

CAP. III. TEORIA GENERALĂ A UNDELOR

III. 1. Conceptul de undă

a apărut în strânsă legătură cu cel de oscilație. În general, oscilația se definește ca o perturbație periodică a unei mărimi ce caracterizează local starea unui sistem fizic. Experiența arată că o perturbație, indiferent de natura ei, se propagă printr-un mediu material din aproape în aproape, cu *viteză finită*. Există perturbații (de exemplu, câmpul electromagnetic) care se propagă și în vid, tot cu viteză finită.

Prin **undă** înțelegem tabloul spațio-temporal al unei mărimi fizice a cărei perturbație se propagă într-un mediu dat. Mai simplu, **unda** reprezintă propagarea într-un mediu, cu viteză finită, a unei perturbații variabile în timp.

Așadar, mărimea perturbată, indiferent de natura ei, variază în funcție de coordonatele spațiale și de timp, fiind reprezentată printr-o funcție $\Psi(x, y, z, t)$ numită **funcție de undă**. Existența undei presupune două elemente care îi condiționează comportarea: o *sursă* (în care se produce o perturbație inițială) și un *mediu* (în care se propagă perturbația).

Clasificarea undelor

a) *după natura perturbației:*

- unde elastice (perturbația este o deformare mecanică, iar mediul este elastic)
- unde electromagnetice (propagarea, în orice mediu, a câmpului electromagnetic)
- unde magnetohidrodinamice (propagarea simultană și intercondiționată a unor perturbații complexe, mecano-electromagnetice, în plasmă)
- unde termice (se produc drept urmare a variației temperaturii)
- unde de Broglie (asociate microparticulelor aflate în mișcare).

b) *după caracterul matematic al mărimii fizice perturbate Ψ :*

- unde scalare (Ψ = densitate, presiune, temperatură)
- unde vectoriale (Ψ = deplasare, viteză de oscilație, intensitate a câmpului electric, inducție magnetică)
- tensoriale.

Undele vectoriale se clasifică în:

- unde longitudinale (la care direcția mărimii perturbate coincide cu direcția de propagare, de exemplu unda sonoră)
- unde transversale (la care direcția mărimii perturbate este perpendiculară pe direcția de propagare, de exemplu unda luminoasă)

Caracterizarea mediului în care se propagă undele este necesară deoarece mediul impune anumite particularități asupra propagării undei.

- Un mediu este *omogen* dacă proprietățile lui fizice sunt aceleași în orice punct, adică sunt independente de coordonatele spațiale. În caz contrar mediul este *neomogen*.

- Un mediu este *izotrop* dacă proprietățile lui fizice, plecând din orice punct, sunt aceleași pentru orice direcție după care se face măsurarea lor, adică sunt independente de direcție. În caz contrar mediul este *anizotrop*.
- Un mediu este *liniar* dacă, pentru mai multe perturbații Ψ_i ajunse simultan în același punct, perturbația rezultantă satisface relația de suprapunere:

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_i \Psi_i(x, y, z, t) \quad (\text{III.1})$$

În caz contrar mediul este *neliniar*.

- Un mediu este *dispersiv* dacă viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile undei, nu numai de cele ale mediului. Într-un mediu *nedispersiv* perturbațiile de aceeași natură se propagă cu aceeași viteză (ex. în vid, toate undele electromagnetice se propagă cu $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).
- Într-un mediu *conservativ* procesele ondulatorii sunt reversibile, iar într-un mediu *disipativ* propagarea perturbației este însoțită de generare de entropie. Folosind o altă terminologie mediile disipative se mai numesc absorbante (energia undei scade), iar cele conservative, neabsorbante.

Observație: Caracterul dispersiv/nedispersiv și caracterul conservativ/disipativ nu depind numai de mediu, ci și de natura și de frecvența undei.

Un mediu omogen, izotrop, liniar, nedispersiv și conservativ se numește **mediu ideal**. Un astfel de mediu este *infini*.

III.2. Ecuația de propagare a undelor în mediul ideal. Unda plană

În condițiile în care sursa de unde produce perturbații de forma unor *mici oscilații*, iar *mediul este ideal*, indiferent de natura fizică și de caracterul matematic al perturbației, comportarea undei este descrisă de o ecuație diferențială de forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{III.2})$$

în care v este o constantă având dimensiune de viteză, a cărei valoare depinde de caracteristicile mediului și de cele ale undei. Vom obține astfel de ecuații pentru cazuri concrete (unde elastice, unde electromagnetice) analizând propagarea perturbației respective și vom stabili totodată formula vitezei v în fiecare caz.

Unda plană se definește prin faptul că funcția de undă Ψ are aceeași valoare în orice punct dintr-un plan. Alegând ca acest plan să fie yOz rezultă: $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ și $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$, iar ecuația (III.2) devine unidimensională:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{III.3})$$

unde $\Psi = \Psi(x, t)$. O *soluție generală* a acestei ecuații cu derivate parțiale este o funcție arbitrară care depinde de variabilele x și t numai prin intermediul unei combinații liniare și omogene a acestora, adică:

$$\Psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (\text{III.4})$$

în care f și g sunt două funcții arbitrare. Soluția $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ reprezintă *unda progresivă* adică cea care se propagă de la sursa de unde S (Fig. III.1) spre punctul de observație M (de coordonată x), iar soluția $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ reprezintă *unda regresivă*.

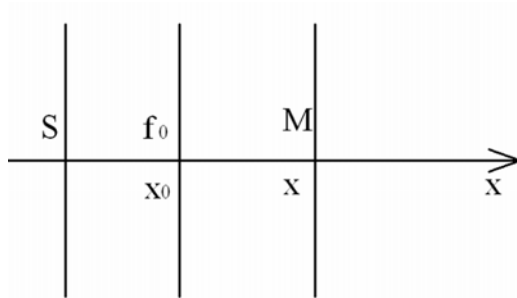


Fig. III.1 Propagarea undei plane.

În cazul undei progresive notăm cu f_0 valoarea funcției f la momentul $t = 0$ în punctul x_0 , adică: $f_0 = f\left(-\frac{x_0}{v}\right) = \text{const}$. La momentul ulterior $t > 0$ această valoare se va regăsi în punctele care satisfac condiția: $t - \frac{x}{v} = -\frac{x_0}{v}$, deci pentru $x > x_0$.

În concluzie:

- a) valoarea constantă f_0 a perturbației se propagă de la sursă în sensul pozitiv al axei Ox , ceea ce justifică denumirea de undă progresivă;
- b) raportul $\frac{x - x_0}{v}$ reprezintă timpul necesar ca unda să străbată distanța $x - x_0$ și, prin urmare,
- c) constanta v reprezintă viteza de propagare a perturbației (v se numește viteză de fază, denumire justificată mai jos).

Cazul cel mai des întâlnit în practică fiind cel al undelor progresive reținem din soluția (III.4) numai pe cea particulară $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

Unda armonică plană corespunde situației în care sursa este un *oscilator armonic* distribuit într-un plan și mediul este *ideal*. Soluția ecuației (III.3) poate avea una din formele:

$$f_c = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \text{ sau } f_s = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \quad (\text{III.5})$$

unde A , ω și φ_0 sunt constante. Dar, pentru că orice combinație liniară a acestor soluții particulare este și ea soluție a ecuației (III.3), preferăm forma: $\Psi = f_c + if_s$.

$$\Psi(x, t) = A \exp \left\{ i \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \right\} \quad (\text{III.5'})$$

Mărimi caracteristice undei armonice plane

1. *Faza undei* - definită ca argumentul funcției armonice, depinde de variabilele x și t :

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Faza inițială este: } \varphi_0 = \varphi(0, 0) \quad (\text{III.6'})$$

2. *Suprafața de undă* sau *suprafața echifază* este suprafața pe care faza are aceeași valoare la un moment dat (locul geometric al punctelor din spațiu în care faza undei este aceeași la un moment dat). Evident, în cazul undei plane ea este un plan. În exemplul considerat planele echifază sunt paralele cu planul yOz și se deplasează pe axa Ox . Notăm cu \vec{u}_x versorul direcției de deplasare, iar cu x distanța de la planul-origine (care conține sursa) la planul care conține punctul de observație M . Suprafața de undă cea mai avansată se numește *front de undă*.

3. *Viteza de fază* este viteza de deplasare a suprafeței de undă pe direcția normalei sale. Pentru unda plană obținem această viteză diferențind relația

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 = \text{const.}$$

$$\text{Rezultă: } v = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\varphi=\text{const.}} \quad (\text{III.7})$$

4. *Frecvența unghiulară (pulsăția undei)* exprimă viteza de variație a fazei și este imprimată de către sursă:

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{III.8})$$

5. *Vectorul de undă \vec{k}* are direcția și sensul normalei la suprafața echifază, iar modulul său se definește prin:

$$k = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} \quad (\text{III.9})$$

În cazul unei plane studiate:
$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u}_k = \frac{\omega}{v} \vec{u}_x \quad (\text{III.9'})$$

6. *Intensitatea undei* se definește prin:
$$I = \Psi^* \Psi \quad (\text{III.10})$$

Folosind expresia (III.5') rezultă:
$$I = A^2 \quad (\text{III.10'})$$

7. *Amplitudinea undei* se obține din relațiile (III.10) și (III.10'):

$$A = (\Psi^* \Psi)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.11})$$

8. *Perioada (T)* exprimă periodicitatea în timp a funcției de undă $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \Psi(x, t + T) \quad (\text{III.12})$$

relație din care:
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{III.12'})$$

Frecvența undei:
$$\nu = \frac{1}{T} \quad (\text{III.13})$$

9. *Lungimea de undă (λ)* exprimă periodicitatea în spațiu a funcției de undă $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \Psi(x + \lambda, t) \quad (\text{III.14})$$

fiind totodată distanța parcursă de suprafața de undă în timp de o perioadă. Din condiția (III.14) rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi \nu}{\omega} = \nu T \quad (\text{III.14'})$$

Din relațiile (III.9) și (III.14') obținem:
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{III.14''})$$

Folosind definiția (III.9), expresia (III.5) a funcției de undă devine:

$$\Psi(x, t) = A \exp[i(\omega t - kx + \varphi_0)], \quad (\text{III.15})$$

dar forma care are sens fizic este:

$$\text{Re } \Psi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (\text{III.16})$$

Observație: Unda armonică plană este un *model teoretic* deoarece nu există sursă reală care să fie uniform distribuită într-un plan, adică infinită.

Într-un sistem de coordonate orientat arbitrar față de direcția de propagare a undei în care: $r = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ sau $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \cos \beta$ și $k_z = k \cos \gamma$ obținem, în locul produsului kx din formulele (III.15) și (III.16) produsul scalar $\vec{k}\vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$, iar soluția ecuației diferențiale (III.2), pentru undă armonică plană, este:

$$\Psi(x, t) = A \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)] \quad (\text{III.17})$$

Unda sferică se obține în cazul când *sursa* este *punctiformă*, iar mediul este *ideal* ceea ce conduce la suprafețe de undă sferice și vector de undă radial ($\vec{k}\vec{r} = kr$). Dacă, în plus, sursa este un oscilator armonic rezultă o undă armonică sferică a cărei funcție de undă are forma:

$$\Psi(x, t) = \frac{A}{r} \exp[i(\omega t - kr + \varphi_0)] \quad (\text{III.18})$$

Amplitudinea undei $A(r) = A/r$ scade cu distanța față de sursă. Dacă distanța r este mult mai mare decât dimensiunile domeniului de observare din jurul punctului M (Fig. III.2) amplitudinea undei poate fi considerată constantă, iar unda sferică poate fi aproximată cu unda plană.

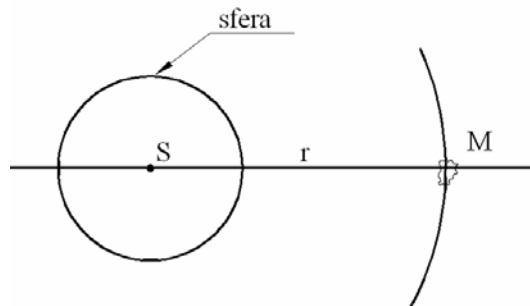


Fig. III.2 Propagarea undei sferice.

Unda cilindrică se obține în cazul când *sursa* este *liniară*, iar mediul este *ideal* ceea ce conduce la suprafețe de undă cilindrice și vector de undă radial ($\vec{k}\vec{r} = k\rho$; ρ este raza suprafeței cilindrice). Unda armonică cilindrică are forma:

$$\Psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\rho}} \exp[i(\omega t - k\rho + \varphi_0)] \quad (\text{III.19})$$

Amplitudinea undei $A(\rho) = \frac{A}{\sqrt{\rho}}$ scade cu radical din distanța față de sursă.

III.3. Suprapunerea a două unde

Într-un punct al unui mediu ideal (și deci *liniar*) în care ajung simultan mai multe unde de aceeași natură Ψ_i efectul ondulatoriu total se obține din suprapunerea undelor:

$$\Psi = \sum_i \Psi_i \quad (\text{III.20})$$

În funcție de caracteristicile undelor componente și de relațiile dintre acestea *efectul suprapunerii undelor* prezintă forme și *rezultate diferențiate*.

Distingem două cazuri generale:

- 1) suprapunerea undelor coerente (***interferența***)
- 2) suprapunerea undelor necoerente.

1) Suprapunerea undelor coerente (***interferența***)

Prin definiție, două sau mai multe *unde* sunt *coerente* dacă *diferența de fază dintre ele este constantă în timp*. În acest capitol ne referim numai la unde scalare sau la unde vectoriale paralele (la care direcțiile de oscilație coincid).

Fie două unde armonice plane având aceeași frecvență unghiulară.

$$\Psi_1(x_1, t) = A_1 \exp[i(\omega t - kx_1 + \varphi_{01})] \text{ și } \Psi_2(x_2, t) = A_2 \exp[i(\omega t - kx_2 + \varphi_{02})] \quad (\text{III.21})$$

unde x_1 și x_2 sunt distanțele străbătute de cele două unde de la sursele lor până la punctul de suprapunere, iar φ_{01} și φ_{02} sunt fazele inițiale, constante în timp. Diferența de fază $\Delta\varphi$ are expresia:

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) + \varphi_{01} - \varphi_{02} = k\Delta x + \Delta\varphi_0 \quad (\text{III.22})$$

și este constantă în timp (unde sunt coerente). Mărimile Δx și $\Delta\varphi_0$ sunt diferența de drum, respectiv diferența dintre fazele inițiale. Conform relației (III.20) unda rezultantă este:

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \exp(i\omega t) \{A_1 \exp[i(-kx_1 + \varphi_{01})] + A_2 \exp[i(-kx_2 + \varphi_{02})]\} \quad (\text{III.23})$$

având frecvența unghiulară a undelor componente, iar amplitudinea A calculabilă prin intermediul intensității undei, adică folosind relațiile (III.10), (III.10') și (III.11).

Pentru intensitate obținem:

$$\begin{aligned} I &= \Psi^* \Psi = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \{ \exp[i(k\Delta x + \Delta\varphi_0)] + \exp[-i(k\Delta x + \Delta\varphi_0)] \} = \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta x + \Delta\varphi_0) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

iar pentru amplitudine:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\Delta x + \Delta\varphi_0) \quad (\text{III.25})$$

Amplitudinea unei rezultante depinde de: amplitudinile A_1 , A_2 ale undelor componente, de diferența de drum Δx și de diferența fazelor inițiale $\Delta\varphi_0$.

Maximul acestei amplitudini este $A_{\max} = A_1 + A_2$ (corespunzând la $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$) și se obține din condiția:

$$k\Delta x + \Delta\varphi_0 = 2z\pi \quad (\text{unde } z \text{ este număr întreg}) \quad (\text{III.26})$$

Minimul acestei amplitudini este $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ (corespunzând la $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$) și se obține din condiția:

$$k\Delta x + \Delta\varphi_0 = (2z + 1)\pi \quad (\text{unde } z \text{ este număr întreg}) \quad (\text{III.26'})$$

În cazul particular $A_1 = A_2 = A_0$ rezultă: $I_{\max} = 2I_1$ și $I_{\min} = 0$ (minime nule).

Condițiile (III.26) și (III.26') se mai pot scrie în funcție de diferența de drum Δx , având o formă simplă dacă $\Delta\varphi_0 = 0$ (surse în fază):

$$\Delta x = z\lambda = 2z \frac{\lambda}{2} \quad (\text{maxim}) \quad \text{și} \quad \Delta x = (2z + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (\text{minim}) \quad (\text{III.27})$$

Observație: Dacă $\Delta\varphi_0 = \pi$ (surse în opoziție de fază) condițiile de maxim, respectiv minim se inversează între ele.

În cazul *suprapunerii a două fascicule de unde coerente* interferența se produce în întreg domeniul de intersecție a fasciculelor. Pentru fascicule luminoase, pe un ecran plasat în acest domeniu se obține o *figură de interferență*, adică o anumită distribuție a intensității rezultante, având *maxime alternând cu minime* deoarece poziția pe ecran a punctului de suprapunere a undelor condiționează diferența de drum. *Exemplu:* lucrarea de laborator: "Studiul interferenței luminii. Dispozitivul Young".

2) Suprapunerea undelor necoerente

Presupunem că în expresile (III.21) *fazele inițiale* ale celor două unde *depind de timp* și anume într-un mod *aleatoriu*. Această situație se întâlnește des în practică deoarece emisiile celor două unde (în surse) sunt procese independente, necorelate între ele. Diferența de fază $\Delta\varphi = k\Delta x + \Delta\varphi_0(t)$ nu este constantă în timp (unde necoerente). *Intensitatea* unei rezultante are expresia (III.24) cu deosebirea, esențială, că *depinde aleatoriu de timp*. Ceea ce observăm este *media în timp a intensității undei*.

Deoarece media unui număr mare de valori aleatoare ale funcției $\cos[k\Delta x + \Delta\varphi_0(t)]$ este, în mod evident, nulă, rezultă:

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{III.28})$$

adică *suprapunerea undelor necoerente se reduce la simpla însumare a intensităților* (proprietate valabilă și pentru n unde).

III.4. Ecuația atemporală a undelor. Unde staționare

În general, mediile în care se propagă undele sunt limitate de o suprafață bine definită care le separă de exterior. *În medii limitate se formează unde staționare.*

Pentru ecuația unidimensională a undelor:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{III.29})$$

soluția, în cazul unei armonice, poate fi: $\Psi(x, t) = f(x)e^{i\omega t}$ (III.30)

unde $f(x)$ este o funcție care depinde numai de coordonata x . Dorim să determinăm $f(x)$ pentru un mediu limitat. Din relațiile (III.29) și (III.30) rezultă:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0 \quad (\text{III.31})$$

sau $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$ (III.31')

unde $k = \frac{\omega}{v}$ este modulul vectorului de undă. Relația (III.31') reprezintă *ecuația atemporală a undelor* în cazul unidimensional și, totodată o *ecuație cu valori proprii*. Soluția ei este:

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (\text{III.32})$$

unde A și B sunt constante. Pentru a fi univoc determinată, această funcție trebuie să îndeplinească condițiile la frontieră (la limită). Aceste condiții sunt specifice fiecărui caz.

Fie **cazul particular** al unei *coarde elastice*, de lungime ℓ , *fixată la ambele capete*. Condițiile la limită sunt:

$$f(0) = 0 \text{ și } f(\ell) = 0. \quad (\text{III.33})$$

Din prima obținem $B = 0$, iar din a doua rezultă: $k\ell = n\pi$, cu $n = 1, 2, 3, \dots$ din care:

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \text{ cu } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.34})$$

Valorile k_n ale modulului vectorului de undă formează un *șir discret* și se numesc *valori proprii*.

În mod corespunzător, obținem valori discrete pentru lungimea de undă (λ_n), pulsație (ω_n) și frecvență (ν_n):

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}; \quad \omega_n = \frac{n\pi\nu}{\ell}; \quad \nu_n = \frac{n\nu}{2\ell} \quad (\text{III.34}')$$

Soluția $X(x)$ este, de fapt, un *șir discret de funcții* numite *funcții proprii*.

$$f_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ cu } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.35})$$

Funcțiile de undă corespunzătoare alcătuiesc și ele un *șir discret* de forma:

$$\Psi_n(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp(i \omega_n t), \text{ cu } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.36})$$

unde $f_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ este amplitudinea, dependentă de x , a funcției de undă.

Amplitudinea $f_n(x)$ prezintă maxime (numite *ventre*) și minime (numite *noduri*).

Condiția pentru maxime este: $\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \pm 1$, din care rezultă pozițiile ventrelor:

$$x_{\text{ventru}} = \frac{(2z+1)\ell}{2n}, \quad \text{cu } z \text{ număr întreg, astfel încât } x_v \in [0, \ell] \quad (\text{III.37})$$

dar: $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$, deci: $x_{\text{ventru}} = \frac{(2z+1)\lambda_n}{4} \quad (\text{III.37}')$

Distanța dintre două ventre succesive este: $\Delta x_v = \frac{\lambda_n}{2} \quad (\text{III.38})$

Condiția pentru minime este: $\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = 0$, din care rezultă pozițiile nodurilor:

$$x_{\text{nod}} = \frac{z\ell}{n}, \text{ cu } z \text{ număr întreg, astfel încât } x_{\text{nod}} \in [0, \ell] \quad (\text{III.39})$$

dar: $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$, deci: $x_{nod} = \frac{z\lambda_n}{2}$ (III.39')

Distanța dintre două noduri succesive este: $\Delta x_{nod} = \frac{\lambda_n}{2}$, aceeași ca și în cazul ventrelor.

În Fig.III.3 sunt prezentate primele șapte moduri de oscilație ale coardei vibrante fixate la ambele capete.

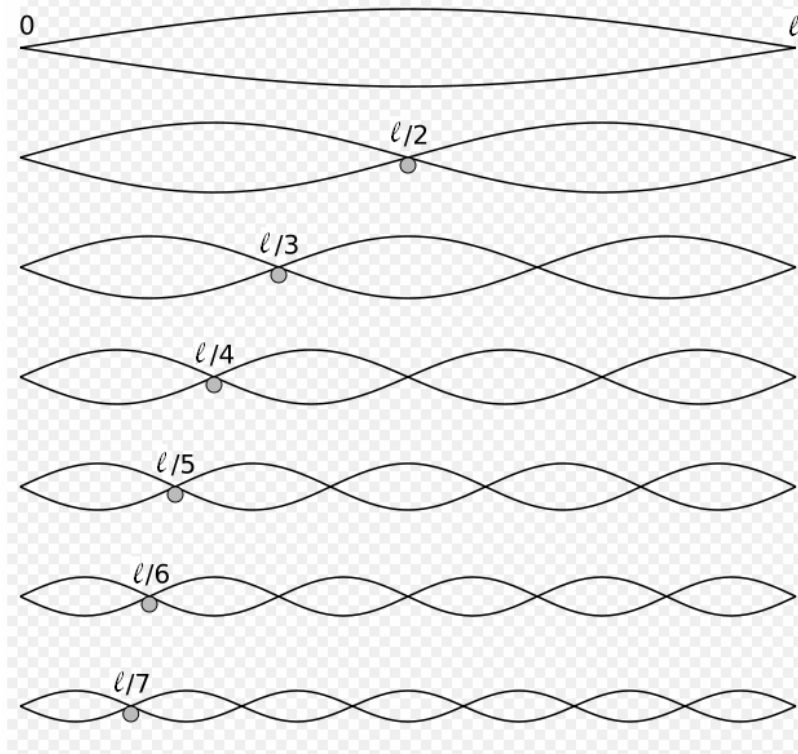


Fig.III.3 Primele șapte moduri de oscilație ale coardei vibrante fixate la ambele capete; $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$ cu $n = \{1, 2, \dots, 7\}$.

Concluzii referitoare la **undele staționare** produse în **coarda vibrantă fixată la ambele capete**:

1. La un moment dat toate punctele coardei vibrante au aceeași fază, egală cu $\omega_n t$, pentru n dat [relația (III.36)].
2. Mărimile pulsație, frecvență, lungime de undă și vector de undă (în modul) au valori care formează șiruri discrete, determinate de numărul $n = 1, 2, 3, \dots$ (se spune că sunt *mărimi cuantificate*); relațiile (III.34) și (III.34').

3. Amplitudinea undelor staționare $X_n(x)$ este o funcție periodică de poziție, maximele și minimele ei având poziții constante în timp, pentru n dat [relațiile (III.37) și (III.39)], ceea ce justifică denumirea de *unde staționare*.

4. Distanța dintre două ventre succesive sau două noduri succesive este: $\Delta x = \frac{\lambda_n}{2}$.

Exemplu: lucrarea de laborator "Interferența undelor electromagnetice".

Observație: Soluția ecuației atemporale a undelor depinde esențial de *condițiile* pe care funcția de undă trebuie să le îndeplinească *la frontieră*. Pentru coarda vibrantă fixată numai

la un capăt ele sunt: $X(0) = 0$ și $X(\ell) = \text{maxim}$, adică: $\left[\frac{dX}{dx} \right]_{x=\ell} = 0$. Relațiile (III.34) - (III.37) și (III.39) au alte forme, iar (III.38) este aceeași.

III.5. Grupul de unde

Presupunem o mulțime nenumărabilă de unde armonice plane a căror frecvență unghiulară variază continuu într-un interval îngust $\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega$, unde $\Delta\omega \ll \omega_0$. Fiecare undă componentă este așadar caracterizată printr-o anumită valoare $\omega \in [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ a frecvenței unghiulare și o anumită valoare $k(\omega) \in [k(\omega_0 - \Delta\omega), k(\omega_0 + \Delta\omega)]$ a modulului vectorului de undă. Pentru simplitatea calculului presupunem că toate undele sunt în fază ($\varphi_0 = \text{aceiași} = 0$) și că au amplitudini egale ($a = \text{aceiași}$), aproximații justificate de faptul ca intervalul de frecvențe este îngust. Pentru unda rezultantă funcția de undă se obține din integrala:

$$\Psi(x, t) = a \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i[-k(\omega)x + \omega t]} d\omega \quad (\text{III.40})$$

Această reprezentare se numește integrală Fourier. Dezvoltăm modulul vectorului de undă în serie Taylor în jurul frecvenței unghiulare ω_0 și reținem primii doi termeni.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots \cong k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (\text{III.41})$$

Exponentul din integrala Fourier, la care adunăm și scădem $\omega_0 t$ devine:

$$\omega_0 t - k_0 x + \Delta\omega \left[t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right].$$

Notăm:
$$\left[t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right] \Delta\omega = \alpha(x, t) \quad (\text{III.42})$$

și integrăm. Rezultă:

$$\Psi(x, t) = 2a\Delta\omega \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad (\text{III.43})$$

Interpretare: Relația (III.43) reprezintă o undă care nu mai este armonică deoarece amplitudinea ei:

$$A(x, t) = 2a\Delta\omega \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (\text{III.44})$$

este modulată de factorul $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ care depinde de coordonata x și de timp (t).

Din relația (III.44) rezultă: pentru $\alpha \rightarrow 0$ amplitudinea este maximă $A_{\max} = A_0 = 2a\Delta\omega$, iar pentru $\alpha = \pm n\pi$ cu $n \in N^*$ amplitudinea este nulă (Fig. III.4). Maximele secundare, obținute din ecuația transcendentă $\alpha = tg \alpha$, au valori mult mai mici (de ordinul $0,01A_0$). Deci amplitudinea unei rezultante are valori semnificative numai în regiunea maximului central, adică pentru $\alpha \in [-\pi, \pi]$.

Perturbația corespunzătoare unei (III.43), la un moment dat (t_0), exprimată prin:

$$\text{Re } \Psi = f_c(x, t_0) = A(x, t_0) \cos(\omega_0 t_0 - k_0 x) \quad (\text{III.45})$$

reprezintă un grup de unde unidimensional (Fig. III.5) care se mai numește pachet de unde sau tren de unde.

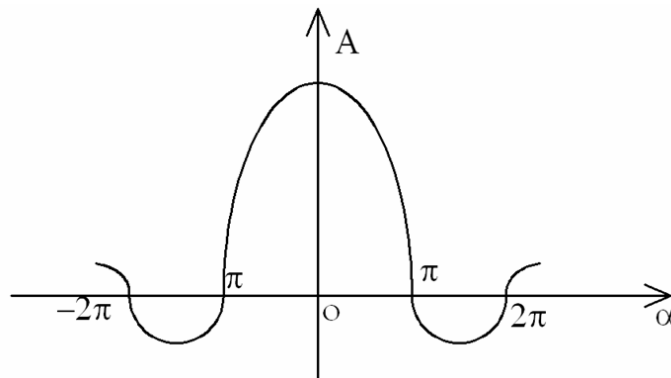


Fig. III.4 Amplitudinea grupului de unde în funcție de $\alpha(x, t) = \left[t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right] \Delta\omega$; ea are valori semnificative numai în regiunea maximului central, adică pentru $\alpha \in [-\pi, \pi]$.

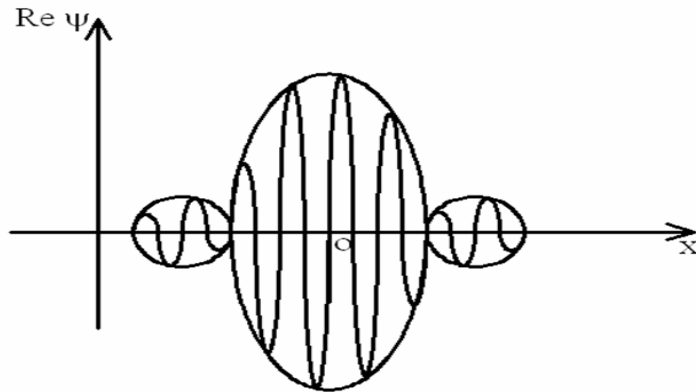


Fig. III.5 Funcția de undă pentru grupul de unde unidimensional (pachet de unde).

• *Viteza de fază și viteza de grup. Relația Rayleigh*

Din relația (III.43) rezultă că, pe lângă suprafața de undă (echifază) $-k_0x + \omega_0 t = const.$ care se propagă cu viteza de fază v , se poate defini și o *suprafață de egală amplitudine* (suprafață echiamplitudine) ca fiind locul geometric al punctelor din spațiu care au, la un moment dat, aceeași amplitudine. Suprafața echiamplitudine se deplasează cu o viteză v_g numită *viteză de grup* care este, în majoritatea cazurilor, diferită de viteza de fază. Pentru a stabili relația dintre aceste viteze pornim de la definiția suprafeței echiamplitudine: $A(x, t) = const.$ care conduce la:

$$t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} = const. \quad (III.46)$$

Relația (III.46) reprezintă ecuația suprafeței de egală amplitudine. Prin diferențierea ei obținem modulul vitezei de grup:

$$v_g = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{A=const} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} \quad (III.47)$$

Vectorial: $\vec{v}_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} \vec{u}_k \quad (III.47')$

Prelucrăm relația (III.47):

$$v_g = \left[\frac{d(kv)}{dk} \right]_{\omega_0} = v + k \left(\frac{dv}{dk} \right)_{\omega_0} = v + k \left(\frac{dv}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} = v + kv \left(\frac{dv}{d\omega} \right)_{\omega_0} \quad (III.48)$$

Rezultă:
$$v_g = v + \omega \left(\frac{dv}{d\omega} \right)_{\omega_0} \quad (\text{III.48'})$$

În funcție de lungimea de undă, folosind relația (III.14''), obținem:

$$v_g = v + k \left(\frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \right)_{\omega_0} = v - \frac{2\pi}{k} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)_{\omega_0} = v - \lambda \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)_{\omega_0} \quad (\text{III.48''})$$

Relațiile (III.48), (III.48') și (III.48'') sunt forme ale relației Rayleigh. Distingem două cazuri:

a) $\frac{dv}{d\omega} = 0$ sau $\frac{dv}{d\lambda} = 0 \Rightarrow v_g = v$ (mediul se numește *nedispersiv*) (III.49)

b) $\frac{dv}{d\omega} \neq 0$ sau $\frac{dv}{d\lambda} \neq 0 \Rightarrow v_g \neq v$ (mediul se numește *dispersiv*) (III.49')

Observații:

1. Într-un mediu *puternic dispersiv* grupul de unde *se destramă repede* deoarece diferitele unde care îl compun se propagă cu viteze diferite.

2. Viteza care se poate măsura *experimental* este *viteza de grup* deoarece detecția undelor se realizează prin efecte energetice, iar fluxul energetic este proporțional cu pătratul amplitudinii, deci legat de propagarea suprafeței echiamplitudine. Viteza de fază se obține numai prin calcul.

• *Relațiile de incertitudine ale grupului de unde*

Grupul de unde ocupă, în general, o regiune mică din spațiu, amplitudinea având valori semnificative doar pentru maximumul central.

a) Folosind relația (III.42) scriem valorile mărimii α într-un punct de coordonată x , la momente diferite:

$$\alpha_1(x, t_1) = \left[t_1 - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right] \Delta\omega \quad \text{și} \quad \alpha_2(x, t_2) = \left[t_2 - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right] \Delta\omega \quad (\text{III.50})$$

Considerăm pentru diferența $\alpha_1 - \alpha_2$ numai intervalul $[-\pi, \pi]$ în care se obține maximumul central, adică: $\alpha_1 - \alpha_2 \cong 2\pi$. Din (III.50): $\alpha_1 - \alpha_2 = (t_1 - t_2)\Delta\omega = \Delta t \Delta\omega$. Rezultă:

$$\Delta t \Delta\omega \cong 2\pi \quad (\text{III.51})$$

Interpretare: Relația (III.51) este o *relație de imprecizie* reprezentând legătura dintre lărgimea $\Delta\omega$ a domeniului de frecvențe unghiulare pentru undele armonice dintr-un grup de unde și durata Δt a perturbației care produce grupul respectiv. Pentru o undă riguros monocromatică $\Delta\omega \rightarrow 0$, ceea ce corespunde la $\Delta t \rightarrow \infty$. În realitate durata perturbației

este finită, iar $\Delta\omega \neq 0$, deci *nu există undă riguros monocromatică*. Pentru a obține un interval îngust de frecvențe durata perturbației trebuie să fie relativ mare ($\Delta t \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}$).

De asemenea, dacă $\Delta t \rightarrow \infty$ s-ar obține o undă întinsă în tot spațiul, situație infirmată de experiență. Relația (III.51) mai arată că *mărimile ω și t nu se pot măsura simultan, cu aceeași precizie*.

b) Scriem acum valorile mărimii α la același moment t , în două puncte diferite, și reluăm raționamentul de mai sus. Obținem a doua relație de imprecizie a grupului de unde:

$$\Delta x \Delta k \cong 2\pi \quad \text{(III.52)}$$

Interpretare: Relația (III.52) arată că *modulul vectorului de undă și poziția x a grupului de unde nu pot fi stabilite simultan, cu aceeași precizie*.

Concluzii asupra grupului de unde:

1. Undele reale nu sunt armonice (riguros monocromatice), ci grupuri de unde.
2. Orice proces periodic poate fi reprezentat ca o suprapunere (sumă Fourier sau integrală Fourier) de funcții de undă armonice.
3. Viteza de grup coincide cu viteza de fază numai în mediile nedispersive.
4. Mărimile ω și t , respectiv x și k , nu se pot măsura simultan, cu aceeași precizie.

III.6. Difracția undelor

III. 6.1. *Principiul Huygens-Fresnel*

Propagarea undelor în *medii neomogene* prezintă particularități determinate de faptul că neomogenitățile produc întreruperea parțială a suprafeței de undă sau deformarea ei, ceea ce are drept consecință *abaterea de la propagarea rectilinie* a undei, fenomen numit *difracție*. Difracția este însoțită de o redistribuire a intensității undei astfel încât, intersectând fasciculul difractat cu un ecran, se obține o figură de difracție al cărei aspect depinde atât de caracteristicile neomogenității (formă și dimensiuni) cât și de caracteristicile undei (frecvența unghiulară, forma suprafeței de undă).

Propagarea undelor poate fi explicată pe baza *principiului Huygens* care afirmă că: ***Orice punct atins de o undă devine sursă secundară de unde.***

Conform acestui principiu, din suprafața de undă de la momentul t , considerând fiecare punct al ei ca sursă secundară, se poate construi suprafața de undă la momentul ulterior $t + \tau$ ca înfășurătoarea suprafețelor de undă secundare (Fig. III.6).

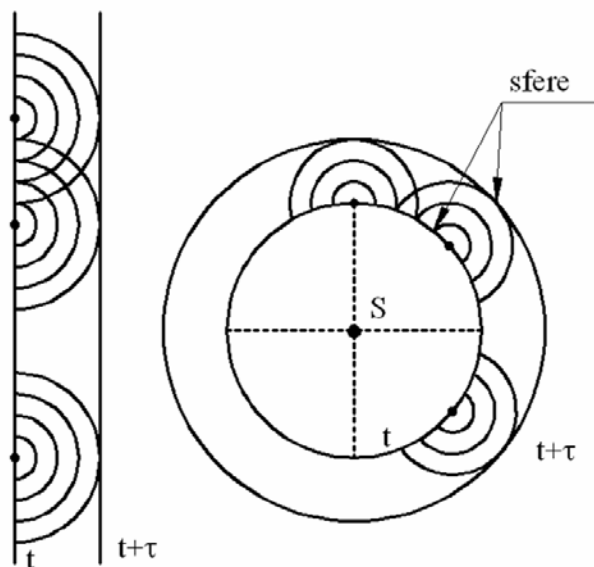


Fig.III.6 Construirea suprafeței de undă la momentul $t + \tau$ ca înfășurătoarea suprafețelor de undă secundare emise de sursele secundare ale suprafeței de undă de la momentul t , pentru unda plană (stânga), respectiv sferică (dreapta).

Dar principiul Huygens nu furnizează nici o informație asupra intensității și a fazei undelor secundare. *Completarea Fresnel* a acestui principiu afirmă:

Undele secundare sunt coerente și au amplitudini ce pot fi calculate.

Pe baza principiului Huygens-Fresnel s-a elaborat *metoda zonelor Fresnel* care constă în înlocuirea sursei primare printr-o distribuție continuă de surse secundare de pe o suprafață de undă. Suprafața de undă se împarte în porțiuni numite zone Fresnel ale căror forme și arii sunt alese astfel încât ele să fie echivalente din punctul de vedere al emisieii undelor secundare.

III.6.2. Difracția Fraunhofer pe o fantă dreptunghiulară

Fie o undă plană care întâlnește un ecran în care este practică o fantă dreptunghiulară a cărei lățime ℓ este mult mai mică decât lungimea L (aceasta din urmă este considerată, în teorie, infinită). Pentru simplificarea calculelor considerăm cazul incidenței normale (direcția de propagare a undei plane este perpendiculară pe lățimea fantei; Fig. III.7). Zonele Fresnel se construiesc ducând în planul fantei drepte echidistante, foarte apropiate, paralele cu latura mare a fantei, deci zonele au forma unor dreptunghiuri înguste, de arii egale. Considerăm că fasciculul difractat se află în același plan cu cel incident.

Unda provenită de la zona Fresnel M (situată la distanța x de marginea inferioară P a fantei) are faza $\varphi = \omega t - kx \sin \alpha$, unde $x \sin \alpha$ reprezintă drumul MN parcurs de unda respectivă între sursa secundară M și planul PP'; α se numește *unghi de difracție*.

Conform principiului Huygens-Fresnel amplitudinea undei secundare emise de o zonă Fresnel depinde numai de aria acesteia (distanța nu afectează amplitudinea undei plane). Amplitudinea undei emise de zona Fresnel de lățime dx este γdx , unde γ este un

factor de proporționalitate dimensional. Așadar, funcția de undă pentru undă secundară emisă în direcția α de o singură zonă Fresnel este:

$$d\Psi = \gamma dx \exp[i(\omega t - kx \sin \alpha)] \quad (\text{III.53})$$

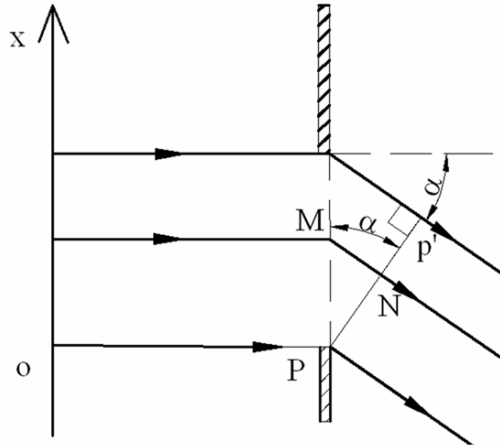


Fig.III.7 Difrakția Fraunhofer pe o fantă dreptunghiulară, la incidență normală.

Unda rezultantă se obține prin însumarea contribuțiilor tuturor zonelor Fresnel, deci prin integrarea relației (III.53) pe lățimea ℓ a fantei.

$$\Psi = \gamma \int_0^{\ell} \exp[i(\omega t - kx \sin \alpha)] dx \quad (\text{III.54})$$

Rezultă:
$$\Psi = \frac{\gamma e^{i\omega t}}{-ik \sin \alpha} (1 - e^{ik \ell \sin \alpha}) \quad (\text{III.55})$$

Intensitatea undei $I = \Psi^* \Psi$ este:

$$I = \frac{2\gamma^2}{k^2 \sin^2 \alpha} [1 - \cos(k \ell \sin \alpha)] = \frac{4\gamma^2}{k^2 \sin^2 \alpha} \sin^2 \left(\frac{k \ell \sin \alpha}{2} \right) \quad (\text{III.56})$$

Calculând integrala din relația (III.54) pentru direcția normală $\alpha = 0$ obținem: $\Psi = \gamma \ell \exp(i\omega t)$; dar, pe de altă parte $\Psi = A_0 \exp(i\omega t)$, deci: $\gamma = \frac{A_0}{\ell}$. Folosind acest rezultat în relația (III.56) și introducând notația:

$$\eta = \frac{k \ell \sin \alpha}{2} \quad (\text{III.57})$$

obținem:
$$I = I_0 \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} \quad (\text{III.58})$$

unde $I_0 = A_0^2$. Relația (III.58) și graficul din Fig. III.8 reprezintă distribuția intensității fasciculului difractat în funcție de $\sin \alpha$.

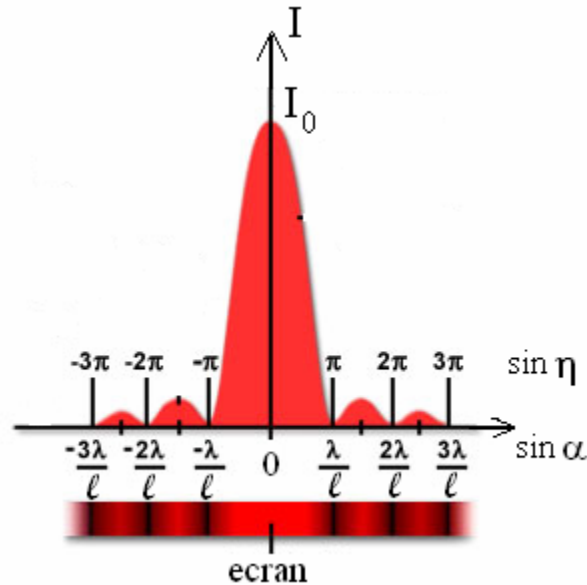


Fig. III.8 Distribuția intensității undelor difractate pe o fantă dreptunghiulară, la incidență normală.

Maximele și minimele intensității undelor difractate

Maximul central I_0 se obține pentru $\eta = 0$, adică pentru $\alpha = 0$.

Minimele intensității I se obțin pentru $\sin \eta = z\pi$, unde $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Prelucrând această condiție (folosind relația (III.57) și $k = 2\pi/\lambda$) obținem unghiurile de difracție pentru minimele intensității:

$$\sin \alpha = \frac{z\lambda}{\ell}, \text{ cu } z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{III.59})$$

Maximele secundare ale intensității se obțin (ca și celelalte extreme ale acestei funcții) din anularea derivatei întâi a intensității $\frac{dI}{d\eta} = 0$; rezultă condiția: $\tan \eta = \eta$. Soluțiile acestei ecuații transcendente (care se rezolvă prin metoda grafică) sunt: $\eta_0 = 0$ (corespunde maximului central I_0), $\eta_1 = 1,43\pi$; $\eta_2 = 2,46\pi$ etc. corespund maximelor secundare. În funcție de α , condiția pentru *maximele secundare* este:

$$\sin \alpha = \frac{p\lambda}{\ell}, \text{ unde } p = 1,43; 2,46 \text{ etc.} \quad (\text{III.60})$$

Amplitudinea maximelor secundare scade cu creșterea lui $\sin \alpha$. *Exemplu:* lucrarea de laborator "Difracția radiației laser printr-o fantă dreptunghiulară".

Observație: Pentru o lungime de undă dată, forma figurii de difracție depinde de lățimea ℓ a fantei (Fig. III.9) și anume: dacă ℓ scade, primul set de minime se deplasează spre unghiuri α mai mari, iar diferența dintre intensitățile maximelor scade; când $\ell = \lambda$ nu se mai produce nici un minim (primul set de minime corespunde acum la $\alpha = 90^\circ$); dacă ℓ crește la valori egale cu zeci de λ , primele minime se apropie și maximul central devine foarte intens; dacă $\ell \gg \lambda$, toată intensitatea undei se concentrează practic în maximul central, iar minimele și maximele secundare nu se mai observă. **În concluzie, efectele de difracție sunt semnificative în cazul unor fante cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă, până la aproximativ două ordine de mărime.**

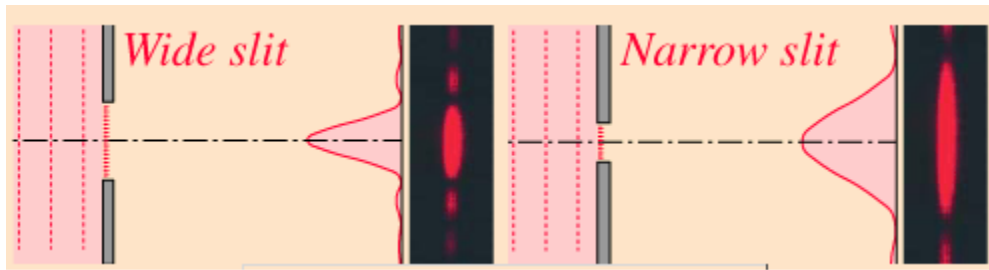


Fig. III.9 Forma figurii de difracție depinde de lățimea ℓ a fantei dreptunghiulare ("slit" = fantă; "wide/narrow" = largă/îngustă).

III.6.3. Difracția Fraunhofer pe o rețea unidimensională. Puterea de rezoluție

O rețea unidimensională de difracție este un ansamblu de N fante identice, dreptunghiulare, înguste, paralele și echidistante. Notăm cu ℓ lățimea unei fante (mult mai mică decât lungimea, aceasta din urmă fiind considerată infinită) și cu b lățimea porțiunii opace dintre două fante succesive. Distanța $d = \ell + b$ dintre două fante succesive se numește *constanta rețelei*, iar $\frac{1}{d}$ este numărul de fante pe unitatea de lungime. Fie o undă plană a cărei direcție de propagare este perpendiculară pe rețea, adică pe lățimile fantelor (Fig.III.10).

Pentru a obține unda rezultantă difractată pe direcția α față de normala la rețea integrăm relația (III.53) pe una din fante și însumăm efectul pentru N fante:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd}^{nd+\ell} \gamma \exp(i\omega t - ikx \sin \alpha) dx = \gamma \exp(i\omega t) \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd}^{nd+\ell} \exp(- ikx \sin \alpha) dx \quad (\text{III.61})$$

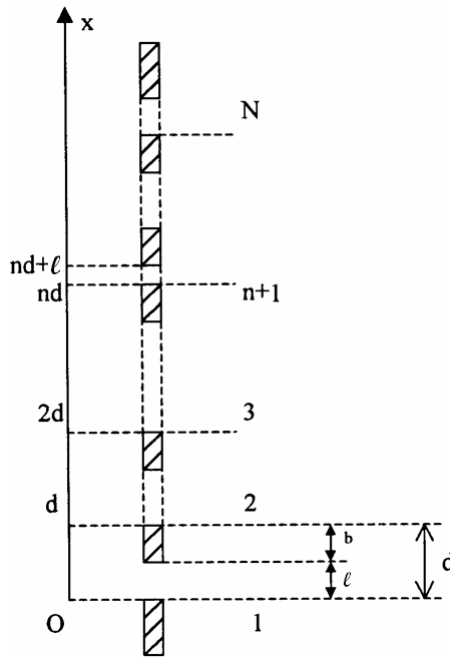


Fig.III.10. Schema celor N fante ale unei rețele de difracție unidimensionale.

Folosind notațiile: $k\ell \sin \alpha = 2\eta$; $kd \sin \alpha = 2\beta$ (III.62)

și calculele pentru (III.61) obținem intensitatea undei $I = \Psi^* \Psi$:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} \cdot \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2 \beta}. \quad (III.63)$$

Factorul dependent de β variază mult mai repede decât cel dependent de η , acesta din urmă modulează intensitatea undei difractate. **Fenomenele** care au loc la trecerea undei prin rețeaua de difracție sunt: *difracția pe fiecare fantă* (studiată în paragraful III.6.1) și *interferența multiplă* (suprapunerea a N unde coerente și anume undele difractate de cele N fante).

Extremele funcției $I = I(\beta)$

Se obțin *minime nule* ($I = 0$) dacă sunt îndeplinite simultan condițiile: $\sin(N\beta) = 0$ și $\sin\beta \neq 0$, adică pentru $N\beta = p\pi$, unde $p \in Z - \{0, N, 2N, \dots, nN\}$. Din prelucrarea ultimei relații (folosind (III.62) și $k = 2\pi/\lambda$) rezultă unghiurile de difracție pentru minime:

$$\sin \alpha = \frac{p\lambda}{Nd} \text{ cu } p \in Z - \{0, N, 2N, \dots, nN\} \quad (III.64)$$

Pentru $p = 0, N, 2N, \dots, nN$, adică pentru $\beta = n\pi$ cu $n = 0, 1, 2, \dots$ rezultă: $\lim \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2 \beta} = N^2$,

intensitatea prezentând maxime numite *maxime principale*. Unghiurile de difracție pentru aceste maxime sunt:

$$\sin \alpha = \frac{n\lambda}{d}, \text{ cu } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.65})$$

Numărul n se numește ordin de difracție. Intensitatea maximelor principale este modulată de factorul $\frac{\sin^2 \eta}{\eta^2}$ (Fig.III.11):

$$I_{\max} = N^2 I_0 \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2}. \quad (\text{III.66})$$

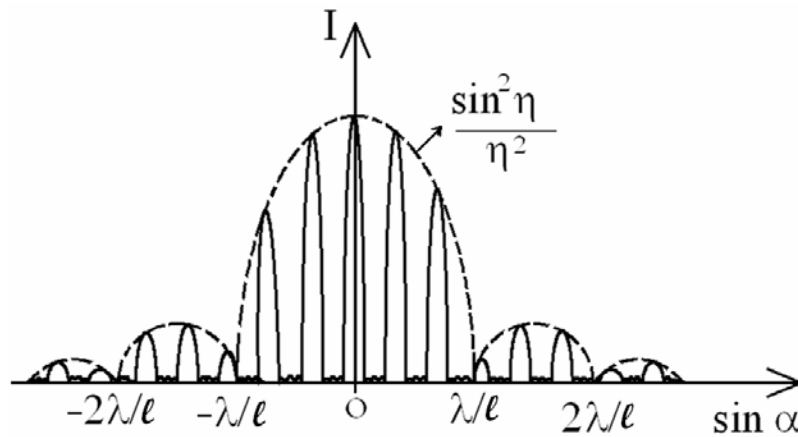


Fig. III.11 Distribuția intensității undelor difractate pe o rețea unidimensională, la incidență normală.

Din anularea derivatei întâi a intensității, $\frac{dI}{d\beta} = 0$, mai rezultă:

$$N \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(N\beta). \quad (\text{III.67})$$

Soluțiile acestei ecuații transcendente (care se rezolvă prin metoda grafică) corespund *maximelor secundare* de difracție ale căror intensități sunt foarte mici.

Observație: Deoarece condiția (III.65) pentru maximele principale de difracție depinde de lungimea de undă, se obțin, în cazul folosirii unei surse luminoase complexe, maxime de culori diferite la unghiuri diferite, deci rețeaua de difracție se poate utiliza ca **aparat spectral** (pentru analiza lungimilor de undă ale radiațiilor emise de o sursă complexă).

Exemple:

- lucrarea de laborator "Determinarea lungimii de undă a unei radiații luminoase cu rețeaua de difracție" (Fig. III.12).

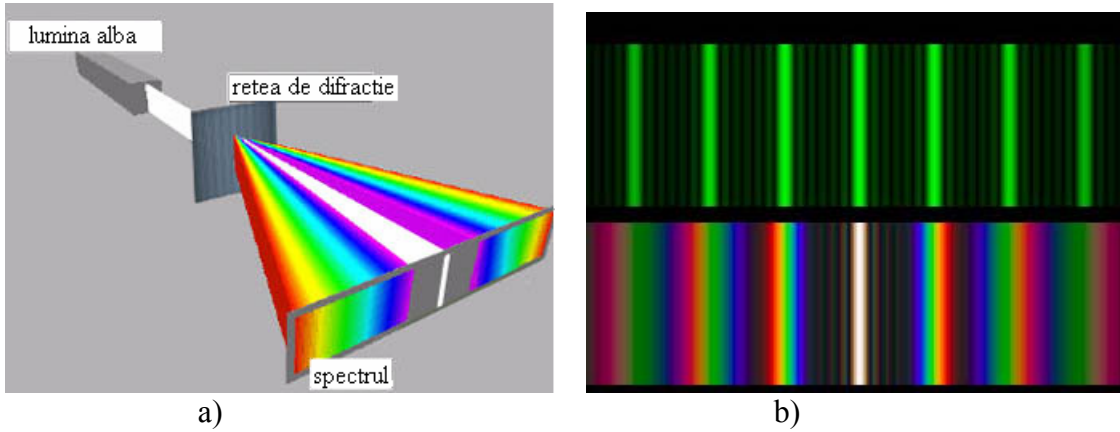


Fig. III. 12. a) Difrakția luminii albe prin rețeaua de difracție unidimensională; b) comparație între figura de difracție pentru o undă luminoasă monocromatică (verde) și pentru lumina albă.

- Difrakția luminii albe pe suprafața unui CD; microcanalele (trăsăturile) de pe un CD acționează ca o rețea de difracție ducând la separarea componentelor luminii albe (Fig. III. 13). Distanța dintre două trăsături pe CD (constanta rețelei) este de $1,6 \mu\text{m}$ și corespunde la 625 trăsături/mm. Pentru radiația roșie primul maxim de difracție se produce la un unghi de aprox. 22° .



Fig. III. 13. Microcanalele (trăsăturile) de pe un CD acționează ca o rețea de difracție ducând la separarea componentelor luminii albe.

Puterea de rezoluție a unui aparat spectral

Fie două radiații cu lungimi de undă foarte apropiate λ_1 și λ_2 . Folosind media lor aritmetică, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, și diferența lor, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, rezultă: $\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2}$;
 $\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2}$, cu $\Delta\lambda \ll \bar{\lambda}$.

Capacitatea unui aparat spectral de a distinge două linii spectrale având lungimi de undă foarte apropiate se numește *putere de rezoluție* și se definește prin:

$$\mathfrak{R} = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} \quad (\text{III.68})$$

Pentru a deduce formula puterii de rezoluție pentru rețeaua de difracție se folosește *criteriul Rayleigh*: **Două linii spectrale se consideră distincte dacă distanța dintre ele este cel puțin egală cu cea în care maximum unaia coincide cu minimum celeilalte** (Fig. III.14).

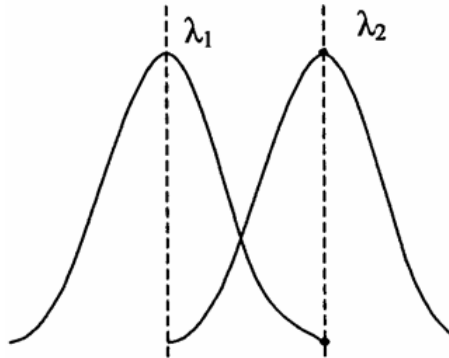


Fig. III.14. Ilustrarea criteriului Rayleigh.

În cazul rețelei de difracție:

$$d \sin \alpha = n\lambda_2 \quad (\text{maxim de difracție}) \quad (\text{III.69})$$

$$d \sin \alpha = n\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N} \quad (\text{minim de difracție}) \quad (\text{III.70})$$

Rezultă: $N\Delta\lambda = \lambda_1/N$; apoi: $nN = \lambda_1/\Delta\lambda$; dar: $\lambda_1 \cong \bar{\lambda}$ deoarece $\Delta\lambda \ll \bar{\lambda}$.

$$\text{În final:} \quad \mathfrak{R} = nN \quad (\text{III.71})$$

Aplicație: Linia galbenă a atomului de sodiu este, de fapt, un dublet format din $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ și $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. Să se stabilească dacă o rețea unidimensională de difracție având 400 fante/cm și o lățime a zonei active de 5 cm poate rezolva acest dublet în spectrul de ordinul întâi.

Rezolvare: Din: $\mathfrak{R} = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda'} = nN$ obținem: $\Delta\lambda' = \frac{\bar{\lambda}}{nN} = 0,29465 \text{ nm} \cong 0,3 \text{ nm}$ ($N = 2000$; $n = 1$); dar: $\lambda_2 - \lambda_1 = 0,6 \text{ nm}$; deci: $\lambda_2 - \lambda_1 < \Delta\lambda'$, adică dubletul este rezolvat.