7. MEDII NELINIARE ANIZOTROPE ȘI MEDII NELINIARE DISIPATIVE

7.1. Medii neliniare anizotrope

7.1.1. Noțiuni introductive

Într-un mediu anizotrop, fiecare dintre cele trei componente ale vectorului polarizare electrică $\overline{P} = (P_1, P_2, P_3)$ este o funcție de cele trei componente ale vectorului câmp electric $\overline{E}(E_1, E_2, E_3)$[1]. Aceste funcții sunt liniare pentru valori mici ale lui E, dar deviază ușor de la liniaritate când E crește. Fiecare dintre aceste trei funcții neliniare poate fi dezvoltată în serie Taylor în funcție de trei componente E_1, E_2 şi E_3, asemănător cu dezvoltarea dată în (4.1) pentru analiza scalară. Astfel avem:

$$P_j = \varepsilon_0 \sum_k \chi_{jk} E_k + 2\sum_{kl} d_{jkl} E_k E_l + 4\sum_{klm} \chi^{(3)}_{jklm} E_k E_l E_m, \tag{7.1}$$

unde $j,k,l,m = 1,2,3$. Coeficienții χ_{jk}, d_{jkl} și $\chi^{(3)}_{jklm}$ sunt elemente ale tensorilor cărora le corespund coeficienții scalari $\chi, d, \chi^{(3)}$ și (7.1) este o generalizare a expresiei (4.1) aplicabilă la cazul anizotrop.

Proprietățile de simetrie joacă un rol important în cazul acestor medii. Deoarece coeficientul d_{jkl} este un factor al produsului $E_k E_l$, el trebuie să fie invariant la schimbarea lui k cu l. În mod asemănător, $\chi^{(3)}_{jklm}$ este invariant la orice permutare a indicilor k, l și m. Ecuația (9.1) se poate scrie sub forma $P_j = \varepsilon_0 \sum_k \chi^e_{jk} E_k$, unde χ^e_{jk} este un tensor efectiv (dependent de câmp). Folosind un argument similar cu cel utilizat pentru medii cu pierderi mici liniare, se obține că χ^e_{jk} trebuie să fie invariant la schimbarea lui j și k. Astfel, tensorii χ_{jk}, d_{jkl} și $\chi^{(3)}_{jklm}$ sunt invarianți la schimbarea lui j și k. Rezultă că cei trei tensori sunt invarianți la oricare permutări ale indicilor lor[2].

Tabelul 7.1.

k	$j:1$	2	3
1	1	6	5
2	6	2	4
3	5	4	3

---

[1] A. Yariv, P. Yeh, *Optical waves in crystals*, John Wiley & sons, New York, (1984)
[2] P. Gay, *An introduction to crystals optics*, Longmans, London, (1967)

Elementele tensorilor d_{jkl} și $\chi^{(3)}_{jklm}$ sunt în mod uzual, listate în matrici 6×3 și 6×6 pentru $d_{jk} = d_{kj}$ și $\chi^{(3)}_{lk}$, folosind notațiile contractate definite în tabelul 7.1., unde $I = 1,2,...,6$ înlocuiesc perechea de indici (j,k), $j,k = 1,2,3$; și indicele $l = 1,2,...,6$ înlocuiește pe (l,m). Tensorii d_{jkl} și $\chi^{(3)}_{jklm}$ sunt strâns legați de tensorii Pockels și Kerr, r_{jkl} și, respectiv, s_{jklm}, aceștia având aceleași simetrii. În tabelul 7.2 se dau valorile coeficienților d_{jl} pentru câteva cristale.

Tabelul 7.2

Valorile reprezentative pentru coeficienții optici neliniari în cazul anumitor materiale

Tipul de cristal	d_{jl} [unități S.I.]
T_e	$d_{11} = 5{,}7 \times 10^{-21}$
GaAs	$d_{14} = 1{,}2 \times 10^{-21}$
Ag_3AsS_3 (<<proustite>>)	$d_{31} = 1{,}5 \times 10^{-22}$; $d_{22} = 2{,}4 \times 10^{-22}$ $d_{33} = 3{,}0 \times 10^{-22}$
$KNbO_3$	$d_{31} = 1{,}4 \times 10^{-22}$ $d_{32} = 1{,}8 \times 10^{-23}$
$Ba_2NaNb_5O_{15}$ (<<bananas>>)	$d_{33} = 1{,}2 \times 10^{-22}$ $d_{32} = 8{,}2 \times 10^{-23}$
$LiIO_3$	$d_{31} = 1{,}1 \times 10^{-22}$ $d_{33} = 3{,}2 \times 10^{-23}$
$KTiOPO_4$ (KTP)	$d_{33} = 1{,}2 \times 10^{-22}$; $d_{31} = 5{,}8 \times 10^{-23}$ $d_{32} = 4{,}4 \times 10^{-23}$
$LiNbO_3$	$d_{31} = 4{,}3 \times 10^{-23}$; $d_{22} = 2{,}3 \times 10^{-23}$ $d_{33} = 3{,}9 \times 10^{-22}$
$\beta - BaB_2O_4$ (BBO)	$d_{22} = 1{,}4 \times 10^{-23}$ $d_{31} = 7{,}1 \times 10^{-25}$
LiB_3O_5 (LBO)	$d_{32} = 1{,}1 \times 10^{-23}$; $d_{31} = 1{,}0 \times 10^{-23}$ $d_{33} = 5{,}6 \times 10^{-25}$
$NH_4H_2PO_4$ (ADP)	$d_{36} = 6{,}8 \times 10^{-24}$
KH_2PO_4 (KDP)	$d_{36} = 4{,}1 \times 10^{-24}$ $d_{14} = 3{,}8 \times 10^{-24}$
Cuarț	$d_{11} = 3{,}0 \times 10^{-24}$ $d_{14} = 2{,}6 \times 10^{-26}$

7.1.2. Amestecul a trei unde într-un mediu neliniar de ordinul al doilea anizotrop

Un câmp optic $E(t)$ conținând două unde polarizate liniar monocromatice de frecvențe unghiulare ω_1 și ω_2 și de amplitudini complexe $\overline{E}(\omega_1)$ și $\overline{E}(\omega_2)$, este aplicat unui cristal neliniar de al doilea ordin. Componenta vectorului polarizație la frecvența $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ se poate determina folosind relația:

$$P_j(\omega_3) = 2\sum_{kl} d_{jkl} E_k(\omega_1) E_l(\omega_2), \quad k,l = 1,2,3, \tag{7.2}$$

unde $E_k(\omega_1), E_l(\omega_2)$ și $P_j(\omega_3)$ sunt componentele celor trei vectori de-a lungul axelor principale ale cristalului. Această ecuație este o generalizare a relațiilor (4.31)÷(4.34).

Dacă $E_k(\omega_1) = E(\omega_1)\cos\theta_{1k}$ și $E_l(\omega_2) = E(\omega_2)\cos\theta_{2l}$, unde θ_{1k} și θ_{2k} sunt unghiurile vectorilor $\overline{E}(\omega_1)$ și $\overline{E}(\omega_2)$ făcute cu axele principale, atunci (7.2) se poate scrie sub forma:

$$P_j(\omega_3) = 2d_{eff} E(\omega_1) E(\omega_2), \tag{7.3}$$

unde

$$d_{eff} = \sum_{kl} d_{jkl} \cos\theta_{1k} \cos\theta_{2l}, \quad j,k,l = 1,2,3. \tag{7.4}$$

Astfel, ecuația (7.3) are forma uzuală folosită în formalismul scalar din §4.2 și §6.1, unde d_{eff} joacă rolul coeficientului d.

7.1.3. Acordul de fază în amestecul a trei unde

După cum s-a arătat în §4.2., *condiția de acord de fază* $\overline{k}_3 = \overline{k}_1 + \overline{k}_2$ este necesară pentru un amestec al undelor eficient. Această condiție este echivalentă cu $\omega_3 n_3 \overline{u}_3 = \omega_1 n_1 \overline{u}_1 + \omega_2 n_2 \overline{u}_2$ unde $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ și $\overline{u}_3$ sunt vectorii unitari în direcțiile de propagare a undelor. Vom presupune că cele trei unde sunt moduri normale ale cristalelor cu vitezele de fază $\frac{c}{n_a}, \frac{c}{n_b}$ și $\frac{c}{n_c}$, unde n_a, n_b și n_c depind de direcțiile undelor, polarizațiile lor și frecvențele lor. Într-un cristal uniax n_a, n_b și n_c pot fi indicii ordinar și extraordinar.

Ca exemplu, să considerăm generarea armonicii a doua într-un cristal uniax cu undele care se propagă în aceeași direcție. Presupunând că undele 1 și 2 sunt identice, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ și $\omega_3 = 2\omega$, *condiția de acord de fază* devine $n_a = n_c$. Atunci este necesar ca să se găsească direcția și polarizațiile celor două unde astfel încât unda de frecvență ω să aibă același indice de refracție ca unda de frecvență 2ω.

Modurile normale pentru o undă care se propagă într-un cristal uniax cu indicii de refracție ordinar, n_0 și extraordinar, n_e, sunt o undă ordinară cu indicele de refracție n_0 (independent de direcție) și o undă extraordinară cu indicele de refracție $n(\theta)$ care satisface relația:

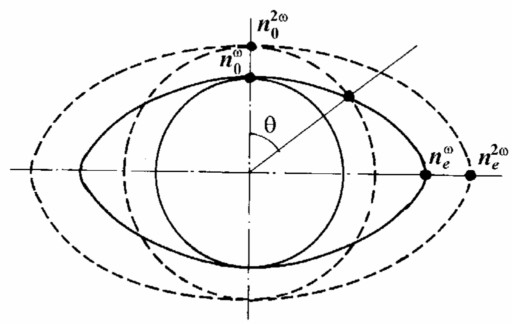

Fig. 7.1.

$$\frac{1}{n^2(\theta)}=\frac{\cos^2\theta}{n_0^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}, \quad (7.5)$$

unde θ este unghiul dintre direcția undei și axa optică. Dependența acestor doi indici de refracție de θ este ilustrată de elipsa și cercul din figura 7.1. Deoarece n_0 și n_e sunt dependenți de frecvență, indicii $n_0^{\omega}, n_0^{2\omega}, n_e^{\omega}$ şi $n_e^{2\omega}$ se reprezintă la intersecția elipsă/cerc la frecvența fundamentala ω (curbele pline din figura 7.1) și intersecția elipsă/cerc la frecvența armonicii a doua 2ω (curbele întrerupte din figura 7.1). Pentru a acorda pe $n_a = n^{\omega}(\theta)$ la $n_b = n_0^{2\omega}$, este stabilită o direcție pentru care cercul la 2ω intersectează elipsa la ω, după cum se ilustrează în figura 7.1. Aceasta cerință este realizată prin alegerea unui unghi θ pentru care:

$$\frac{1}{n_0^{2\omega}}=\frac{\cos^2\theta}{\left(n_0^{\omega}\right)^2}+\frac{\sin^2\theta}{\left(n_e^{\omega}\right)^2}. \quad (7.6)$$

Astfel, unda fundamentală este o undă extraordinară și unda armonicii a doua este o undă ordinară(3).

7.2. Medii neliniare dispersive(4)

7.2.1. Noțiuni introductive

Această secțiune este prevăzută pentru a discuta asupra originii dispersiei și efectul acesteia asupra proceselor optice neliniare. Pentru a simplifica prezentarea, nu sunt incluse efectele anizotrope. Un mediu dispersiv este un mediu cu memorie, polarizația $P(t)$ care rezultă în urma aplicării câmpului electric $E(t)$ nu are loc instantaneu. Astfel, răspunsul $P(t)$ la timpul t este o funcție de câmpul electric aplicat $E(t)$ la timpul $t' \le t$. Când mediul este, de asemenea, și neliniar, relația funcțională dintre $P(t)$ și $\{E(t'), t' \le t\}$ este neliniară. Există două mijloace pentru a descrie astfel de sisteme dinamice neliniare.

Primul mijloc constă în a utiliza o relație integrală fenomenologică între $P(t)$ și $E(t)$ bazată pe o dezvoltare, similară dezvoltării în serie Taylor, numită

(3) Miles Padgett, *Notes for modern and nonlinear optics*, m.padgett@physics.gla.ac.uk
(4) V.I.Karpman, *Nonlinear waves in dispersive media*, Pergamon Press, Oxford, (1975)

dezvoltare în serie Voltera. Coeficienții dezvoltării caracterizează fenomenologic mediul. Coeficienți similari cu χ, d și $\chi^{(3)}$ sunt definiți și transformați pentru a deveni dependenți de frecvență.

Al doilea mijloc constă în a stabili o ecuație diferențială neliniară pentru $P(t)$, cu $E(t)$ ca o forță de "*comandă*" obținută prin utilizarea unui model ca cel descris de fizica proceselor de polarizare.

7.2.2. Descrierea transformării integrale a unui mediu neliniar dispersiv

Dacă abaterea de la linearitate este mică, o dezvoltare în serie Voltera poate fi utilizată pentru a descrie relația dintre $P(t)$ și $E(t)$. Primul termen al dezvoltării este o combinație lineară a lui $E(t')$ pentru toți $t' \leq t$

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t')E(t')\,\mathrm{d}\,t' . \tag{7.7}$$

Acesta este un sistem liniar cu funcția răspuns – impuls $\varepsilon_0 x(t)$.

Al doilea termen din dezvoltare este o suprapunere de produse $E(t')\,E(t'')$ la perechi de timpi $t' \leq t$ și $t'' \leq t$,

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int x^{(2)}(t-t', t-t'')E(t')E(t'')\mathrm{d}t'\mathrm{d}t'' , \tag{7.8}$$

unde $x^{(2)}(t', t'')$ este o funcție de două variabile ce caracterizează nelinearitatea dispersivă de al doilea ordin. Al treilea termen reprezintă o nelinearitate de al treilea ordin care poate fi caracterizată printr-o funcție $x^{(3)}(t', t'', t''')$ și o relație integrală triplă similară.

Contribuția *dispersivă liniară* descrisă prin relația (7.7) poate, de asemenea, să fie complet catacterizată printr-un răspuns la câmpurile monocromatice.

Dacă $E(t) = \mathrm{Re}\{E(\omega)\exp[i\omega t]\}$, atunci $P(t) = \mathrm{Re}\{P(\omega)\exp[i\omega t]\}$, unde $P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega)$ și $\chi(\omega)$ este transformata Fourier a lui $x(t)$ la $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$. Astfel, mediul este caracterizat complet prin susceptibilitatea dependentă de frecvență $\chi(\omega)$.

Contribuția neliniară de al doilea ordin este descrisă de (7.8) fiind caracterizată prin răspunsul la o suprapunere de două unde monocromatice de frecvențe unghiulare ω_1 şi ω_2. Substituind pe

$$E(t) = \mathrm{Re}\{E(\omega_1)\exp[i\omega_1 t] + E(\omega_2)\exp[i\omega_2 t]\} \tag{7.9}$$

în expresia (7.8), se poate arăta că componenta polarizației la frecvența unghiulară $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ are amplitudinea:

$$P(\omega_3) = 2d(\omega_3; \omega_1, \omega_2)E(\omega_1)E(\omega_2). \tag{7.10}$$

Coeficientul $d(\omega_3; \omega_1, \omega_2)$ este o versiune dependentă de frecvență a coeficientului d din (4.3.3). Relația dintre acest coeficient și funcția de răspuns $x^{(2)}(t', t'')$ este stabilită prin definirea funcției

$$\mathscr{H}^{(2)}(\omega_1,\omega_2)=\varepsilon_0\int\int_{-\infty}^{+\infty} x^{(2)}(t',t'')\exp[-i(\omega_1 t'+\omega_2 t'')]\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t'' \qquad (7.11)$$

care este o transformată Fourier bi-dimensională a lui $x(t',t'')$, evaluată la $\nu_1=-\frac{\omega_1}{2\pi}$ și $\nu_2=-\frac{\omega_2}{2\pi}$. Substituind pe (7.9) în (7.8) și folosind pe (7.11), se obține:

$$d(\omega_3;\omega_1,\omega_2)=\varepsilon_0\mathscr{H}^{(2)}(\omega_1,\omega_2). \qquad (7.12\text{ a})$$

Astfel, mediul dispersiv neliniar de al doilea ordin este dependent de frecvență, $\mathscr{H}^{(2)}(\omega_1,\omega_2)$ sau $d(\omega_3;\omega_1,\omega_2)$.

Cazul degenerat al generării armonicii a doua într-un mediu neliniar de al doilea ordin este, de asemenea, fără greutate descrisă prin substituirea lui $E(t)=\mathrm{Re}\{E(\omega)\exp[i\omega t]\}$ în (7.8) și folosind pe (7.11). Polarizația rezultată are o componentă la frecvența 2ω cu amplitudinea $P(2\omega)=d(2\omega;\omega,\omega)E(\omega)E(\omega)$, unde

$$d(2\omega;\omega,\omega)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathscr{H}^{(2)}(\omega,\omega). \qquad (7.12\text{ b})$$

Ceilalți coeficienți d reprezentând diferite procese de amestec de unde pot fi exprimați în mod similar prin funcția bidimensională $\mathscr{H}^{(2)}(\omega_1,\omega_2)$. De exemplu, *efectul electrooptic* este un rezultat al interacției dintre un câmp continuu $(\omega_1=0)$ și o undă optică $(\omega_2=\omega)$ pentru a genera polarizația la $\omega_3=\omega$. Coeficientul potrivit pentru această interacție este $d(\omega;0,\omega)=2\varepsilon_0\mathscr{H}^{(2)}(\omega,0)$. Acesta este coeficientul care determină coeficientul Pockels r, în concordanță cu relația (4.29).

Într-un mediu neliniar de al treilea ordin, un câmp electric cuprinzând trei funcții armonice de frecvențele unghiulare ω_1,ω_2 și ω_3 creează o polarizație sumă de frecvențe cu o componentă la frecvența unghiulară $\omega_4=\omega_1+\omega_2+\omega_3$ de amplitudine $P(\omega_4)=6\chi^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)E(\omega_1)E(\omega_2)E(\omega_3)$ unde funcția $\chi^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ înlocuiește coeficientul care descrie cazul nedisipativ. Funcția $\chi^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ poate fi determinată din $x^{(3)}(t',t'',t''')$ prin relații similare cu (7.12 a).

În consecință, datorită dispersiei, coeficienții neliniari de al doilea și al treilea ordin d și $\chi^{(3)}$ sunt dependenți de frecvențele undelor implicate în procesul de mișcare a undelor.

7.2.3. Descrierea ecuației diferențiale a mediilor neliniare dispersive

Un exemplu de relație dinamică neliniară dintre $P(t)$ și $E(t)$ descrisă de o ecuație diferențială este relația:

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}t^2}+\sigma\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 P+\omega_0^2\varepsilon_0\chi_0 bP^2=\omega_0^2\varepsilon_0\chi_0 E, \qquad (7.13)$$

unde σ, ω_0, χ_0 şi b sunt constante. În afară de termenul neliniar $\omega_0^2\varepsilon_0\chi_0 bP^2$, această ecuație descrie un mediu în care fiecare atom este descris de modelul oscilatorului armonic al unui electron de masă m supus la un câmp electric care dă forța $e \cdot E$, o forță de frânare elastică $-kx$ și o forță de frecare $m\sigma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, unde x este deplasarea electronului de la poziția lui de echilibru și $\omega_0 = \left(\dfrac{k}{m}\right)^{1/2}$ este frecvența unghiulară de rezonanță. Mediul este atunci liniar și dispersiv cu susceptibilitatea liniară

$$\chi(\omega) = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + i\omega\sigma}. \tag{7.14}$$

Când forța de frânare (sau de atracție) este o funcție neliniară de deplasare, $-kx - k_2x^2$, unde k și k_2 sunt constante, avem un oscilator anarmonic descris de ecuația (7.13), unde b este proporțional cu k_2. Atunci, mediul este neliniar.

Ecuația (7.13) nu poate fi rezolvată exact. Totuși, dacă termenul neliniar este mic, o abordare iterativă conduce la o soluție aproximativă. Scriem pe (7.13) sub forma:

$$\mathscr{L}\{P(t)\} = \mathscr{E}(t) - bP^2(t), \tag{7.15}$$

unde $\mathscr{L} = \left(\omega_0^2\varepsilon_0\chi_0\right)^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \sigma\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right)$ este operator diferențial liniar. Soluția iterativă a ecuației (7.15) este descrisă prin următoarele trepte:

(1°) Se găsește în aproximația de primul ordin $P_1(t)$ prin neglijarea termenului neliniar $bP^2(t)$ din ecuația (7.15) și se rezolvă ecuația liniară

$$\mathscr{L}\{P_1(t)\} \approx E(t); \tag{7.16}$$

(2°) Se folosește această soluție aproximativă pentru a determina termenul neliniar mic $bP_1(t)^2$;

(3°) Se obține o aproximație de ordinul doi prin rezolvarea ecuației (7.15) cu teremnul $bP(t)^2$ înlocuit cu $bP_1(t)^2$. Soluția ecuației liniare rezultată este notată cu $P_2(t)$,

$$\mathscr{L}\{P_2(t)\} = E(t) - b\,P_1^2(t); \tag{7.17}$$

(4°) Se repetă procesul pentru a obține o aproximație de ordinul al treilea după cum se ilustrează pe diagrama bloc din figura 7.2.

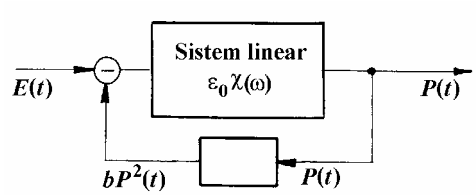

Fig. 7.2.

Examinăm, mai întâi, cazul special al luminii monocromatice, $E(t) = \mathrm{Re}\{E(\omega)\exp[i\omega t]\}$. La prima iterație $P_1(t) = \mathrm{Re}\{P_1(\omega)\exp[i\omega t]\}$, unde $P_1(\omega) = \varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)$ și $\chi(\omega)$ este dat de (7.14). În a doua iterație, sistemul liniar este condus de o forță

$$E(t)-bP_1^2(t)=\mathrm{Re}\{E(\omega)\exp[i\omega t]\}-b[\mathrm{Re}\{\varepsilon_0\chi(\omega)\exp[i\omega t]\}]^2=$$
$$=\mathrm{Re}\{E(\omega)\exp[i\omega t]\}-\frac{1}{2}b\,\mathrm{Re}[\varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)]^2\exp[2i\omega t]-\frac{1}{2}b|\varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)|^2.$$

Deoarece acești trei termeni au frecvențele $\omega, 2\omega$ și 0, sistemul liniar răspunde cu o susceptibilitățile $\chi(\omega), \chi(2\omega)$ și, respectiv $\chi(0)$. Componenta lui $P_2(t)$ la frecvența 2ω are o amplitudine $P_2(2\omega) = \varepsilon_0\chi(2\omega)\{-\frac{1}{2}b[\varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)]^2\}$. Deoarece $P(2\omega) = d(2\omega;\omega,\omega)E(\omega)E(\omega)$, se deduce că:

$$d(2\omega;\omega,\omega) = -\frac{1}{2}b\varepsilon_0^2[\chi(\omega)]^2\chi(2\omega). \tag{7.18}$$

Regula lui Miller stabilește că coeficientul neliniarității de al doilea ordin pentru generarea unei unde de frecvență $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ din două unde de frecvențe ω_1 și ω_2 este proporțională cu produsul $\chi(\omega_1)\chi(\omega_2)\chi(\omega_3)$ al susceptibilităților neliniare la cele trei frecvențe. Astfel, se arată ca pentru un mediu liniar rezonant descris de ecuația (7.13), dacă lumina este o suprapunere de două unde monocromatice de frecvențe unghiulare ω_1 și ω_2, aproximația de ordinul al doilea descrisă de (7.16) și (7.17) conduce la o componentă a polarizației la frecvența $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ cu amplitudinea $P_2(\omega_3) = \ = 2d(\omega_3;\omega_1,\omega_2)E(\omega_1)E(\omega_2)$, unde

$$d(\omega_3;\omega_1,\omega_2) = -\frac{1}{2}b\,\varepsilon_0^2\,\chi(\omega_1)\chi(\omega_2)\chi(\omega_3), \tag{7.19}$$

aceasta fiind cunoscută sub denumirea de regula lui Miller. Cele trei frecvențe trebuie prin urmare legate în interiorul ferestrei transmisiei optice a mediului (departe de rezonanță). Dacă aceste frecvențe sunt mult mai mici decât frecvența de rezonanță ω_0, atunci (7.14) dă $\chi(\omega) \approx \chi_0$ și expresia (7.19) conduce la

$$d(\omega_3;\omega_1,\omega_2) = -\frac{1}{2}b\,\varepsilon_0^2\,\chi_0^2, \tag{7.20}$$

care este indepenedentă de frecvență. Mediul este atunci aproximativ nedispersiv și rezultatele obținute în secțiunile în care dispersia a fost neglijată sunt aplicabile. Regula lui Miller ne indică, de asemenea, că materialele cu indice de refracție mare (χ_0 mare) tind să aibă pe *d* mare.