$  și  $v_e$ .

*Observație:* axa optică nu este o dreaptă anume, ci o *direcție*.

**Fenomenul de birefrință** constă în obținerea a două fascicule luminoase emergente dintr-un unic fascicul incident pe un mediu anizotrop.

Diferența indicilor de refracție corespunzători vitezelor  $v_e$  și  $v_o$  se numește *birefrință*: :

$$\Delta n = n_e - n_o \quad (\text{VI.126})$$

Dacă  $\Delta n > 0$  cristalul se numește uniax pozitiv, iar dacă  $\Delta n < 0$  cristalul se numește uniax negativ.

*Secțiunea principală* a cristalului este planul determinat de axa optică și de direcția de propagare a undei incidente.

2° Pentru o sursă luminoasă punctiformă S aflată într-un cristal uniax suprafața de undă a unei ordinare este o sferă, iar cea a unei extraordinare este un elipsoid de rotație:

- înscris în sferă dacă  $v_e < v_o$  (cristal uniax pozitiv) - Fig.VI.21a sau

- circumscris sferei dacă  $v_e > v_o$  (cristal uniax negativ) - Fig.VI.21b.

### 3° **Proprietățile undelor ordinare și extraordinară**

Ambele unde, ordinare și extraordinară, sunt *liniar polarizate* având *planele de oscilație perpendiculare* între ele.

a) *Proprietățile undei ordinare:*

- viteza de fază,  $v_o$ , este aceeași pe toate direcțiile;
- respectă legile reflexiei și refracției;
- vectorul inducție electrică  $\vec{D}$  oscilează în planul perpendicular pe planul secțiunii principale.

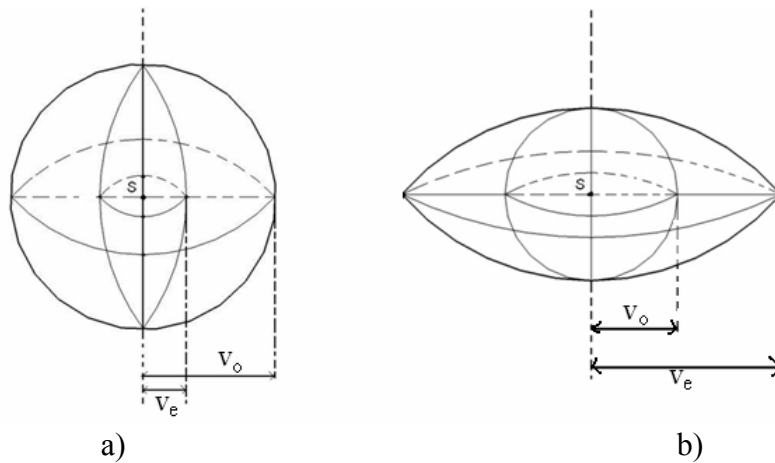


Fig. VI. 21. Suprafețele de undă generate de o sursă punctiformă într-un mediu anizotrop: a) cristal uniax pozitiv; b) cristal uniax negativ.

b) *Proprietățile undei extraordinare:*

- viteza de fază depinde de direcția de propagare; pentru un cristal uniax ea are valori cuprinse între  $v_o$  (pe axa optică)  $v_e$  (extremă); de exemplu:  $v_o = v_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_z \mu}}$  și

$$v_e = v_y = v_x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_x \mu}};$$

- nu respectă legile reflexiei și refracției;
- vectorul inducție electrică  $\vec{D}$  oscilează în planul paralel cu planul secțiunii principale.

4° Să analizăm *starea de polarizare a undei luminoase care iese dintr-o lamă confectionată din cristal uniax pozitiv*, în următoarele condiții:

- suprafața lamei este paralelă cu axa optică (desenată cu linie punctată în Fig. VI. 22a);
- fasciculul incident este perpendicular pe suprafața lamei (incidență normală).

Defazaajul dintre cele două unde, ordinară și extraordinară, este, la ieșirea din lamă:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d(n_e - n_o)}{\lambda} \quad (\text{VI.127})$$

unde  $d$  este grosimea lamei.

**Concluzie:** *Unda emergentă* din lama descrisă mai sus rezultă din compunerea a două unde (ordinară și extraordinară, defazate, liniar polarizate, cu plane de oscilație perpendiculare) și, deci, în cazul general, este *eliptic polarizată*.

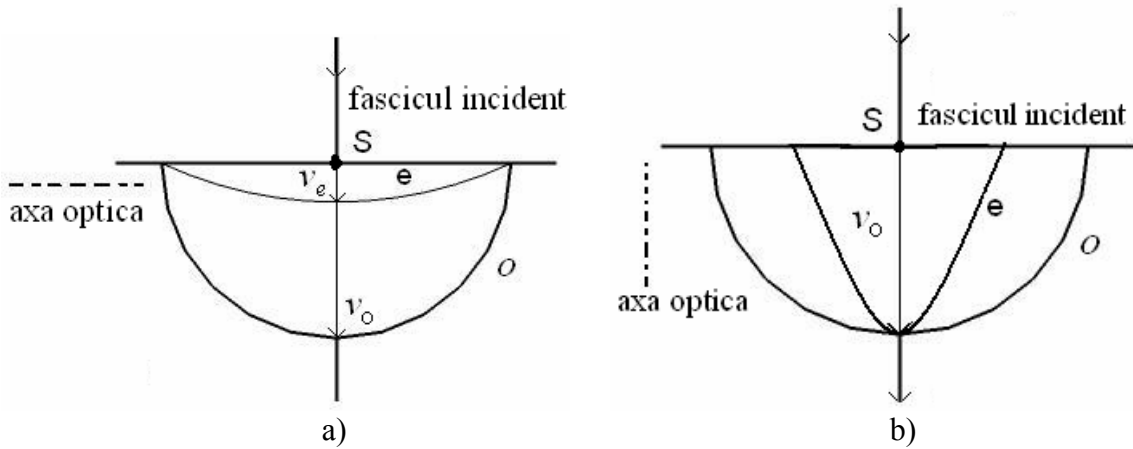


Fig. VI. 22. Suprafețele de undă și diferența de drum optic dintre razele ordinară și extraordinară pentru o lamă din cristal uni-ax pozitiv, tăiată astfel încât suprafața lamei este: a) paralelă; b) perpendiculară față de axa optică (desenată punctat).

*Cazuri particulare:* a) dacă  $\Delta\varphi = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$ , cu  $p \in Z$  și amplitudinile celor două unde sunt egale unda emergentă este *circular polarizată*;  
 b) dacă  $\Delta\varphi = p\pi$ , cu  $p \in Z$  unda emergentă este *liniar polarizată*.  
 Folosind diferența de drum optic dintre cele două unde, la ieșirea din lamă:

$$\delta = d\Delta n = d(n_e - n_o), \quad (\text{VI.128})$$

se disting următoarele cazuri:

- lamă semiundă, dacă:  $d\Delta n = p\lambda + \frac{\lambda}{2}$ , cu  $p \in N$  (VI.129)

- lamă sfert de undă, dacă:  $d\Delta n = p\lambda + \frac{\lambda}{4}$ , cu  $p \in N$  (VI.130)

*Observație:* În cazul în care suprafața lamei confecționată din cristal uni-ax pozitiv este perpendiculară pe axa optică (desenată cu linie punctată în Fig. VI. 22b), iar fasciculul incident este perpendicular pe suprafața lamei (incidență normală) se obține:  $\Delta n = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$ , deci unda emergentă este *liniar polarizată*.



5° *Birefrința rotatorie (activitatea optică)* constă în rotirea planului de oscilație al unde liniar polarizate la trecerea ei printr-un mediu optic activ ( cuarț, zahăr, sarea Rochelle). Unghiul de rotație are expresia:

$$\alpha = \frac{\pi d(n_{dr} - n_{st})}{\lambda} \quad (\text{VI.131})$$

unde  $n_{dr}$  și  $n_{st}$  sunt indicii de refracție pentru unda polarizată dreapta, respectiv stânga.

*Exemplu:* lucrarea de laborator "Determinarea concentrației unei substanțe optice active (polarimetrul)".

#### VI.10.2. Anizotropia artificială (birefrința indusă)

se poate obține astfel:

a) prin solicitări mecanice (efect Brewster), axa optică fiind axa de deformare mecanică:

$$n_e - n_o = B^* \lambda p, \quad (\text{VI.132})$$

unde  $p$  este presiunea, iar  $B^*$  este constanta Brewster.

**Aplicație:** *fotoelasticimetria* - studiază repartizarea solicitărilor mecanice pe un model al piesei metalice (model confecționat din material transparent, pentru care se măsoară  $\Delta n$  pe diferite direcții).

b) prin aplicarea unui câmp electric (efect Kerr), axa optică fiind paralelă cu intensitatea câmpului aplicat:

$$n_e - n_o = K\lambda E_{\perp}^2, \quad (\text{VI.133})$$

unde  $E_{\perp}$  este intensitatea câmpului electric aplicat, perpendicular pe direcția de birefrință extremă, iar  $K$  este constanta Kerr.

c) prin aplicarea unui câmp magnetic (efect Cotton - Mouton), axa optică fiind paralelă cu inducția magnetică aplicată:

$$n_e - n_o = C\lambda B_{\perp}^2, \quad (\text{VI.134})$$

unde  $B_{\perp}$  este inducția magnetică aplicată, perpendiculară pe direcția de birefrință extremă, iar  $C$  este constanta Cotton - Mouton.

d) birefrință rotatorie produsă prin aplicarea unui câmp magnetic (efect Faraday):

$$\alpha = VBd \quad (\text{unde } V \text{ este o constantă}) \quad (\text{VI.135})$$

### VI.10.3. Dispozitive de obținere a luminii polarizate. Legea lui Malus

**Polaroizii** sunt formați din cristale de iodofosfat de chinină înglobate într-un material plastic și prezintă fenomenul de **dicroism** care constă în absorbția puternică a unei ordinare. Dacă pe un astfel de dispozitiv cade un fascicul de lumină naturală (nepolarizată) la ieșire se obține lumină liniar polarizată (unda extraordinară).

**Prisme polarizatoare** se bazează pe fenomenele de birefrință și de reflexie totală. De exemplu, prisma Nicol este confecționată dintr-un cristal anizotrop numit spat de Islanda (cu indicii de refracție  $n_o = 1,66$ , respectiv  $n_e = 1,48$ ), tăiat după unghiuri bine determinate,  $22^\circ$  și  $68^\circ$ , și lipit cu o rășină specială (balsam de Canada, cu  $n_B = 1,55$ ). Unda ordinară suferă reflexie totală pe stratul de rășină și este apoi absorbită de un strat din lac negru.

**Legea lui Malus** se referă la un fascicul luminos care străbate un ansamblu format din doi polaroizi (sau din două prisme Nicol) și are forma:

$$I = I_{\max} \cos^2 \alpha \quad (\text{VI.136})$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre axele optice (sau planele secțiunilor principale) ale celor doi polaroizi. *Exemplu:* lucrarea de laborator "Studiul luminii polarizate. Legea lui Malus" (Fig. VI. 23).

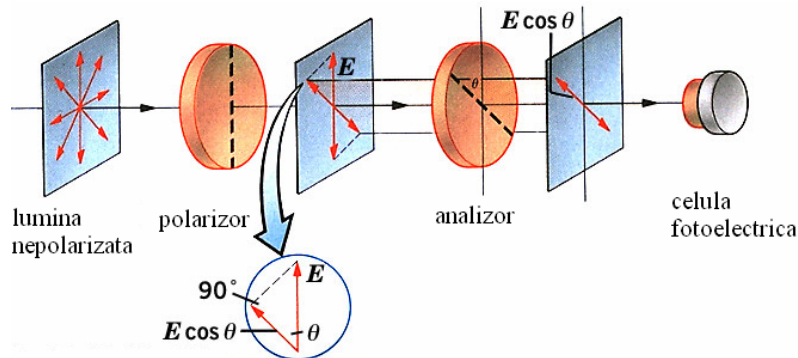


Fig. VI. 23. Montajul experimental pentru studiul legii lui Malus.