1.MECANICA

1.1 Mecanica clasica vectoriala

Miscarea mecanica este cea mai simpla forma de miscare a materiei. Ea consta in deplasarea corpurilor fata de un referential, sau ale partilor lor una fata de alta. Miscarea are loc in spatiu si in timp; spatiul si timpul sunt forme de existenta esentiale ale materiei.

Mecanica studiaza miscarea corpurilor reducandu-se la puncte materiale. In mecanica sunt dezvoltate formalismele cu care de altfel opereaza si fizica moderna. Ea poate fi considerata un caz limita al mecanicii cuantice si a teoriei campului.

"Punctul material" este un corp cu astfel de dimensiuni incat sa poata fi neglijate in studiul miscarii sale. Dimensiunile sunt mici in raport cu distantele fata de corpurile inconjuratoare. Punctul geometric caracterizat prin masa corpului pe care-l reprezinta este tocmai punctul material.

Un corp cu astfel de dimensiuni incat nu poate fi privit ca un punct material divizandu-l in parti suficient de mici, incat sa poata fi considerate puncte materiale, formeaza un "sistem de puncte materiale".

Se numeste sistem de referinta un ansamblu de corpuri perfect rigide si reciproc imobile, fata de care se studiaza miscarea punctului material, caruia i se ataseaza un ceasornic, presupus perfect. De obicei in fizica se lucreaza cu un sistem de referinta particular, si anume sistemul de coordonate carteziene Oxyz, reprezentat in Fig.1.1, caruia i se ataseaza un ceasornic.fixat in originea O. Rezolvarea unor probleme mai complicate determina introducerea si altor sisteme de referinta.

Punctul **P** din spatiu este definit in acest sistem prin vectorul de pozitie $\overline{r}$. Proiectiile lui $\overline{r}$ pe axele de coordonate sunt **x**, **y**, **z**.. Intre punctele din spatiu si coordonatele **x**, **y**, **z** ale acestora exista o corespondenta biunivoca.

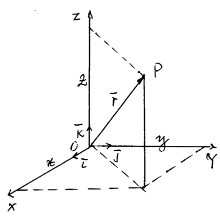

Figura 1.1

Vectorul de pozitie $\overline{r}$ ce caracterizeaza punctul **P** se poate scrie:

$$\overline{r}(x,y,z)=x\,\overline{i}+y\,\overline{j}+z\,\overline{k}$$

unde $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ sunt versorii directiilor Ox, Oy, Oz.(Fig.1). Punctul **P** se misca in spatiu atunci cind coordonatele sale variaza in raport cu timpul:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Daca se cunosc aceste functii inseamna ca am determinat perfect miscarea (adica se cunoaste pozitia in fiecare moment). Ecuatiile (1.1) reprezinta legea de miscare a punctului material. Explicitarea lor este scopul final al mecanicii

O alta problema este traiectoria punctului material. pentru obtinerea ecuatiei traiectoriei se elimina timpul intre ecuatiile (1.1) si se obtine o functie f(x,y,z) = ct., care reprezinta traiectoria punctului material considerat.

Vectorial, ecuatiile (1.1) se pot scrie:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \qquad (1.2.)$$

Se defineste viteza:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}} = v \cdot \overline{v}_0 \qquad (1.3)$$

unde $\overline{v}_0$ este versorul directiei vitezei.

Acceleratia va fi:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} \qquad (1.4)$$

Din relatia (1.3) se observa ca viteza este un vector tangent la traiectorie.

Acceleratia are, in general, doua componente: normala si tangentiala:

$$\overline{a}=\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v\cdot\overline{v}_0\right)=\frac{dv}{dt}\overline{v}_0+v\frac{d\overline{v}_0}{dt} \tag{1.4'}$$

unde

$$\frac{dv}{dt}\overline{v}_0=\overline{a}_t$$

este acceleratia dupa directia vitezei si poarta numele de acceleratie tangentiala, iar:

$$\overline{a}_n=v\frac{d\overline{v}_0}{dt} \tag{1.4''}$$

este acceleratia dupa o directie normala la traiectorie, si poarta numele de acceleratie normala.

Cunoasterea vectorului de pozitie la momentul $t=t_0$ nu este suficienta pentru a cunoaste acest vector si la momentul t+dt. Fie $\overline{r}\left(t_0+dt\right)$ vectorul de pozitie respectiv. Se dezvolta in serie de puteri in jurul punctului de coordonata t_0 si se neglijeaza termenii de ordin superior. Se obtine:

$$\overline{r}\left(t_0+dt\right)=\overline{r}\left(t_0\right)+\frac{d\overline{r}}{dt}dt=\overline{r}\left(t_0\right)+\overline{v}_0\left(t_0\right)dt \tag{1.5}$$

Se impune deci cunoasterea lui $\overline{v}_0\left(t_0\right)=\overline{v}_0$ - viteza initiala. Se poate formula principiul determinismului clasic (laplaceian): pentru a determina miscarea unui punct material la momentul $t=t_0+dt$, este suficient sa cunoastem pozitia si viteza sa la un moment dat $t=t_0$. Deci cunoscand $\overline{r}\left(t_0\right)$ si $\overline{v}_0\left(t_0\right)$ se pot cunoaste pozitiile ulterioare. Pentru viteza se poate scrie:

$$\overline{v}\left(t_0+dt\right)=\overline{v}\left(t_0\right)+\frac{d\overline{v}}{dt}dt=\overline{v}\left(t_0\right)+\overline{a}dt \tag{1.6}$$

Pentru a satisface principiul determinismului clasic este necesara o relatie intre $\overline{a},\overline{v}$ si $\overline{r}$

$$\overline{a}=\overline{a}\left(\overline{r},\overline{v},t\right) \tag{1.7}$$

Astfel de relatii se numesc tot ecuatii de miscare si explicit se pot scrie

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{a}\left(\overline{r} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}, t\right) \quad (1.8)$$

Aceasta ecuatie depinde de sase parametri. Pentru a-i determina folosim conditiile initiale.(valorile initiale ale pozitiei si vitezei la momentul initial).

1.1.1. Sistemul inertial. Principiul inertiei

Intr-un sistem de referinta oarecare este posibil ca legile de miscare sa fie complete, dar sa apara termeni legati de alegerea particulara a sistemului, si nu numai de miscarea corpului. Pentru a realiza studiul (intrinsec) al miscarii independent de sistemul de referinta, trebuie ales un sistem de referinta cit mai adecvat din punctul de vedere al spatiului si timpului.

In mecanica clasica, spatiul si timpul sunt marimi absolute. Ela nu depind de punctul material aflat in miscare.(In realitate, acestea nu sunt independente de corpurile materiale-v. teoria relativitatii generalizate sau teoria gravitatiei.)

Deci spatiu-timpul nu este independent de prezenta corpurilor materiale, care face ca proprietatile sale sa se modifice: drumul cel mai scurt intre doua puncte este o curba ce depinde de masele corpurilor - numita geodezica.

Se poate considera ca spatiul fizic este omogen si izotrop, iar timpul este uniform.

Spatiul este omogen daca toate punctele sale sunt echivalente din punct de vedere fizic. Spatiul este izotrop daca toate directiile din spatiu sunt echivalente din punct de vedere fizic.

Timpul este uniform daca toate momentele sunt echivalente din punct d evedere fizic, El ia numai valori pozitive si este ireversibil. Aceasta proprietate inseamna: doua fenomene fizice identice se desfasoara in acelasi fel in doua puncte diferite si la doua momente diferite. Intr-un spatiu omogen si izotrop si un timp uniform miscarea se face dupa legi foarte simple, fara influenta proprietatilor spatiului. In spatiul neomogen, miscarile pot fi influentate in mod esential de proprietatile spatiului. Chiar daca asupra punctului material nu actioneaza nici o cauza exterioara, el poate avea o acceleratie.

Definim ca sistem de referinta inertial un sistem in care spatiul este omogen si izotrop iar timpul uniform. problema gasirii unui astfel de sistem este practic dificila. Solutia ei este data de principiul inertiei (al lui Newton).

Principiul inertiei afirma:
"Orice corp liber, intr-un sistem de referinta inertial, se gaseste in repaus sau in miscare rectilinie si uniforma".

Se poate spune ca un sistem de referinta este inertial daca in el este valabil principiul inertiei.

Echivalenta celor doua afirmatii este evidentiata prin reducere la absurd: principiul inertiei nu este valabil intr-un sistem de referinta neinertial.

Cu ajutorul principiului inertiei se poate gasi o infinitate de sisteme inertiale daca se cunoaste unul singur. Orice sistem de referinta care se misca fata de sistemul de referinta inertial (Fig. 1.2) cu viteza constanta intr-o miscare rectilinie este un sistem de referinta inertial.

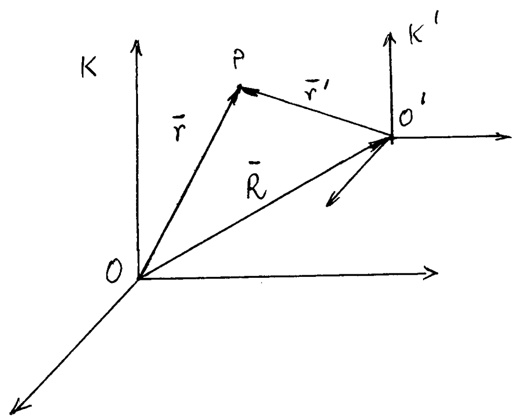

Figura 1.2

Fie sistemul K' ce se deplaseaza dupa directia O' cu o viteza ralativa $\overline{v} = ct$. Fie **P** un punct material caracterizat, fata de sistemul K, la momentul de timp t, prin vectorul de pozitie $\overline{r}$ si fata de sistemul K', la acelasi moment de timp, prin vectorul de pozitie $\overline{r}$'.

Se observa ca:

$$\overline{r} = \overline{R} + \overline{r}'$$

Viteza relativa a sistemelor este :

$$\overline{V} = \frac{d\overline{R}}{dt} \tag{1.9}$$

Deoarece $\overline{V} = ct$, $\overline{V}dt = d\overline{R}$ deci $\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{V} \cdot t$.

Alegem constanta astfel incât la t=0 originile celor doua sisteme sa coincida, adica $\overline{R}_0 = 0$.

Asadar:

$$\overline{r}' = -\overline{V}t + \overline{r}$$

Dar :

$$\frac{d\overline{r}'}{dt} = -\overline{V} + \frac{d\overline{r}}{dt} \tag{1.10}$$

Cum sistemul K este inertial ($\frac{d\vec{r}}{dt} = ct.$) rezulta:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\overline{V} + \overline{c}t = const. \tag{1.11}$$

Deci sistemul este inertial.

In mecanica clasica se introduce urmatorul postulat: "timpul are un caracter absolut". Pentru definirea timpului absolut, afirmam ca: doua evenimente arbitrare sunt simultane dacå ele au loc la acelasi moment de timp. Timpul absolut este timpul cu proprietatea: dacå doua evenimente sunt simultane intr-un sistem de referinta, ele vor fi simultane in oricare alt sistem de referinta.

In K', AB=AC (Fig.1.3)

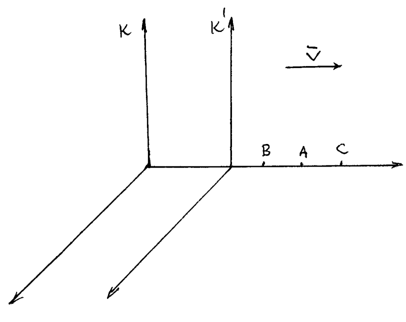

Figura 1.3

Presupunem ca din **A** s-a lansat un semnal sonor; mediul fiind izotrop, inseamna ca receptia in **B** si **C** se va face simultan. Conform postulatului fundamental al mecanicii, acest lucru se intimpla si in **K**. Dar **B** se apropie, iar **C** se departeaza de sistemul sonor. Deci viteza sunetului se modifica atunci cind sunetul se propaga spre **B** si, respectiv, **C** (spre **B** cu **-V**, iar spre **C**, cu **+V**).

Deci:

$$t' = t \quad (1.12)$$

$$\overline{v}' = \frac{d\overline{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{r} - \overline{V}t\right) = \frac{d\overline{r}}{dt} - \overline{V} = \overline{v} - \overline{V} \quad (1.13)$$

Rezulta:

$$\overline{v}' = \overline{v} - \overline{V} \quad (1.14)$$

Acum este evident ca daca **V** = const. rezulta si **v**'= const. Deci K' este inertial. Relatiile:

$$\begin{cases} \overline{r}' = \overline{r} - \overline{V}t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.15)$$

constituie transformarile Galilei.

<u>Principiul relativitatii al lui Galilei</u>

"Toate legile naturii sunt aceleasi in orice sistem de referinta inertial."

Formulare echivalenta: Legile naturii trebuie scrise intr-o astfel de forma matematica incat sa fie invarianta la transformarile Galilei.

<u>Propagarea interactiunii dintre corpuri in mecanica clasica.</u>

Propagarea interactiunii dintre corpuri in mecanica clasica se poate face in doua moduri:

1. De la distanta.
2. Din aproape in aproape (interactiune ce se propaga cu viteza finita):

Presupunand viteza constanta, atunci pe baza principiului lui Galilei, ea trebuie sa fie aceeasi in orice sistem de referinta inertial, deoarece legile sunt aceleasi.Dar din legea compunerii vitezelor se obtine:

$$\overline{v}' = \overline{v} - \overline{V}$$

Din principiul lui Galilei rezulta:

$\overline{v}' = \overline{v}$

Apare o contradictie intre cele doua relatii, deci interactia din aproape in aproape apare ca imposibila.

Interactia de la distanta rezulta din principiul lui Galilei si din caracterul absolut al timpului.

Consecinte: Ecuatiile de miscare ale unui punct material depind de pozitia celorlalte puncte materiale la un moment de timp dat si nu depind de evolutia anterioara sau ulterioara a punctului material.

Deci o marime care descrie interactia dintre particule poate depinde numai de vectorii lor de pozitie si nu de vitezele particulelor.

1.1.2. Legile fundamenatle ale dinamicii

a) Principiul inertiei:
Orice corp liber aflat intr-un sistem de referinta inertial se gaseste fie in repaus, fie in miscare rectilinie si uniforma.

b) Consideram un corp (1) intr-un sistem de referinta inertial. Dca asupra lui nu actioneaza nici o cauza, atunci el se misca recrtiliniu si uniform. Daca apare un corp (20 cu care corpul (1) interactioneaza, atunci acesta dobandeste o acceleratie a_{21}, provocata de prezenta corpului (2). Daca se mai introduce si un corp 3, atunci corpul 1 va avea o alta acceleratie $a_{21}+a_{31}$. Acest fapt rezulta din experienta si este o ilustrare a principiului general din fizica al superpozitiei: doua actiuni exterioare se aduna vectorial. Tot experimental se constata ca $a_{21} \to 0$ daca 2 se indeparteaza foarte mult de 1. Pornind de la aceste fapte intuitive s-a rationat astfel; daca un corp.este liber, atunci el se misca rectiliniu si uniform fara sa fie influentat de o cauza;daca el nu se mai misca rectiliniu si uniform, asupra lui a actionat o cauza exterioara care a dus la schimbarea starii de miscare a corpului (aparitia unei acceleratii). Aceasta cauza exterioara este deci caracterizata de acceleratia primita de corpul respectiv si deci aceasta cauza exterioara poate fi si ea exprimata matematic printr-o marime cu aceleasi proprietati generale ca si acceleartia. Aceasta marime vectoriala ce caractyerizeaza uinteractia dintre corpuri se numeste forta, avand caracteristici vectoriale.

Proprietati: 1) Corpul 2 actioneaza asupra corpului 1 cu forta F_{21};

2) Daca asupra unui corp 1 actioneaza doua corpuri 2 si 3, atunci forta totala va fi $F_{21}+F_{31}$;

3) Forta cu care actioneaza corpul 2 asupra lui 1 tinde la zero, daca 2 se indeparteaza foarte mult de 1;

4) Forta avand un caracter vectorial rezulta $F_{21}||a_{21}$.

Pornind de la aceste proprietati se poate gasi un procedeu de a masura fortele.

Daca un corp este liber, atunci asupra lui nu actioneaza nici o forta. Daca

$$\overline{a}_{21}+\overline{a}_{31}=\overline{0} \tag{1.16}$$

atunci:

$$\overline{F}_{21}+\overline{F}_{31}=\overline{0}$$

Cu ajutorul acestei relatii putem masura forta. Presupunem ca, drept urmare a actiunii fortei $\overline{F}_{21}$, corpul 1 primeste $\overline{a}_{21}$. Avem un aparat cu care actionam asupra corpului respectiv, aceasta actiune putand fi masurata exact.

Daca vom actiona cu o forta $\overline{F}_1=ct$ astfel incat corpul actionat cu $\overline{F}_{21}$ si $\overline{F}_1=ct$ sa aiba acceleratia nula, rezulta:

$$\overline{F}_{21}+\overline{F}_1(ct)=0$$

Astfel am masurat $\overline{F}_{21}=-\overline{F}_1(ct)$.

S-au pus in evidenta diferite tipuri de forte:

1.Intre doua sarcini electrice q_1, q_2 actioneaza forta:

$$\overline{F}=\frac{q_1q_2}{4pe_0r_{12}^2}\frac{\overline{r}_{12}}{r_{12}} \tag{1.17}$$

2.S-a constatat ca , daca o sarcina electrica q se misca in campul electromagnetic caracterizat de E si B, atunci forta care actioneaza este :

$$\overline{F}=q(\overline{E}+\overline{v}x\overline{B}) \tag{1.18}$$

numita forta Lorentz.

3. Forta elastica cu care actioneaza un resort asupra unui punct material legat de el este:

$$\overline{F}=-k\overline{r} \tag{1.19}$$

In general fortele se determina experimental.

In teoria campului sau a gravitatiei fortele pot fi determinate teoretic, plecandu-se de la niste principii generale (de pilda fortele de la punctele 1) si 2).).

La inceputul secolului XX s-a constatat ca teoria gravitatiei a lui Newton nu este corecta atat teoretic cat si practic. Teoretic, daca se presupune ca Universul si materia din el sunt infinite atunci, conform legii a doua a lui Newton, ar rezulta ca asupra unui punct ar actiona o forta infinita. Din punct de vedere practic, s-au constatat unele anomalii in miscarea planetei Mercur.

Einstein incearca o generalizare teoretica:

$$F_{12} \sim \frac{1}{r^2 + \varepsilon} \qquad (1.20)$$

El reanalizeaza intreaga teorie, elaboreaza teoria relativitatii restrinse si obtine rezultate in foarte buna concordanta cu experienta.

<u>Notiunea de masa</u>

Daca asupra unui corp 1 actioneaza pe rind corpurile 2, 3, 4, ...cu $\overline{F}_{21}, \overline{F}_{31}, \overline{F}_{41}$, ...acceleratiile vor fi: $\overline{a}_{21}, \overline{a}_{31}, \overline{a}_{41}$,...si exista urmatoarea relatie:

$$\frac{|\overline{F}_{21}|}{|\overline{a}_{21}|} = \frac{|\overline{F}_{31}|}{|\overline{a}_{31}|} = \frac{|\overline{F}_{41}|}{|\overline{a}_{41}|} = \ldots = \text{const.} = m_1 \qquad (1.21)$$

Constanta depinde numai de natura corpului 1 si se noteaza m_1.

Masa unui corp poate fi considerata ca o masura a inertiei acelui corp, in sensul ca, cu cit masa corpului este mai mare, cu atit acceleratie primita sub actiunea unai forte constante este mai mica, adica masa masoara intr-un fel capacitatea corpului de a nu-si schimba starea de repaus sau de miscare rectilinie si uniforma.

Deoarece $\overline{F} \| \overline{a}$, se poate scrie:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} \qquad (1.22)$$

Observatii:

- Exista expresii particulare pentru forte;
- Exista principiul echivalentei, conform caruia masa m, astfel introdusa ("masa inerta") este riguros egala cu masa gravifica a corpului. Masa gravifica apare in relatia fortei de atractie gravitationala.

$$F_{12} = k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\overline{r}_{12}}{r_{12}} \tag{1.23}$$

unde κ este constanta gravitatiei universale, m_1, m_2 - masele gravifice ale corpurilor 1 si 2. Experimental s-a constatat ca masa gravifica si masa inerta sunt egale. Atunci (23) este o lege conform careia forta ce actioneaza asupra unui punct material este egala cu produsul dintre masa acestuia si acceleratia primita. In cimpul gravitational al Pamintului
(M_p este masa Pamintului) asupra unui corp cu masa m_2 se exercita forta:

$$F_{12} = k\frac{M_p m_2}{R_p^2} = m_2 g \tag{1.23'}$$

m_2 g fiind greutatea corpului respectiv, g este acceleratia gravitationala. deci orice forta se poate scrie sub forma:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

relatie ce exprima matematic principiul fundamental al mecanicii newtoniene.

$\overline{F}$F este o forta experimentala, care trebuie sa fie data aprioric:

$$\overline{F} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{v}, t) \tag{1.24}$$

Atunci:

$$m\overline{a} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{v}, t) \tag{1.24'}$$

sau

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}(\overline{r}, \frac{d\overline{r}}{dt}, t) \tag{1.24"}$$

Sub aceasta forma, legea a doua a lui Newton reprezinta un sistem de trei ecuatii diferentiale de ordinul II.Solutia acestor ecuatii nu este unica. Impunem conditii suplimentare pentru a se determina o miscare unica. Aceste conditii se numesc conditii initiale:

$$\begin{aligned} \overline{r}(t_0) &= \overline{r}_0 \\ \dot{\overline{r}}(t_0) &= \overline{r}_0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ecuatia (1.24 c) are solutiae unica daca se impun conditiile initiale(1.25).

<u>Legea a III-a a dinamicii</u>

Daca un punct material 1 actioneaza asupra punctului material 2 cu o forta F_{12}, atunci 2 reactioneaza asupra lui 1 cu forta F_{21}, egala si de sens contrar.

Spre deosebire de legile I si II care sunt valabile sub o forma sau alta si in alte teorii, legea a treia a dinamicii are un caracter limitat la mecanica. In cazul fortelor electromagnetice ea nu mai este valabila.

Consecinte ale legii a II-a:

$$\overline{F} = m\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\overline{v}) \tag{1.26}$$

$$\overline{p} = m\overline{v} \quad m = const. \tag{1.27}$$

$$\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt} \tag{1.28}$$

Relatia (1.28) reprezinta o exprimare mai generala decat (1.22). Ea ramane sub aceasta forma si in teoria relativitatii.

Din relatia (1.280 rezulta legea conservarii impulsului:

Daca F=0

rezulta:

$$\overline{p} = const. \tag{1.29}$$

Prin inmultirea vectoriala a relatiei (1.28) cu r, rezulta:

$$\overline{r}\times\overline{F} = \overline{r}\times\frac{d\overline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{r}\times\overline{p}) \tag{1.30}$$

care pentru $\overline{r} = const.$ se scrie:

$$\overline{r}\times\overline{F} = \frac{d}{dt}(\overline{r}\times\overline{p}) \tag{1.30'}$$

Prin definiti, marimea:

$$\overline{r}\times\overline{F} = \overline{M} \tag{1.31}$$

este momentul fortei, iar marimea:

$$\overline{r}\times\overline{p} = \overline{L} \tag{1.32}$$

se numeste moment cinetic. Atunci:

$$\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt} \tag{1.33}$$

si exprima teorema de variatie a momentului cinetic.

Daca $\overline{M} = 0$, rezulta $\overline{L} = const.$

Dar $\overline{M} = 0$ daca $\overline{F} = 0$ (se conserva si $\overline{p}$) sau daca $\overline{r}\,||\,\overline{F}$ (forte care trec mereu printr-un punct fix, numite forte centrale).

Consecinte geometrice:

Daca $\overline{r}\cdot\overline{L} = 0$, atunci $\overline{r}\perp\overline{L}$

si rezulta ca punctul va avea o miscare plana. Aria maturata de raza vectoare in unitatea de timp se poate calcula presupunand ca intre cele doua segmente traiectoria este un arc de cerc. Ea va fi egala cu $\frac{\overline{r}^2 dq}{2}$ (Fig.1.4).

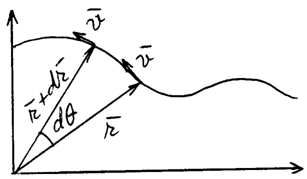

Figura 1.4

Dar:

$$v = \frac{rdq}{dt} = \frac{rvdt}{2} = \frac{|\bar{r} \times \bar{v}|dt}{2} = \frac{|\bar{L}|}{2m}dt$$

Rezulta ca aria calculata este constanta.

<u>Lucrul mecanic. Energia cinetica</u>

Presupunem un corp care se deplaseaza intre punctele 1 si 2 din figura 1.5, sub actiunea unei forte exterioare F. Calculam lucrul mecanic efectuat de aceasta forta:

Figura 1.5

$$L_{12} = \int_1^2 \bar{F} d\bar{r} = \int_1^2 \frac{d(m\bar{v})}{dt}\frac{dr}{dt}dt = \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt = T_2 - T_1 \qquad (1.34)$$

unde:

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (1.35)$$

reprezinta energia cinetica.

Lucrul mecanic efectuat de o forta exterioara pentru a deplasa un corp din punctul 1 in 2 este egal cu diferenta dintre energiile cinetice ale punctului material in punctele 2 si 1. Se poate spune ca energia cinetica este lucrul mecanic efectuat de o forta pentru a imprima unui corp aflat initial in repaus o viteza $\bar{v}$.

Relatiile (1.34) si (1.35) sunt valabile pentru orice tip de forta.

1.1.3 Legea conservarii energiei mecanice

Aceasta lege este valabila pentru un caz particular de forte, fortele conservative. Acestea sunt, prin definitie, fortele al caror lucru mecanic pe orice contur inchis este nul:

$$\oint \bar{F} d\bar{r} = 0 \qquad (1.36)$$

Fortele care nu satisfac aceasta cerinta se numesc forte disipative. Fortele gravitationale, electrostatice, sunt exemple de forte conservative. Fortele disipative sunt fortele de rezistenta ale aerului, de frecare, de viscozitate. Se poate spune ca fortele din natura sunt conservative atunci cind ne referim la sisteme izolate si inchise.

Teorema

Conditia necesara si suficienta ca o forta sa fie conservativa este:

$$\overline{F} = -\operatorname{grad}V(x,y,z) = -\nabla V(x,y,z) = -\frac{dV}{d\overline{r}} \qquad (1.37)$$

unde V=V(x,y,z) este potentialul scalar. (energia potentiala).

Demonstratie:

Pentru a demonstra legea de conservare a energiei totale procedam astfel:

Se considera conturul din Fig.1.5. Tinind seama de (1.37), rezulta:

$$\oint \overline{F} d\overline{r} = -\oint \nabla V d\overline{r} = 0 \qquad (1.38)$$

Deci fortele conservative sunt date de gradientul energiei potentiale (al potentialului scalar)

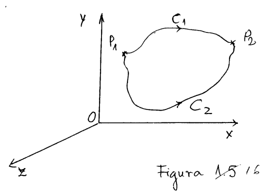

Figura 1.6

Dar:

$$\overline{F} \cdot d\overline{r} = 0$$

adica

$$\oint_{121} \overline{F} d\overline{r} = 0 \qquad (1.39)$$

si

$$\oint_{121} \overline{F} d\overline{r} = \int_{1C_12} \overline{F} d\overline{r} + \int_{1C_22} \overline{F} d\overline{r} = 0$$

adica

$$\int_1^2 \overline{F} d\overline{r} = \int_1^2 \overline{F} d\overline{r} \qquad (1.40)$$

Fie un punct fix $P_1(x_1, y_1, z_1)$ din spatiu si unul variabil $P_2(x_2, y_2, z_2)$.Din definitia potentialului scalar rezulta ca:

$$V(x,y,z) = -\int_{p_1}^{p_2} \overline{F} d\overline{r} = -\int_1^2 \overline{F} d\overline{r} = L_{12} \qquad (1.41)$$

Conform relatiei (34) se scrie:

$$\int_1^2 \overline{F} d\overline{r} = T_2 - T_1 \qquad (1.42)$$

Adica

$$\int_1^2 (\nabla V) d\overline{r} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 = L_{12}$$

$$(1.43)$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (1.44)$$

unde $E_1=T_1+V_1$ si $T_2+V_2=E_2$ reprezinta energia mecanica totala a punctului material considerat. Deci:

$$E_1=E_2 \qquad (1.45)$$

adica energia mecanica totala, in cazul sistemului izolat, se conserva.

In cazul fortelor disipative legea nu este valabila.

Sisteme de N puncte materiale

Presupunem ca avem N puncte materiale in spatiu si fiecare punct este descris de un vector de pozitie r_i (i=1,N)

Se scriu mai intii ecuatiile lui Newton pentru aceste puncte si urmarim sa obtinem legile de conservare. Izolam un punct din acest sistem si scriem ecuatiile lui Newton:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i$$

unde F_i este compus din doua forte:

- o forta datorata interactiunii acestui punct cu corpurile materiale din exteriorul sistemului respectiv.
- a doua forta datorita interactiei lui cu punctele din sistem.

Conform principiului superpozitiei aceste forte se aduna vectorial:

$$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(ext)} + \overline{F}_i^{(int)} \qquad (1.46)$$

$\overline{F}_i^{(int)}$ se poate scrie sub o forma concreta si depinde de modul de interactiune a particulelor interioare.Fie F_{ji} forta cu care particula j actioneaza asupra particulei i. Atunci:

$$\overline{F}_i^{(int)} = \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_{ji} \qquad (1.47)$$

Vom presupune prin conventie ca $F_{ji}=0$.

Aceste forte satisfac principiul al III-lea al lui Newton:

$$F_{ji}=-F_{ij} \qquad (1.48)$$

Deci:

$$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_{ji} \qquad (1.49)$$

Presupunem ca aceste forte actioneaza pe directia care uneste punctele

Ecuatiile

$$m_j \overline{a}_j = \overline{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_{ji} ......(i=\overline{1,N}) \qquad (1.50)$$

pot fi rezolvate daca se cunosc expresiile fortelor.

Fortele depind de pozitia punctelor materiale in spatiu. Fiind conservative, ele nu depind in general de viteze, pentru ca astfel nu ar fi verificat principiul determinismului clasic si caracterul instantaneu de propagare a actiunilor.

Din punct de vedere matematic, acestea sunt 3N ecuatii diferentiale de ordinul II, iar solutia depinde de 6N constante arbitrare, care se determina din conditiile initiale:

$$\begin{aligned} \overline{r}_i(0) &= \overline{r}_{i0} \\ \overline{v}_i(0) &= \overline{v}_{i0} \end{aligned} \qquad (1.51)$$

Teoretic, din rezolvarea ecuatiilor putem determina starea de miscare a sistemului.Rezolvarea sistemului (1.50) este dificila. Problema unui corp sau a doua corpuri se poate rezolva exact. De la trei corpuri in sus insa, ea se complica foarte mult si nu exista metode generale de rezolvare. Se folosesc atunci metode aproximative (calculul perturbatiilor) si se aplica de exemplu in cazul rachetei cu masa mult mai mica decat a Pamintului si a Lunii(in general in cazurile in care intervine un parametru mult mai mic in comparatie cu celelalte).

Pe masura dezvoltarii fizicii, problema celor trei corpuri se complica din ce in ce mai mult. In teoria relativitatii nu se poate aborda prin acest formalism nici problema a doua corpuri. In electrodinamica cuantica- nici problema unui corp.

Legi de conservare pentru sistemele de N puncte materiale

Numim marime conservativa o marime ce depinde de coordonatele si vitezele punctelor materiale respective si care devine identic egala cu o constanta pentru cazul miscarii reale(marimi independente de timp).

1.Legea conservarii impulsului

Folosim relatia:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i$$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = \overline{F}_i$$

Insumand dupa cele N puncte materiale, se obtine:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\overline{F}_{ji} \qquad (1.52)$$

Definim impulsul total al sistemului:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i \qquad (1.53)$$

Rezulta forta exterioara:

$$\overline{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{(ext)} \qquad (1.54)$$

Fiecarei perechi (i,j) ii corespunde perechea (j,i).

Folosim urmatoarea metoda:

$$\sum_{i,j=1}^{N}\overline{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\overline{F}_{ji} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\overline{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(\overline{F}_{ji} + \overline{F}_{ij}) = 0 \qquad (1.55)$$

pe baza principiului al III-lea.

Deci:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{F}^{(ext)} \qquad (1.56)$$

Deci forta exterioara care actioneaza asupra sistemului produce variatia impulsului total al acestuia.

Daca $F^{(ext)}=0$ sau daca sistemul este izolat, atunci impulsul total P se conserva:

$$\overline{p} = const. \qquad (1.57)$$

Din aceasta lege de conservare rezulta:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r}_i \qquad (1.58)$$

introducem un vector de pozitie:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (1.59)$$

al carui varf se afla in centrul de masa al sistemului.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M \qquad (1.60)$$

reprezinta masa sistemului. Atunci se poate scrie:

$$\overline{P} = M\dot{\overline{R}} = M\overline{V} \qquad (1.61)$$

Impulsul total al sistemului este echivalent cu impulsul unei singure particule cu masa egala cu masa totala a sistemului, concentrata in centrul de masa al sistemului si avand viteza corespunzatoare.

Legea conservarii impulsului arata ca viteza centrului de masa este constanta in timp. (Un exemplu ar putea fi constituit prin idealizarea sistemului solar ca un sistem izolat de puncte materiale care se misca in spatiu).

Observatii:

Principiul al III-lea (al actiunii si reactiunii) are un caracter limitat la interactiunile slabe. Aici ne-am bazat insa pe acest principiu. Rezulta oare ca nici legea conservarii impulsului nu este valabila intotdeauna?

In cazul particulelor incarcate supuse la forte electrice, conservarea impulsului mecanic nu mai este valabila, dar functioneaza o lege de conservare mai generala, aceea a conservarii impulsului total(impulsul corespunzator particulei plus impulsul campului electromagnetic).

Conservarea impulsului total este legata de omogenitatea spatiului.

2.Legea conservarii momentului cinetic.

Se porneste tot de la ecuatia:

$$m_i \cdot \overline{a}_i = \overline{F}_i$$

$$\frac{d\overline{L}_i}{dt} = \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{r}_i \times \overline{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \overline{r}_1 \times \overline{F}_{ji} \qquad (1.62)$$

unde:

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{N} \overline{L}_i \quad \text{iar,} \quad \overline{L}_i = \overline{r}_i \times \overline{p}_1 \qquad (1.63)$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{r}_i \times \overline{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^{N} \overline{r}_1 \times \overline{F}_{ji} \qquad (1.64)$$

Primul termen reprezinta momentul rezultant al fortelor exterioare $M^{(ext)}$; al doilea termen este nul.

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{r}_1 \times \overline{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\overline{r}_i \times \overline{F}_{ji} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\overline{r}_i - \overline{r}_j\right) \times \overline{F}_{ij} \qquad (1.65)$$

Dar fortele sunt pe directia ce uneste punctele, deci:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{M}^{(ext)} \tag{1.66}$$

Daca momentul rezultant al fortelor exterioare este nul (sau daca sistemul este izolat), atunci momentul cinetic se conserva.

$$\begin{aligned} &\overline{M}^{(ext)} = 0 \\ &\overline{L} = \text{const.} \end{aligned} \tag{1.67}$$

Se pot exprima pozitiile fiecarui punct material in functie de pozitia centrului de masa:

$$r_i = \overline{R} + \overline{r}_i\,'$$

Consideram doua sisteme de referinta (Figura 1.7):

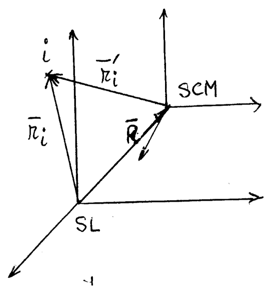

Figura 1.7

Impulsul total se scrie:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overline{R}}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overline{r}}_i\,' \tag{1.68}$$

Ultimul termen este nul pentru ca:

$$m_i \overline{r}_i = m_i\left(\overline{R}_i + \overline{r}_i\,'\right) \tag{1.69}$$

Momentul cinetic se scrie:

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\overline{r}}_i \times \dot{\overline{r}}_j = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\overline{R}\times\dot{\overline{R}} + \overline{R}\times\dot{\overline{r}}_i\,' + \overline{r}\,'_i \cdot \dot{\overline{R}} + \overline{r}\,' \cdot \dot{\overline{r}}_i\right) = \\ &= \overline{R}\times\overline{P} + \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{r}\,'_j \times \dot{\overline{r}}_i \end{aligned} \tag{1.70}$$

Deci momentul cinetic se descompune in doua parti: una pentru centrul de masa, iar cealalta constituie momentul cinetic al sistemului de puncte materiale fata de centrul de masa al sistemului.

3. Legea conservarii energiei

Se porneste tot de la ecuatia fundamentala:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \overline{F}_i d\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\int_1^2 m_i \frac{d\overline{v}_i}{dt}\overline{v}_i dt = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i \overline{v}_i^2}{2} \tag{1.71}$$

unde

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} = T \tag{1.72}$$

reprezinta energia cinetica totala a sistemului. Asadar lucrul mecanic efectuat de fortele exterioare pentru a deplasa sistemul din configuratia 1 in configuratia 2 este egal cu diferenta energiilor cinetice din cele doua configuratii.

Energia cinetica admite o descompunere analoga cu cea a momentului cinetic, conform cu:

$$\overline{r}_i = \overline{\overline{R}} + \overline{r}_i' \tag{1.73}$$

Deci:

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\overline{V}^2 + 2\overline{V}_i' V + \overline{V}_i^2\right) = \frac{M\overline{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{V}_i^2 = \frac{M\overline{V}^2}{2} + T' \tag{1.74}$$

Primul termen este energia cinetica a unui punct aflat in centrul de masa; al doilea termen este energia cinetica a sistemului de puncte fata de sistemul centrului de masa.

Toate fortele ce actioneaza asupra sistemului sunt conservative:

$$\overline{F}_i^{(ext)} = -\nabla V_i^{(ext)} = -\frac{\partial V_i^{(ext)}}{\partial \overline{r}_i}\left(\overline{r}_i\right) \tag{1.75}$$

$$\overline{r}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_j} \tag{1.76}$$

F_{ji} nu este arbitrara, intrucat presupunem ca aceste forte F_{ji} satisfac principiul actiunii si reactiunii:

$$\overline{F}_{ji} = -\overline{F}_{ij} \tag{1.77}$$

deci:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_i} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_j} \tag{1.78}$$

Rezulta ca V_{ji} depinde atat de r_i cat si de r_j.

Putem presupune ca $V_{ij}=V_{ji}$

Deci:

$$\frac{V_{ij}}{\overline{r}_i} + \frac{V_{ij}}{\overline{r}_j} = 0 \tag{1.79}$$

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\overline{r}_i, \overline{r}_j\right) \tag{1.80}$$

Dar ultima relatie indica faptul ca V_{ij} nu poate avea o dependenta arbitrara de $\overline{r}_j$ si $\overline{r}_i$.

Se poate scrie:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial(\overline{r}_i + \overline{r}_j)} = 0 \tag{1.81}$$

dar V_{ij} depinde de $\overline{r}_j$ si $\overline{r}_i$.In acest caz putem presupune ca V_{ij} este o functie arbitrara in general de $\overline{r}_i + \overline{r}_j$ si $\overline{r}_i - \overline{r}_j$.

Intrucat derivata functiei de $\overline{r}_i + \overline{r}_j$ este nula, rezulta ca functia depinde numai de $\overline{r}_i - \overline{r}_j$. O astfel de forta ar avea un caracter anizotrop. Dar intersectia trebuie sa fie izotropa, pentru a reflecta proprietatile spatiului si timpului. Vom presupune ca functia depinde de $_j|\overline{r}_i - \overline{r}_j|$.

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\left|\overline{r}_i - \overline{r}_j\right|\right) = V_{ij}(r_{ij}) \tag{1.82}$$

unde:

$$r_{ij} = \overline{r}_i - \overline{r}_j$$

Lucrul mecanic se poate scrie:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \overline{F}_i \cdot d\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \overline{F}_i^{(ext)} \cdot d\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \overline{F}_{ji} \cdot d\overline{r}_i = \\
&-\sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \frac{\partial V_i^{(ext)} \cdot (r_i)}{\partial r_i} \cdot d\overline{r}_i - \sum_{i,j=1}^{N}\int_1^2 \frac{\partial V_{ij} \cdot (r_{ij})}{\partial r_i} \cdot d\overline{r}_i = \\
&\sum_{i=1}^{N} V_i^{(ext)}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^{N}\int_1^2\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_i} d\overline{r}_i + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_i} d\overline{r}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \overline{r}_i} d\left(\overline{r}_i - \overline{r}_j\right)\right)
\end{aligned} \tag{1.83}$$

dar

$$\frac{V_{ij}(r_{ij})}{\overline{r}_i} = \frac{dV_{ij}}{d\overline{r}_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial \overline{r}_{ij}} = \frac{dV_{ij}}{d\overline{r}_{ij}}\frac{\overline{r}_{ij}}{r_{ij}} \tag{1.84}$$

unde:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \tag{1.85}$$

deci:

$$\int_1^2 \frac{dV_{ij}}{dr_{ij}} \cdot \frac{\overline{r}_{ij}}{r_{ij}} \cdot dr_{ij} = V_{ij}\Big|_1^2 \tag{1.86}$$

(intrucat $\overline{a} \cdot d\overline{a} = a \cdot da$)

Deci

$$L_{12} = -\left(\sum_{i=1}^{N} V_i^{(ext)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}\right)\Bigg|_1^2 = V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \tag{1.87}$$

unde V este energia potentiala a sistemului.

Deci: E = T + V = const. (1. 88)

1.2. Mecanica analitica

1.2.1. Legaturi de coordonate generalizate

Am presupus pâna acum ca punctele materiale sau sistemele se pot misca în orice directie fara restrictii. Astfel de probleme apar relativ rar în practica, pentru ca punctele materiale ale unui sistem sunt presupuse conectate între ele, în sensul ca pozitia unuia în spatiu depinde în mod explicit de pozitia celorlalte. Astfel de miscari sunt miscari supuse la legaturi.

Din punct de vedere fizic, legatura este o restrîngere a posibilitatilor de miscare ale unui punct material sau sistem. Din punct de vedere matematic, legatura reprezinta o relatie functionala între coordonatele si vitezele punctelor materiale:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_N \ldots t\right) = 0 \qquad (1.89)$$

In acest caz miscarea punctului material nu mai poate fi arbitrara, fapt care trebuie sa se reflecte in ecuatiile lui Newton.

Legaturile pot fi:

1) dupa dependenta de viteza

a1) - legaturi olonome - nu depind de viteza:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \ldots t\right) = 0 \qquad (1.90)$$

(de exemplu corpul rigid:

$$\left(\overline{r}_i - \overline{r}_j\right)^2 - C_{ij}^2 = 0, i, j = \overline{1, N}\ ) \qquad (1.91)$$

- legaturi neolonome - depin de viteza:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_N \ldots t\right) = 0 \qquad (1.92)$$

2) dupa dependenta de timp:

a2) - legaturi scleronome - nu depind de timp (sau stationare)

b2) legaturi reonome - depind explicit de timp.

3) dupa forma stationara a legaturii:

a3) - legaturi unilaterale - exprimate prin inegalitatea:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_N \ldots t\right) \geq 0 \qquad (1.93)$$

b3) legaturi bilaterale - exprimate prin egalitatea:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \overline{v}_1 \ldots \overline{v}_N \ldots t\right) = 0 \qquad (1.94)$$

1.2.2. Ecuatiile lui Newton in prezenta legaturilor.

$$m_i\overline{a}_i = \overline{F}_i + \overline{R}_i$$

Confrom principiului lui d'Alambert se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\overline{a}_i + \overline{F}_i\right)\delta\overline{r}_i = 0 \qquad (1.95)$$

Legaturile intervin prin $\delta\overline{r}_i$ si nu mai intervin reactiunile care sunt implicate practic si nu fizic.

Folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange, care consta in rezolvarea ecuatiei (1.95) tinand cont de legaturi. Presupunem ca exista k legaturi olonome de forma:

$$f_\alpha\left(\overline{r}_1........,\overline{r}_N...,...t\right) = 0 \quad \alpha = \overline{1,k} \qquad (1.96)$$

si m legaturi neolonome:

$$\sum_{i=1}^{N} D_i^{(\beta)}\overline{v}_i + D_0^{(\beta)} \quad \begin{matrix}\beta = \overline{1,m}, \text{unde} D_i^{(\beta)}, D_0^{(\beta)} \text{sunt} \\ \text{functiide forma}: f(t,x)\end{matrix} \qquad (1.97)$$

Ecua¡iile (1.96) si (1.97) se pot scrie:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i}\delta\overline{r}_i = 0 \quad \alpha = \overline{1,k} \qquad (1.98)$$

$$\sum_{i=1}^{N} D_i^{(\beta)}\delta\overline{r}_i = 0 \quad \beta = \overline{1,m} \qquad (1.99)$$

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange consta in inlocuirea ecuatiei (1.95) in alta ecuatie, rezultata din (1.95), (1.98) si (1.99) si care, pentru anumite valori, numite parametrii lui Lagrange, este echivalenta cu cele trei ecuatii:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(-m_i\overline{a}_i + \overline{r}_i + \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i} + \sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta\overline{D}_i^{(\beta)}\right)\delta\overline{r}_i = 0 \qquad (1.100)$$

unde $\lambda_\alpha\left(\alpha = \overline{1,k}\right), \mu_\beta\left(\beta = \overline{1,m}\right)$ sunt parametrii arbitrari ai lui Lagrange. Invers, de la ecuatia (1.100) se obtin alte doua ecuatii dand valori particulare lui.

Rationam astfel:

1) Valorile $\delta\overline{r}_i$ (in numar de 3N) nu sunt toate independente fiind supuse restrictiilor (1.96) si (1.97). (Deci numai 3N-K-m sunt independente)

2) Ecuatia (1.100) reprezinta o suma de 3N termeni si o vom desparti in (3N-K-m) termeni si respectiv (K+m) termeni.

Presupunem termenii K+m inmultiti cu acele proiectii ale lui $\delta\overline{r}_i$ presupuse dependente, iar celelalte paranteze (3N-K-m) presupun inmultite cu componentele lui $\delta\overline{r}_i$ care sunt independente.

3) Presupunem ca alegem λ_α μ_β astfel incat ultimele (K+m) paranteze sa se anuleze. Acest lucru nu este intotdeauna posibil,

deoarece reprezinta un sistem liniar de K+m ecuatii cu K+N necunoscute si se poate rezolva (Cramer).

4) Primele 3N-K-m paranteze trebuie sa se anuleze deoarece componentele lui $\delta\overline{r}_i$ care apar in acesti termeni sunt independente.

Daca avem suma $\sum_{i=1}^{P} Q_i \delta x_i = 0$ pentru valori arbitrare ale lui $\delta x_i, Q_i = 0$

Deci pentru ca ecuatia (1.100) sa fie satisfacuta se pot alege parametrii λ si astfel incat toate parantezele ecuatiei sa fie nule.

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i} + \sum_{\beta=1}^{m} \mu_\beta \overline{D}_i^{(\beta)} \quad i = \overline{1,N} \qquad (1.101)$$

μAcestea sunt ecuatiile lui Lagrange de speta I. Ecuatiile (1.101) si ( ) dau relatia pentru reactiuni:

$$\overline{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}_i} + \sum_{\beta=1}^{m} \mu_\beta \overline{D}_i^{(\beta)}$$

Se tine seama si de legaturi:

$$f(\overline{r}_1 ...., \overline{r}_N ..., ... t), \alpha = \overline{1,k} \qquad (1.102)$$

$$\sum_{i=1}^{N} D_i^{(\beta)} \overline{v}_i + D_0^{(\beta)} \quad \beta = \overline{1,m}$$

Ca exemplificare consideram un punct material aflat sub actiunea greutatii intr-un plan paralel cu xOy si care oscilieza dupa Oz.

Forta care actioneaza se scrie deci:

$$F = m\ g \qquad (1.103)$$

Ecuatia pentru legaturi este:

$$z = a \sin \omega\ t \qquad (1.104)$$

si presupunem ca pentru t = 0 punctul material trece prin origine.

Ecuatiile lui Lagrange se reduc la:

$$m\overline{a} = \overline{r} + \lambda \frac{\partial r}{\partial \overline{r}} \qquad (1.105)$$

pe care o vom proiecta pe componente:

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0 \qquad (1.106)$$
$$m\ddot{z} = -mg + \lambda$$

Se adauga ecuatia legaturii:

$$z - a \sin \omega\ t = 0$$

Solutiile sunt de forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \\ z &= a\sin\omega t \\ \lambda &= mg - ma\omega^2\sin\omega t = m\left(g - a\omega^2\sin\omega t\right) \end{aligned} \qquad (1.107)$$

Din relatiile de mai sus se gasesc valorile lui λ si deci si reactiunea:

$$\overline{R} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \left(0{,}0m\left(g - a\omega^2\sin\omega t\right)\right) \qquad (1.108)$$

1.2.3. Coordonate generalizate si ecuatiile lui Lagrange de speta a II a

Vom elimina reactiunile:

Principiul lui 'Alambert arata ca:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\overline{a}_i + \overline{r}_i\right)\delta\overline{r}_i = 0 \qquad (1.109)$$

Vom gasi forma finala a ecuatiilor care rezulta din acest principiu. Dificultatea era faptul ca $\delta\overline{r}_i$ nu sunt independente. Una dintre metode era cea a multiplicatorilor lui Lagrange. O alta metoda este cea a coordonatelor generalizate.

Presupunem ca sistemul este supus la k legaturi olonome de forma:

$$f\left(\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N \ldots, \ldots t\right), \alpha = \overline{1,k} \qquad (1.110)$$

Variatiile lui $\delta\overline{r}_i$ si insasi coordontele $\overline{r}_1 \ldots\ldots, \overline{r}_N$ nu sunt independente. Urmarim sa inlocuim aceste coordonate cu altele care sa fie independente.

Definim coordonatele generalizate ale sistemului respectiv, ca fiind un sistem $q_1 \ldots\ldots q_n$ astfel incat sa putem exprima vectorii de pozitie in raport cu aceste coordonate:

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i\left(q_1 \ldots\ldots, q_n \ldots, \ldots t\right) \qquad (1.111)$$

cu conditia ca ecuatiile legaturilor sa fie automat satisfacute (ele devin identitati)

Coordonatele q_1 ….q_n sunt in numar de n = 3N -k. Aceste coordonate se numesc coordonate generalizate. Ele alcatuiesc spatiul de configuratie sau spatiul coordonatelor generalizate.

In acest spatiu, un punct (punct de configuratie) reprezinta sistemul la un moment dat. iar o curba reprezinta "traiectoria' punctului reprezentativ, deci evolutia sistemului. Miscarea punctului de configuratie se descrie cu ajutorul ecuatiilor lui Lagrange.

Obtinerea ecuatiilor lui Lagrange din principiul lui Hamilton

Ecuatiile de miscare ale unui punct figurativ pot fi obtinute cu ajutorul unor principii generale, numite principii variationale. Principiile pot fi diferentiale (pentru sistemele olonome si neolonome, valabile la fiecare moment de timp); si, respectiv, integrale (valabile pe un interval de timp finit, pentru sistemele olonome conservative). Din ultim acategorie face parte principiul lui Hamilton (al minimei actiuni).

Fie un sistem olonom si conservativ. Dintre toate traiectoriile sale compatibile cu legaturile, care pornesc in spatiul de configuratie din acelasi punct P_1, la acelasi moment t_1 si ajung in punctul P_2 la acelasi moment t_2, miscarea reala este numai aceea pentru care integrala de actiune:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \qquad (1.112)$$

prezinta un extrem:

$$\delta S=0 \qquad (1.113)$$

S se numeste actiune. L = L(q, q, t) este functia Lagrange, iar q este viteza generalizata.

$$\dot{q}=\frac{dq}{dt}$$

Adica :

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta\dot{q}_j\right)dt=0 \qquad (1.114)$$

Integrind prin parti al doilea termen, se obtine:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\cdot\frac{d}{dt}(\delta q_j)dt=$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt \qquad (1.115)$$

Folosind principiul lui Hamilton rezulta variatiile izocrone (variatiile elementare ale coordonatelor generalizate la acelasi moment de timp, intre doua traiectorii din spatiul de configuratie):

$$\delta q_j(t_1)=0$$
$$\delta q_2(t_2)=0 \qquad (1.116)$$

Rezulta deci:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\right\}\delta q_j dt = 0 \qquad (1.117)$$

Variatiile δq_j fiind arbitrare si independente, rezulta ecuatiile lui Lagrange sub forma ecuatiei de miscare in spatiul de configuratie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad \left(j=\overline{1,N}\right) \qquad (1.118)$$

Se trece in spatiul cartezian tinindu-se seama de relatia; $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=p_j$

p_j- impulsul generalizat. In spatiul cartezian p_j-mv_j, $\dot{q}_j = v_j$ adica $\frac{\partial L}{\partial v_j}=mv_j$ si $L=\frac{mv_j^2}{2}=T$ este energia cinetica pentru punctul material liber. Se poate scrie: $L=T-U$, unde $U=U\left(\bar{r}_1,....,\bar{r}_N\right)$ pentru un punct material de masa "m", supus la legaturi. U este energia potentiala.

Observatii

1) Exprimam T si U functie de coordonatele generalizate:

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q_1,q_2,...,q_N,t)$$

$$\frac{d\bar{r}_j}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_1}\dot{q}_j+\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t} \qquad (1.119)$$

Ultimul termen apare pentru legaturi reonome.
Inlocuind in expresia lui T, se obtine:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \qquad (1.120)$$

unde:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (1.121)$$

$$T_1=\sum_{j=1}^{N}a_j\dot{a}_j$$

$$T_0=\frac{1}{2}a$$

$$a_{jk}=\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_j}\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t}$$

$$a_j=\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_j}\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t}$$

$$a=\sum_{j=1}^{N}m_j\left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t}\right)^2$$

$$\left(\frac{d\bar{r}_j}{dt}\right)^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial t}\right) \qquad (1.122)$$

Definind o functie omogena de grad P:

$$f(ax_1,\ldots,ax_n) = a^P f(x_1,\ldots,x_n) \qquad (1.123)$$

putem spune ca T_2,T_1 si T_0 reprezinta functii omogene de gradul 2,1,0 in asa numitele viteze generalizate q_1.

Pentru functiile omogene este valabila teorema lui Euler:

Fie $f(x_1,...,x_n)$ o functie omogena de gradul n. Atunci conditia necesara si suficienta ca aceasta sa fie intr-adevar omogena este:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = n \cdot f \qquad (1.124)$$

Tinem seama de aceasta teorema pentru calcularea diferitelor sume.

Energia potentiala se calculeaza astfel:

$$V = V(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_N) = V(q_1,\ldots,q,t) \qquad (1.125)$$

(dependenta de t apare in cazul legaturilor nestationare).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}j} = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\dot{q}_k + a_j \qquad (1.126)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}j} = 0 \qquad (1.127)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}j}\right) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial ajk}{\partial q1}\dot{q}_1\dot{q}_k + \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial aj}{\partial q1}\dot{q}_1 + \frac{\partial aj}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{N} \frac{\partial a,k,l}{\partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial ak}{\partial qj}\dot{q}j + \frac{\partial a}{\partial qj} \qquad (1.128)$$

Atunci ecuatiile lui Lagrange devin:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{jk}\ddot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{N} \frac{\partial ak1}{q_j}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a_k}{qj}\dot{q}j + \frac{\partial a}{\partial qj} -$$

$$-\sum_{k,l}^{N} \frac{\partial ajk}{\partial q_1}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\dot{q}k - \sum_{1=1}^{N} \frac{\partial a_j}{\partial q_l}\dot{q}_l\ \frac{\partial a_j}{\partial t} = \qquad (1.129)$$

$$= \overline{Q}_j(q_1,\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N,t)$$

Matematic, acestea reprezinta un sistem de N ecuatii diferentiale de gardul II cu necunoscutele $q_1,...,q_N$, care poate fi rezolvat si se obtin solutiile $q_j(t,C_1,C_2,...,C_{2N})$.

Constantele se determina din conditiile initiale:

$$q_j(0) = q_{j0}$$
$$\dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0} \qquad j = \overline{1,N} \qquad (1.130)$$

Determinarea conditiilor initiale pentru coordonatele generalizate se face astfel: Din cele 3N componente ale razelor vectoare se aleg f (numarul gradelor de libertate) astfel incat ele sa fie independente:$x_1,...,x_f$). Pentru a afla coordonatele generalizate si vitezele generalizate se porneste de la relatiile:

$$x_1 = x_1(q_1,\dots,q_f,t)$$
$$x_f = x_f(q_1,\dots,q_f,t) \qquad (1.131)$$

si se obtine: $q_j=q_j(x_1,...,x_f,t)$ (1.132)

2) Se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d_{qj}}{dt}\right)}\right)-\frac{\partial L}{\partial qj}=0 \qquad (.133)$$

Daca L nu depinde explicit de timp, atunci ecuatiile Lagrange sunt invariante la inversia temporala $(t\to -t)$.

Presupunem un punct material, care la momentul t_0 trece prin punctul A, iar raza vectoare este $\overline{r}(t_0)$. Dupa intervalul t_1, el trece prin B, conform Fig.1.7:

Figura 1.7.

unde primeste printr-o transferare viteza -V. El evolueaza pe o anumita traiectorie, iar la momentul t_0+2t_1 putem spune ca punctul material formeaza un sistem invariant la inversia temporala daca:

$$\overline{r}\cdot(t_0+2t_1)=\overline{r}(t_0)$$
$$\overline{V}\cdot({}_0t+2t_1)=-\overline{v}(t_0) \qquad (1.134)$$

Un sistem de puncte materiale descris de coordonatele generalizate $(q_1,...,q_f)$ este invariant la inversia temporala daca multimea acestor coordonate functie de timp poate fi descopmusa in doua submultipli I si II, care pot fi puse in corespondenta biunivoca prin schimbarea semnului vitezelor la fiecare moment de timp:

$$q_j^{I}(t_0+t)q_j^{II}(t_0-t)$$
$$q_j^{I}(t_0+t)=q_j^{II}(t_0-t) \qquad (1.135)$$

Se observa ca ecuatiile lui Lagrange sunt invariante la inversia temporala.

3) Functia Lagrange a sistemului prezinta proprietatea de aditivitate. Daca un sistem dinamic este format din doua subsisteme A si B care nu interactioneaza intre ele, atunci:

$$L=L_A+L_B \qquad (1.136)$$

proprietate care rezulta din:

L=T-V

4) Ecuatiile lui Lagrange sunt omogene (inmultind L cu o constanta arbitrara ecuatiile raman neschimbate).

5) Ecuatiile lui Lagrange raman neschimbate daca la L se adauga derivata totala in raport cu timpul a unei functii de coordonatele generalizate si de timp:

$$L' = L + \frac{df}{dt} \tag{1.137}$$

Sa aratam acest lucru:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}j} + \frac{\partial}{\partial qj}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial qk}\ddot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}f} + \frac{\partial f}{\partial qj}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}j}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial qj \partial qk}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \tag{1.138}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial qj} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1} \frac{\partial^2 f}{\partial qj \partial qk}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \tag{1.139}$$

Se observa ca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial t} = 0 \tag{1.140}$$

Daca in functia Lagrange intervine o functie explicita de timp, ea poate fi eliminata, deoarece orice functie explicita de timp poate fi scrisa ca derivata altei functii de timp.

Ca o consecinta directa a acestui rezultat, putem scrie forma generala a unui sistem care interactioneaza cu un camp exterior.

Presupunem ca initial avem un sistem compus din doua subsisteme A (sistemul nostru) si B (partea exterioara).

Atunci:

$$L = L_A(q_A, \dot{q}_A) + L_B(q_B, \dot{q}_B) + L_{AB}(q_A, q_B) \tag{1.141}$$

Presupunem cunoscuta miscare a sistemului B: $q_B = q_B(t)$

Atunci lagrangeiana sistemului devine:

$$L = T_A - V_A(q_A) + T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t)) - V_B\left(q_B(t)0 - V_{AB}\left(q_{A,}\, q_B(t)\right)\right) \tag{1.142}$$

Dar T_B si B_B sunt functii de timp date, deci pot fi eleiminate. Atunci lagrangeiana sistemului A sub actiunea campului creat de B va fi:

$$L = T_A - U_A - U_{AB}(q_a, q_b(t)) \tag{1.143}$$

Dependenta explicita de timp a lui U apara numai in cazul interactiunii unui sistem cu un sistem exterior.

Metodologia generala de lucru cu ecuatii Lagrange

1. Se alege sistemul dinamic de studiat.
2. Se scriu ecuatiile legaturilor

3. Se introduc coordonatele generalizate astfel alese incat sa fie legate de proprietatile geometrice ale sistemului.

Ar fi indicat ca aceste coordonate generalizate alese sa fie aposteriori ciclice: Se numeste coordonata ciclica o coordonata q care nu intervine explicit in lagrangeiana:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (1.144)$$

Deci: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \qquad (1.145)$$

rezulta

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{constant} \qquad (1.146)$$

unde p este prin definitie impulsul generalizat. Un criteriu de obtinere a coordonatelor ciclice este studiul invariantei sistemului la diferite grupuri de transformari geometrice.

4. Exprimarea razelor vectoare functie de coordonatele generalizate astfel incat ecuatiile Lagrange sa fie automat satisfacute.

5. Exprimarea energiei cinetice T functie de vitezele generalizate.

6. Exprimarea energiei potentiale U functie de coordonatele generalizate

7. Calculul lograngeianei L = T - U

8. Scrierea ecuatiilor lui Lagrange

9. Gasirea conditiilor initiale, rezolvarea ecuatiilor si interpretarea fizica a rezultatelor.

1.2.5. Aplicatii rezultate din proprietatile spatiului si timpului

Din proprietatea de uniformitate a timpului rezulta ca functia L este aceeasi la orice moment de timp, deci este o functie $L(\overline{r}, \overline{v})$ (invariant la $t \to t_0 + t_0$).

Din omogenitatea spatiului rezulta ca L nu depinde de r ($\overline{r} \to \overline{r}_0 + \overline{r}_0$) deci este o functie L(v)

Din izotropia spatiului rezulta $L = L(|v|)$

Legea conservarii impulsului.

In acest caz ecuatiile Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \qquad (1.147)$$

dar: $\frac{\partial L}{\partial r}=0$

deci: $\frac{\partial L}{\partial \overline{v}}=\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|},\frac{\partial L}{\partial v}=\text{constant}$ (1.148)

Asadar: v = constant (principiul inertiei).Forma concreta a functiei Lagrange se determina astfel: L trebuie sa fie invariant la transformarile Galilei;

$$\begin{cases}\overline{r}'=\overline{r}-\overline{v}t \quad \overline{v}'=v-\overline{v}\\ t=t\end{cases} \qquad (1.149)$$

Conditia de invarianta este $L(|\overline{v}'|)=L(|\overline{v}|)$. Presupunem ca V = a (deci este foarte mic).Atunci $L(|V-|)=L(|V|)$. Se dezvolta in serie:

$$L(|\overline{V}|)-\varepsilon\frac{\partial L}{\partial V}=L(|\overline{V}|) \qquad (1.150)$$

$$\frac{V}{|V|}\frac{dL}{d|V|}=0 \quad \text{deci } L=cv^2 \qquad (1.151)$$

Intotdeauna se ppoate gasi o coordonata astfel incat sistemul sa fie invariant la translatii (de exemplu coordonata corespunzatoare centrului de masa):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}l}=\text{constant} \qquad (1.152)$$

$$L=L\left(\frac{''}{r_1}(q_1)\right)\ldots\frac{''}{r_N}(q_1) \qquad (1.153)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{r}}j}\frac{\partial \ddot{\overline{r}}j}{\partial q_1}=\sum_{i=1}^{N}\overline{P}_I\frac{r_i}{q_i}=\text{constant} \qquad (1.154)$$

Se calculeaza marimea $\frac{\partial r_i}{\partial q_1}$. Pentru acestea trebuie sa vedem cum au loc translatiile sistemului

$$\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_i}=\lim_{q_1\to 0}\frac{\Delta r_i}{\Delta q_i} \qquad (1.155)$$

Punctul i sufera o translatie de versor n, iar q este o masura a translatiei respective

$$|\Delta\overline{r}_i|=\Delta q_1 \qquad (1.156)$$

deci $\Delta\overline{r}_i=\overline{n}\Delta q_1$

Inlocuind se obtine:

$$\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_i}=\overline{n} \qquad (1.157)$$

Deci: $\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_i}=\left(\sum_{i=1}^{N}\overline{P}_i\right) \quad \overline{n}=\text{constant}$ (1.158)

Asadar: $\overline{P}\cdot\overline{n}=\text{constant}$ (1.159)

Deci daca un sistem este invariant la o translatie pe directia n (deci actiunea S este invarianta) atunci, pe baza teoremei Noether se poate spune ca proiectia vectorului P este o marime constanta. Dar intrucat n este oareceare, rezulta P = constant.

Deci un sistem este intotdeauna invariant la o translatie spatiala.

Legea conservarii momentului cinetic.

Presupunem sistemul invariant la o rotatie oarecare in jurul unei axe de versor n.

Atunci, intotdeauna este posibil sa alegem coordonatele generalizate astfel incat numai coordonata q sa se modifice ca urmare a rotatiei si sa reprezinte o masura a rotatiei respective.

Transformarile sunt:

$$q_1 \to q_1 + \Delta q_1 \tag{1.160}$$
$$q_j \to q_j \qquad (j = 2, \overline{n}), \Delta q_j = 0$$
$$t \to t; \quad \Delta t = 0$$

Cunoscand din teorema lui Noether ca:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{constant}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^{N} \overline{p}_j \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = \text{constant} \tag{1.161}$$

Se procedeaza ca si la translatii. Se considera o rotatie, q_1, fiind o masura a acesteia:

$$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta \bar{r}_j}{\Delta q_1} \tag{1.162}$$

$\Delta \bar{r}_i$ se poate aproxima cu segmentul de cerc corespunzator.

$$\left|\Delta \overline{r}_j\right| = R_j \Delta q_1 \tag{1.163}$$

$$R_j = r_j \sin\theta \tag{1.164}$$

Atunci:

$$\left|\Delta \overline{r}_j\right| = r_j \sin\theta \Delta q_1 \tag{1.165}$$

Cand $\varphi \to 0$, $\Delta \overline{r}_i$ devine tangent, deci:

$$\Delta \overline{r}_j \perp \overline{R}_j \qquad \text{Rezulta} \quad \Delta \bar{r}_j \perp \overline{n}$$
$$\Delta \bar{r}_j \perp \bar{r}_j \tag{1.166}$$

Scriind ca un produs vectorial

$$\Delta\bar{r}_j = \left(\bar{n}\times\bar{r}_j\right)\Delta q_1 \qquad (1.167)$$

si inlocuind in limita rezulta:

$$\frac{\partial\bar{r}_j}{\partial q_1} = \bar{n}\times\bar{r}_j \qquad (1.168)$$

Atunci:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = \sum_{j=1}^{N}\bar{p}_j\left(\bar{n}\times\bar{r}_j\right) = \bar{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\bar{r}_j\times\bar{p}_j\right) = \bar{n}\,\bar{L} = \text{constant} \qquad (1.169)$$

Daca sistemul este invariant la o rotatie in jurul unei axe de versor $\bar{n}$, atunci proiectia momentului cinetic pe aceasta axa se conserva.

In cazul unui sistem invariant la orice rotatie in jurul oricarei axe se obtine legea conservarii momentului cinetic total:

$$\bar{L} = \text{constant} \qquad (1.170)$$

Aceste legi se pot obtine direct (fara teorema Noether), pornind de la observatia ca invarianta sistemului la o anumita transformare poate fi enuntata sub forma data prin existenta unei coordonate generalizate, care sa fie ciclica.

Legea conservarii energiei

Exprimam invarianta la translatie prin faptul ca L nu depinde explicit de timp, deci:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (1.171)$$

Deci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial qj}\dot{q}j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}j}\dot{q}j\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\frac{d}{dt}\dot{q}_j\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}j}\dot{q}j\right)\end{aligned} \qquad (1.172)$$

Rezulta:

$$H = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}j}\dot{q}j + L = \text{constant} \qquad (1.173)$$

1.2.6. Ecuatiile canonice ale lui Hamilton

Ecuatiile lui Lagrange au unele dezavantaje: variabilele independente din ecuatiile lui Lagrange sunt coordonate generalizate care satisfac ecuatii diferentiale de ordinul doi; formalismul Lagrange este corespunzator spatiului de configuratie caracterizat prin ($q_i, \dot{q}_j$).

Acest grup de variabile independente este destul de incomod, nu atat in calculele practice, cat mai ales in problemele teoretice principale foarte importante. De aceea a aparut necesitatea inlocuirii vitezelor generalizate cu alte variabile cu semnificatie fizica mai directa.

Aceasta se poate vedea in cazul sistemelor formate dintr-un singur punct material, nesupus la legaturi.

Cunoscand r si v la un moment dat, se poate cunoaste miscarea ulterioara a sistemului. Dar v nu are semnificatie dinamica directa si este destul de greu de lucrat cu acesta. In schimb impulsul p = mv are o astfel de semnificatie. De fapt, in cazul punctului material, folosirea lui p sau v este echivalenta, dar in probleme mai complicate legatura intre impulsurile si coordonatele generalizate nu mai este la fel de simpla.

In majoritatea aplicatiilor o importanta deosebita au impulsurile generalizate care prin definitie sunt:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}j} \tag{1.174}$$

Vom alege deci ca variabile independente

$$\begin{array}{ccc} (q_j, \dot{q}_j) & \rightarrow & (q_j\ p_j) \\ \text{formalism} & & \text{formalism} \\ \text{Lagrange} & & \text{Hamilton} \end{array}$$

Se pune problema scrierii unor ecuatii de miscare q_j si p_j. Spatiul (q_i, p_j) se numeste spatiul fazelor

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

$$j = \overline{1, n} \tag{1.175}$$

Pentru obtinerea unor solutii unice trebuie ca p_j sa reprezinte un sistem de functii independente, astfel incat hesianul:

$$\det\left(\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{1.176}$$

Presupunem in principiu ca am rezolvat sistemul si am obtinut:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t) \qquad (1.177)$$

Trebuie determinate ecuatiile de miscare pentru q si p. Se foloseste urmatoarea teorema (Donchin):

Fie $X = X(x_1,\dots,x_n)$ (1.178)

astfel definit incat:

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0 \qquad (1.179)$$

si fie o transformare generata de aceasta functie de forma Legendre:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_j} \qquad (1.180)$$

Teorema arata ca transformarea inversa este generata de o alta functie:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j X \qquad (1.181)$$

astfel incat:

$$x_j = \frac{\partial y}{\partial y_j} \qquad (1.182)$$

Daca $X = X(x_1,\dots,x_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, atunci si y contine acesti parametri si:

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha_k} \qquad (1.183)$$

Pentru demonstratie se observa din (1.179) ca:

$$y_j = \frac{\partial X}{\partial x_j} = y_j(x_1,..,x_n) \qquad (1.184)$$

rezultand:

$$x_j = x_j(y_1,\dots,y_n) \qquad (1.185)$$

Vom arata ca:

$$\frac{\partial Y}{\partial y_j} x_j + \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial X_k}{\partial y_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j} = x_j \qquad (1.186)$$

Daca X depinde de parametrii arbitrari $\alpha_1 \dots \alpha_n$, atunci si x obtinut din transformarea ,...,

Atunci se obtine

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial k} y_j - \frac{\partial X}{\partial \alpha_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} \frac{\partial X}{\partial x_j} \qquad (1.187)$$

X depinde direct de α_k si prin intermediul lui $x_1,\ldots,x_n$ deci obtinem:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_k} \qquad (1.188)$$

Aceasta teorema sintetizeaza ideea trecerii de la formalismul Lagrange la formalismul Hamilton X corespunde functiei L, $(x_1,\ldots,x_n)$ corespunde la $(q_1,\ldots,q_n)$, variabile, $(x_1,\ldots,x_n)$ la $(q_1,\ldots,q_n,t)$, iar $(y_1,\ldots,y_n)$ la $(p_1,\ldots,p_n)$.

Se observa ca relatia (1.179) reprezinta conditia ca hesianul sistemului sa fie nenul.

Deci transformarea inversa este:

$$Y \equiv H = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j - L \qquad (1.189)$$

Transformarea inversa se scrie:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (1.190)$$

si atunci relatia (1.184) va fi:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1.191)$$

Daca L depinde de un parametru arbitrar $\lambda : L = L(q,\dot{q},t,\lambda)$ atunci pe baza teoremei anterioare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\frac{\partial L}{\partial q_j} \end{aligned} \qquad (1.192)$$

si tinand cont de ecuatiile lui Lagrange:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \qquad (1.193)$$

Asadar se obtin ecuatiile canonice ale lui Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad j=\overline{1,n} \qquad (1.194)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

H=H(p,q) este hamiltoniana (sau hamiltonianul) sistemului.

Aceste ecuatii sunt diferentiale de ordinul I cu 2n necunoscute (ultima fiind o conditie), p si q sunt variabilele canonice, iar spatiul 2-n dimensional referitor la aceste variabile este spatiul fazelor. Fiecare punct din acest spatiu se numeste faza, iar evolutia sistemului in timp determina o traiectorie a fazei in spatiul fazelor.

Interpretarea fizica a ecuatiilor lui Hamilton

In cazul in care L nu depinde explicit de timp, valoarea numerica a lui H reprezinta energia sistemului. Conservarea energiei se poate demonstra folosind ecuatia lui Hamilton:

$$\frac{dH}{d} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1.195)$$

Tinand cont de ecuatiile lui Hamilton rezulta:

$$\frac{dH}{d} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (1.196)$$

si deci H reprezinta o constanta a miscarii sistemului (iar daca L nu depinde de q si p atunci nici H nu depinde).

Calculul lui H:

L se poate calcula functie de vitezele generalizate:

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \qquad (1.197)$$

unde L_2 este o functie de ordinul 2 in viteze generalizate, L_1 de ordinul 1, iar L_0 de ordinul zero.

Atunci:

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} = 2L_2 + L_1 \qquad (1.198)$$

Deci hamiltonianul sistemului se scrie:

$$H = 2L_2 + L_1(L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0 \qquad (1.199)$$

functiile fiind dependente de impulsurile p_j:

$$H = T_2 - T_0 + V \tag{1.200}$$

Daca T_0=0 atunci H=T_2 + V

Exemplu: Daca problema se reduce la miscarea unei singure particule, atunci:

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2 + r^2\theta^2\right) - V(r) \tag{1.201}$$

Impulsurile:

$$\begin{aligned} p_r &= mr \\ p_\theta &= mr^2\theta \end{aligned} \tag{1.202}$$

De aici se obtine:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}; \quad \dot{\theta} = \frac{p_j}{mr^2} \tag{1.203}$$

Se obtine:

$$H = T + V = \frac{Pr^2}{2m} + \frac{P^2\theta}{2mr^2} + V(r) \tag{1.204}$$

H se mai poate obtine si direct prin formula:

$$H = p_r \cdot \dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \tag{1.205}$$

1.2.7. Functia si ecuatia lui Routh

Este posibil sa se scrie un sistem combinat de ecuatii care sa contina atat vitezele generalizate cat si impulsurile generalizate corespunzatoare.

Variabilele Routh sunt:

$$q_1,..,q_n,q_1,...,q_m,p_{m+1},...,p_n$$

Trecerea la aceste variabile se face tot cu teorema Donchur, aplicata pentru impulsuri:

Atunci: $X \rightarrow L$

$$Y = R\left(q_1,...,q_n,q_1,...,q_m,p_{m+1},...,p_n\right) \tag{1.206}$$

Definim:

$$R = \sum_{=m+1}^{n} P_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{1.207}$$

si

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad \left(\alpha = \overline{m+1,n}\right) \tag{1.208}$$

Din teorema rezulta:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \tag{1.209}$$

Pentru celelalte variabile:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial R}{\partial q_j};\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\quad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{1.210}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

Tinand cont de ecuatiile lui Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{dp_j}{dt} \tag{1.211}$$

Se obtine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0\left(i=\overline{1,m}\right)\ \text{si}$$

$$\dot{q}_a=\frac{\partial R}{\partial P_\partial}\ \text{ si }\ \dot{p}_a=-\frac{\partial R}{\partial q_a}\left(a=\overline{m+1,n}\right) \tag{1.212}$$

Primele m ecuatii sunt ecuatii Lagrange, iar ultimele de tip Hamilton.

Aceasta formulare a ecuatiilor dinamice este foarte importanta in cazul in care sistemul are coordonate ciclice.

Presupunem ca ultimele n - m coordonate din lagrangean sunt ciclice. Se obtine:

$$\frac{\partial R}{\partial q_a}=-\frac{\partial L}{\partial q_a}\qquad \left(a=\overline{m+1,n}\right) \tag{1.213}$$

Se observa ca:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \tag{1.214}$$

iar din ecuatiile Routh rezulta:

$$\dot{p}_\alpha=0$$

adica $p_\alpha=c_\alpha=\text{constant}$ (1.215)

In acest caz particular, functia Routh

$$R=R\left(t,q_1,\ldots,q_m,\dot{q}_1,\ldots,q_m,Cm+1,\ldots,Cn\right) \tag{1.216}$$

In acest caz deci n ecuatii diferentiale de ordinul 2 (ecuatiile Lagrange) conduc la rezolvarea a (n - m) ecuatii diferentiale de ordinul 2 (ecuatiile lui Routh).

Dupa obtinerea coordonatelor $q_1 \ldots q_n$ prin integrare rezulta:

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial p_\alpha}=f_\alpha\left(q_1,\ldots,q_m,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m\right) \tag{1.217}$$

1.2.8. Paranteze Poisson

Fie doua functii oarecare F(p,q,t) si G(p,q,t). Prin definitie, expresia:

$$\{F,G\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}\right) \tag{1.218}$$

se numeste paranteza Poisson a functiilor F si G. Acest formalism permite o scriere simplificata a unor legi de evolutie si de conservare din mecanica analitica. Se pot demonstra urmatoarele proprietati:

$$\{F,F\} = 0;\ \{F,\text{constant}\} = 0$$

$$\{F,G\} = -\{G,F\} = -\{-F,G\} = -\{F,-G\}$$

$$\{F_1 + F_2,G\} = \{F_1,G\} + \{F_2,G\}$$

$$\{F_1,F_2,G\} = \{F_1,G\}F_2 + F_1\{F_2,G\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t},G\right\} + \left\{F,\frac{\partial G}{\partial t}\right\} \tag{1.219}$$

Derivata totala a unei functii arbitrare F(p,q,t) se poate scrie, cu ajutorul parantezelor Poisson sia ecuatiilor conice ale lui Hamilton, astfel:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H,F\} \tag{1.220}$$

Daca alegem F=p_j si, respectiv, F=q_j, rezulta ecuatiile conice scrise in formalismul parantezelor Poisson:

$$\begin{aligned}\dot{p}_j &= \{H,p_j\}\\ \dot{q}_j &= \{H,q_j\}\end{aligned} \tag{1.221}$$