

## 6. TEORIA UNDEI CUPLATE

Teoria undei cuplate<sup>(1)</sup> contribuie la o analiză cantitativă mai exactă asupra amestecului a trei unde într-un mediu optic neliniar. Pentru o simplificare a analizei, nu sunt considerate în acest capitol efectele de dispersie și de anizotropie.

### 6.1. Teoria undei cuplate pentru amestecul a trei unde

Se va prezenta teoria undei cuplate pentru amestecul a trei unde într-un mediu optic neliniar de al doilea ordin.

#### 6.1.1. Ecuațiile undei cuplate

Propagarea unei unde electromagnetice într-un mediu neliniar de al doilea ordin este guvernată de ecuația undelor neliniară

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -S(E) \quad (6.1)$$

unde

$$S(E) = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

este privită ca o sursă de radiație, iar

$$P_{NL} = 2dE^2 \quad (6.3)$$

este componenta neliniară a polarizației.

Câmpul  $E(t)$  este o suprapunere a trei unde de frecvențe unghiulare  $\omega_1, \omega_2$  și  $\omega_3$  și de amplitudini complexe  $E_1, E_2$  și, respectiv  $E_3$ :

$$E(t) = \sum_{q=1,2,3} \operatorname{Re} \{E_q \exp[i\omega_q t]\} = \sum_{q=1,2,3} \frac{1}{2} \{E_q \exp[i\omega_q t] + E_q^* \exp[-i\omega_q t]\}. \quad (6.4)$$

---

<sup>(1)</sup> B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of photonics*, John Wiley & Sons, Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, (1991)

Se convine ca (6.4) să se scrie în formă compactă:

$$E(t) = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} E_q \exp[i\omega_q t], \quad (6.5)$$

unde  $\omega_q = -\omega_q$  și  $E_{-q} = E_q^*$ .

Polarizația corespunzătoare obținută prin substituirea în relația (6.3) a expresiei (6.5) este o sumă de 36 termeni:

$$P_{NL}(t) = \frac{1}{2} d \sum_{q,r=\pm 1, \pm 2, \pm 3} E_q E_r \exp[i(\omega_q + \omega_r)t] \quad (6.6)$$

și sursa de radiație corespunzătoare

$$S = \frac{1}{2} \mu_0 d \sum_{q,r=\pm 1, \pm 2, \pm 3} (\omega_q + \omega_r)^2 E_q E_r \exp[i(\omega_q + \omega_r)t], \quad (6.7)$$

care este suma componentelor armonice de frecvențe ce sunt sume diferențe ale frecvențelor originale  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$ .

### A. Forma ecuațiilor

Acum, substituind relațiile (6.5) și (6.7) în ecuația (6.1) se obține o singură ecuație diferențială cu mulți termeni, dintre care fiecare este o funcție armonică de aceeași frecvență. Dacă frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$  sunt distințe, putem separa această ecuație în trei ecuații diferențiale prin termenii ecuației de ambele părți ale ecuației (6.1) și la fiecare din frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$  separat. Rezultatul este dat sub forma a trei ecuații Helmholtz cu surse:

$$(\nabla^2 + k_1^2) E_1^0 = -S_1^0 \quad (6.8 \text{ a})$$

$$(\nabla^2 + k_2^2) E_2^0 = -S_2^0 \quad (6.8 \text{ b})$$

$$(\nabla^2 + k_3^2) E_3^0 = -S_3^0, \quad (6.8 \text{ c})$$

unde  $S_q^0$  este amplitudinea componentei lui  $S$  cu frecvența  $\omega_q$  și  $k_q = n \frac{\omega_q}{c}$ ,  $q = 1, 2, 3$ . Fiecare din amplitudinile complexe ale celor trei unde satisfac ecuația Helmholtz cu o sursă egală cu componenta lui  $S$  la frecvența ei. În anumite condiții, sursa pentru o undă depinde de câmpul electric al celorlalte două unde, astfel încât cele trei unde sunt cuplate.

Se observă că în absența neliniarităților ( $d = 0$ ), se anulează termenul sursă,  $S$ , cele trei unde satisfăcând ecuația lui Helmholtz individual, una independent de celelalte două, după cum se constată în optica liniară.

Dacă frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$  nu sunt corespunzătoare (o frecvență nu este suma sau diferența celorlalte două și o frecvență nu este dublul celeilalte), atunci termenul sursă  $S$ , nu conține nici o componentă de frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  sau  $\omega_3$ . Atunci, componentele  $S_1^0$ ,  $S_2^0$  și  $S_3^0$  se anulează și cele trei unde nu interacționează.

Pentru ca cele trei unde să fie cuplate prin mediu, frecvențele lor trebuie să fie corespunzătoare. Să presupunem, de exemplu, că o frecvență este suma celorlalte două,

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (6.9)$$

care este condiția de acord de frecvență. Sursa  $S$  va conține, în acest caz, componente la frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$ . Examinând cei 36 de termeni din (6.7), se obțin expresiile:

$$S_1^0 = 2\mu_0\omega_1^2 dE_3^0 E_2^{0*} \quad (6.10 \text{ a})$$

$$S_2^0 = 2\mu_0\omega_2^2 dE_3^0 E_1^{0*} \quad (6.10 \text{ b})$$

$$S_3^0 = 2\mu_0\omega_3^2 dE_1^0 E_2^{0*}. \quad (6.10 \text{ c})$$

Se observă că sursa pentru unda 1 este proporțională cu  $E_3^0 E_2^{0*}$ , deoarece  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ , undele 2 și 3 contribuind împreună la creșterea undei 1. În mod asemănător, sursa pentru unda 3 este proporțională cu  $E_1^0 E_2^0$ , deoarece  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , astfel încât undele 1 și 2 se combină pentru a amplifica unda 3 și.a.m.d. Astfel, cele trei unde sunt cuplate sau *mixate* de mediu într-un proces descris de trei ecuații diferențiale cuplate în  $E_1^0$ ,  $E_2^0$  și  $E_3^0$ .

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1^0 = -2\mu_0\omega_1^2 dE_3^0 E_2^{0*}; \quad (6.11 \text{ a})$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)E_2^0 = -2\mu_0\omega_2^2 dE_3^0 E_1^{0*}; \quad (6.11 \text{ b})$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3^0 = -2\mu_0\omega_3^2 dE_1^0 E_2^{0*}. \quad (6.11 \text{ c})$$

Ecuațiile (6.11) se numesc *ecuațiile cuplate pentru amestecul a trei unde*.

Ecuațiile (6.11) sunt valabile numai când frecvențele  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\omega_3$  sunt distințe. Considerând cazul *amestecului a trei unde degenerate*, pentru care  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  și  $\omega_3 = 2\omega$ , astfel încât există două în loc de trei unde, cu amplitudinile  $E_1^0$  și  $E_3^0$ . Se poate arăta că aceste unde satisfac ecuația Helmholtz cu sursele:

$$S_1^0 = 2\mu_0\omega_1^2 dE_3^0 E_1^{0*}; \quad (6.12 \text{ a})$$

$$S_3^0 = \mu_0\omega_3^2 dE_1^0 E_1^0, \quad (6.12 \text{ b})$$

astfel încât ecuațiile undei cuplate sunt

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1^0 = -2\mu_0\omega_1^2 dE_3^0 E_1^{0*}; \quad (6.13 \text{ a})$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3^0 = -\mu_0\omega_3^2 dE_1^0 E_1^0. \quad (6.13 \text{ c})$$

Se observă că ecuațiile (6.13) nu se pot obține din ecuațiile (6.11) prin substituirea lui  $E_1 = E_2$ , factorul 2 fiind absent în (6.13 b).

## B. Amestecul a trei unde plane uniforme colineare

Se presupune că cele trei unde sunt unde plane care se propagă în direcția  $z$  cu amplitudinile complexe  $E_q^0 = A_q \exp[-ik_q z]$ , anvelopele complexe  $A_q$  și numerele de undă  $k_q = \frac{\omega_q}{c}$ , unde  $q = 1, 2, 3$ . Este convenabil să se normeze amplitudinile complexe prin definirea variabilelor

$$a_q = \frac{A_q}{(2Z\hbar\omega_q)^{1/2}}, \quad (6.14)$$

unde  $Z = \frac{Z_0}{n}$  este impedanța mediului,  $Z_0 = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  este impedanța spațiului

liber și  $\hbar\omega_q$  este energia unui foton de frecvență unghiulară  $\omega_q$ . Astfel, se obține:

$$E_q = (2Z\hbar\omega_q)^{1/2} a_q \exp[-ik_q z], \quad q = 1, 2, 3. \quad (6.15)$$

și intensitățile celor trei unde vor fi:

$$I_q = \frac{|E_q|^2}{2Z} = \hbar\omega_q |a_q|^2. \quad (6.16)$$

Densitățile fluxului de fotoni (fotoni  $s^{-1}m^{-2}$ ) asociate cu aceste unde sunt:

$$\Phi_q = \frac{I_q}{\hbar\omega_q} = |a_q|^2. \quad (6.17)$$

Se observă că variabilă  $a_q$  reprezintă anvelopa complexă a undei  $q$ , dimensionată astfel încât  $|a_q|^2$  este densitatea fluxului de fotoni. Această dimensionare este convenabilă deoarece procesul de mișcare a undelor trebuie să fie guvernat de conservarea numărului de fotoni.

Ca rezultat al interacției dintre cele trei unde, anvelopele complexe  $a_q$  variază cu  $z$ , adică,  $a_q = a_q(z)$ . În cazul unei interacțiuni slabe,  $a_q(z)$  variază lent cu  $z$ , astfel încât pot fi presupuse aproximativ constante pe o distanță a ordinului lungimii de undă. Aceasta ne conduce la folosirea *aproximației anvelopei lent*

*variabile* unde  $\frac{d^2 a_q}{dz^2}$  este neglijat față de  $k_q \frac{da_q}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda_q} \frac{da_q}{dz}$  și

$$(\nabla^2 + k_q^2) a_q \exp[-ik_q z] \approx -i2k_q \frac{da_q}{dz} \exp[-ik_q z]. \quad (6.18)$$

Cu această aproximație ecuațiile (6.11) se reduc la o formă mai simplă

$$\frac{da_1}{dz} = -ig a_3 a_2^* \exp[-i\Delta kz] \quad (6.19 a)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -ig a_3 a_1^* \exp[-i\Delta kz] \quad (6.19 b)$$

$$\frac{da_3}{dz} = -ig a_3 a_2 \exp[-i\Delta kz], \quad (6.19 c)$$

acestea purtând numele de *ecuațiile cuplate pentru amestecul a trei unde*. În ecuațiile (6.19) s-au introdus mărimile:

$$g^2 = 2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3 Z^3 d^2 \quad (6.20)$$

și eroarea în condiția de acord de fază

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1. \quad (6.21)$$

Prin urmare, variațiile marimilor  $a_1, a_2$  și  $a_3$  cu  $z$  sunt guvernate de ecuațiile diferențiale de primul ordin cuplate (6.19), care urmează să fie rezolvate ținând seama de diferitele condiții la limită corespunzătoare aplicațiilor respective. Însă, este folositor ca mai întâi să deducem anumiți invariante ai procesului de mișcare a undelor. Acești invariante sunt funcții de  $a_1, a_2$  și  $a_3$ , fiind independenți de  $z$ . Invariantele respectiv sunt folositori deoarece ei pot fi utilizati pentru a reduce numărul de variabile independente.

*Primul invariant* se obține efectuând suma intensităților  $I_q = \hbar\omega_q |a_q|^2$  unde  $q = 1, 2, 3$ , a celor trei unde guvernate de ecuațiile (6.19) și luând derivata în raport cu  $z$ . Astfel, rezultă că suma  $I_1 + I_2 + I_3$  este invariantă față de  $z$ , adică (avem *conservarea energiei*):

$$\frac{d}{dz}(I_1 + I_2 + I_3) = 0. \quad (6.22)$$

*Al doilea invariant* rezultă din *conservarea numărului de fotoni (relațiile lui Manley – Rowe)*. Utilizând relațiile (6.19), rezultă

$$\frac{d}{dz}|a_1|^2 = \frac{d}{dz}|a_2|^2 = -\frac{d}{dz}|a_3|^2, \quad (6.23)$$

din care se obțin relațiile Manley – Rowe (4.45), care sunt deduse folosind conservarea numărului de fotoni. Ecuațiile (6.23) implică faptul că  $|a_1|^2 + |a_3|^2$  și  $|a_2|^2 + |a_3|^2$  sunt, de asemenea, invariante ai procesului de mișcare a undelor.

### 6.1.2. Generarea armonicii a doua

Generarea armonicii a doua este un caz degenerat al amestecului a trei unde în care:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \text{ și } \omega_3 = 2\omega. \quad (6.24)$$

Astfel, au loc două forme de interacție: - doi fotoni de frecvență  $\omega$  se combină pentru a forma un foton de frecvență  $2\omega$  (armonica a doua); - un foton de frecvență  $2\omega$  se despărțește în doi fotoni, fiecare de frecvență  $\omega$ .

Interacția a două unde este descrisă de ecuațiile Helmholtz cu surse. Conservarea impulsului cere ca:

$$\bar{k}_3 = 2\bar{k}_1. \quad (6.25)$$

#### A. Ecuațiile undei cuplate pentru generarea armonicii a doua

Aplicând aproximarea anvelopei lent variabile (6.18) la ecuațiile lui Helmholtz (6.13), care descriu două unde colineare în cazul degenerat, conduce la:

$$\frac{da_1}{dz} = -ig a_3 a_1^* \exp[-i\Delta kz] \quad (6.26 \text{ a})$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i\frac{g}{2} a_1 a_1^* \exp[+i\Delta kz], \quad (6.26 \text{ b})$$

unde

$$\Delta k = k_3 - 2k_1 \quad (6.27)$$

și

$$g^2 = 4\hbar\omega^3 Z^3 d^2. \quad (6.28)$$

Mai departe, presupunând două unde colinare cu acordul de fază perfect ( $\Delta k = 0$ ), ecuațiile (6.26) se reduc la:

$$\frac{da_1}{dz} = -ig a_3 a_1^* \quad (6.29 \text{ a})$$

și

$$\frac{da_3}{dz} = -i \frac{g}{2} a_1 a_1, \quad (6.29 \text{ b})$$

care sunt *ecuațiile cuplate pentru generarea armonică a două*. La intrarea în aparat ( $z = 0$ ) amplitudinea undei armonicei a două este presupusă nulă, adică,  $a_3(0) = 0$ , și unda fundamentală,  $a_1(0)$ , este presupusă reală. Cu aceste condiții la limită și folosind relația pentru conservarea numărului de fotoni

$$|a_1(z)|^2 + 2|a_3(z)|^2 = \text{constant},$$

ecuațiile (6.29) au soluțiile:

$$a_1(z) = a_1(0) \operatorname{sech} \frac{g a_1(0) z}{\sqrt{2}} \quad (6.30 \text{ a})$$

și

$$a_3(z) = -\frac{i}{\sqrt{2}} a_1(0) \operatorname{tgh} \frac{g a_1(0) z}{\sqrt{2}}. \quad (6.30 \text{ a})$$

În consecință, densitățile fluxurilor de fotonii  $\Phi_1(z) = |a_1(z)|^2$  și  $\Phi_3(z) = |a_3(z)|^2$  evoluează în concordanță cu

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(0) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\gamma z}{2} \right) \quad (6.31 \text{ a})$$

și

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2} \Phi_1(0) \operatorname{tgh}^2 \left( \frac{\gamma z}{2} \right), \quad (6.31 \text{ b})$$

unde

$$\frac{\gamma}{2} = g \frac{a_1(0)}{\sqrt{2}},$$

adică

$$\gamma^2 = 2g^2 a_1^2(0) = 2g^2 \Phi_1(0) = 8d^2 Z^3 \hbar \omega^3 \Phi_1(0) = 8d^2 Z^3 \omega^2 I_1(0). \quad (6.32)$$

Deoarece  $\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1$ ,  $\Phi_1(z) + 2\Phi_3(z) = \Phi_1(0)$  este constant, indicând faptul că la fiecare poziție  $z$ , fotonii undei 1 sunt convertiți jumătate și chiar mai mulți în fotonii ai undei 3. Scăderea lui  $\Phi_1(z)$  și creșterea lui  $\Phi_3(z)$  cu  $z$  sunt arătate în figura 6.1.

În figura 6.1. este reprezentat procesul de generare a armonicii a doua: o undă de frecvență  $\omega$  incidentă pe un cristal neliniar generează o undă de frecvență  $2\omega$  (figura 6.1 a); doi fotoni de frecvență  $\omega$  se combină pentru a da un foton de frecvență  $2\omega$  (figura 6.1 b); când densitatea de flux sotonic  $\Phi_1(z)$  al undei fundamentale descrește, densitatea de flux de fotoni  $\Phi_3(z)$  ai undei armonicii a doua crește și, deoarece numărul de fotoni se conservă, suma  $\Phi_1(z) + 2\Phi_3(z) = \Phi_1(0)$  este o constantă (figura 6.1 c).

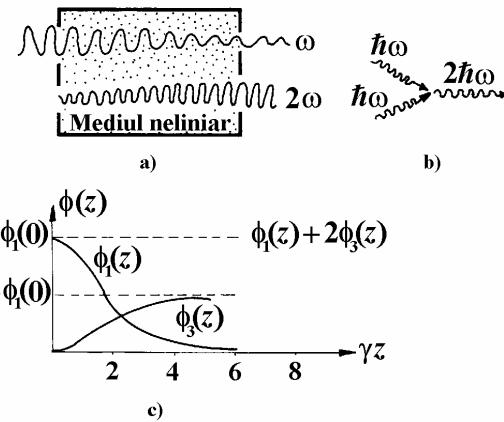


Fig. 6.1.

Eficiența generării armonicii a doua pentru o regiune de interacție de lungime  $L$ , este:

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{\hbar\omega_3\Phi_3(L)}{\hbar\omega_1\Phi_1(0)} = \frac{2\Phi_3(L)}{\Phi_1(0)} = \operatorname{tg} h^2 \left( \frac{\gamma L}{2} \right). \quad (6.33)$$

Pentru  $\gamma L$  mare (celulă lungă, intensitate la intrare mare sau parametru neliniar mare), eficiența se apropie de 1. Aceasta semnifică faptul că întreaga putere de intrare (la frecvența  $\omega$ ) a fost transformată în putere la frecvența  $2\omega$ ; toți fotoni la intrare de frecvență  $\omega$  sunt convertiți jumătate sau în număr mai mare în fotoni de frecvență  $2\omega$ .

Pentru valori mici ale lui  $\gamma L$  (lungimea  $L$  a aparatului mică, parametru neliniar  $d$  mic sau densitatea fluxului de fotoni la intrare,  $\Phi_1(0)$ , mică), argumentul funcției  $\operatorname{tg} h$  este mic și, prin urmare, se poate folosi aproximarea  $\operatorname{tg} h \approx x$ . Atunci, eficiența generării armonicii a doua este:

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} \approx \left( \frac{\gamma L}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} g^2 L^2 \Phi_1(0) = 2d^2 Z^3 \hbar\omega^3 L^2 \Phi_1(0) = 2d^2 Z^2 \omega^2 L^2 I_1(0) \quad (6.34)$$

adică

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} = 2Z^3 \omega^2 \frac{d^2}{n^3} \frac{L^2}{A} \mathcal{P}, \quad (6.35)$$

unde  $\mathcal{P} = I_1(0)A$  este puterea optică incidentă și  $A$  este aria secțiunii transversale. Eficiența este proporțională cu puterea de intrare  $\mathcal{P}$  și factorul  $d^2/n^3$ , care este o imagine a meritului folosită pentru compararea diferitelor materiale neliniare. Pentru o putere de intrare fixată,  $\mathcal{P}$ , eficiența este direct proporțională cu factorul geometric  $L^2/A$ . Pentru a maximiza eficiența este necesar să se confineze unda pe o arie  $A$  cât mai mică și să se crească pe cât posibil lungimea de interacție  $L$ . Aceasta se realizează cel mai bine cu ghiduri de undă (planare sau ghiduri canal sau fibre).

## B. Efectul acordului de fază

Pentru a studia efectul acordului de fază (sau impulsul), ecuațiile generale (6.26) sunt studiate presupunând  $\Delta k \neq 0$ . Pentru a simplifica lucrurile, ne vom limita la cazul cuplajului slab pentru care  $\gamma L \ll 1$ . În acest caz, amplitudinea undei fundamentale  $a_1(z)$  variază numai ușor cu  $z$  (figura 6.1 c) și poate fi presupusă aproximativ constantă. Presupunând  $a_1(z) \approx a_1(0)$  în (6.26 b) și integrând, se obține:

$$a_3(L) = -i \frac{g}{2} a_1^2(0) \int_0^L \exp[i\Delta k \cdot z'] dz' = -\frac{g}{2 \cdot \Delta k} a_1^2(0) (\exp[i\Delta k \cdot L] - 1) \quad (6.36)$$

pentru care

$$\Phi_3(L) = |a_3(L)|^2 = \left( \frac{g}{\Delta k} \right)^2 \Phi_1^2(0) \sin^2 \left( \frac{\Delta k \cdot L}{2} \right), \quad (6.37)$$

unde  $a_1(0)$  este presupus real. Astfel, eficiența generării armonice a doua este:

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{2\Phi_3(L)}{\Phi_1(0)} = \frac{1}{2} g^2 L^2 \Phi_1(0) \frac{\sin^2 \frac{\Delta k \cdot L}{2}}{\left( \frac{\Delta k \cdot L}{2\pi} \right)^2}. \quad (6.38)$$

Efectul acordului de fază se manifestă prin reducerea eficienței generării

armonice a doua printr-un factor  $\frac{\sin^2 \frac{\Delta k \cdot L}{2}}{\left( \frac{\Delta k \cdot L}{2\pi} \right)^2}$ .

Acum factor este egal cu unitatea pentru  $\Delta k = 0$  și scade când  $\Delta k$  crește, atingând

valoarea  $\left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \approx 0,4$  când  $|\Delta k| = \frac{\pi}{L}$  și

anulându-se când  $|\Delta k| = \frac{2\pi}{L}$  (figura 6.2).

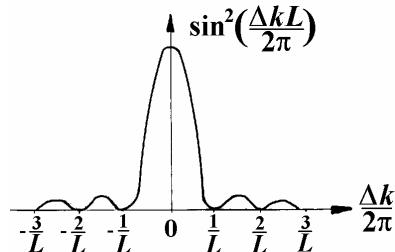


Fig. 6.2.

Pentru un  $L$  dat, acordul  $\Delta k$  corespunzând la un factor de reducere a eficienței prescris, este invers proporțional cu  $L$ , încât acordul de fază devine mai stringent cu creșterea lui  $L$ . Pentru un acord de fază dat,  $\Delta k$ , lungimea

$$L_c = \frac{2\pi}{|\Delta k|} \quad (6.39 \text{ a})$$

este o măsură a lungimii maxime în interiorul căreia generarea armonicii a două este eficiență;  $L_c$ , dată de (6.39), este adesea numită *lungimea coerentei*. Deoarece

$$|\Delta k| = 2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) |n_3 - n_1|, \quad (6.40)$$

unde  $\lambda_0$  este lungimea de undă în spațiul liber al undei fundamentale și  $n_1$  și  $n_3$  sunt indicii de refracție ai undelor fundamentală și armonica a două, avem

$$L_c = \frac{\frac{\lambda_0}{2}}{|n_3 - n_1|}, \quad (6.39 \text{ b})$$

adică, lungimea coerentei este invers proporțională cu  $|n_3 - n_1|$ , care este guvernat de dispersia materialului.

Toleranța procesului de interacție la acordul de fază poate fi privită ca un rezultat al incertitudinii vectorului de undă  $\Delta k \propto \frac{1}{L}$  asociat cu confinarea undei în interiorul distanței  $L$ . Incertitudinea impulsului corespunzător,  $\Delta p = \hbar \Delta k \propto \frac{1}{L}$ , explică violarea aparentă a legii conservării impulsului în procesul de mișcare a undei.

### 6.1.3. Conversia frecvenței<sup>(2)</sup>

Un convertor de creștere a frecvenței (“*a frequency up-convertor*”), pentru care procesul este reprezentat în figura 6.3 (unde avem amestecul de unde (figura 6.3 a); interacțiile fotonilor (figura 6.3 b) și evoluția densităților fluxurilor de fotoni pentru unda de intrare  $\omega$  și unda de frecvență crescută  $\omega_3$ , unda pompă  $\omega_2$  fiind considerată constantă (figura 6.3 c)) converteste o undă de frecvență  $\omega_1$  într-o undă de înaltă frecvență  $\omega_3$  prin folosirea unei unde auxiliare de frecvență  $\omega_2$ , numită “pompă”. Un foton  $\hbar\omega_2$  pentru undă pompă este adăugat la un foton  $\hbar\omega_1$  pentru semnalul de intrare, formându-se un foton  $\hbar\omega_3$  al semnalului de ieșire al convertorului de frecvență înaltă (<<up-converted frequency>>)  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ .

<sup>(2)</sup> N. Bloembergen, *Reviews of Modern Physics*, **54**, 685-695, (1982)

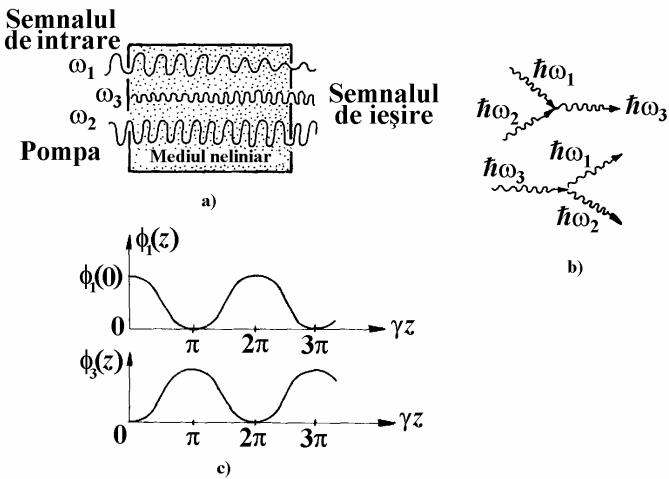


Fig. 6.3.

Procesul de conversie descris este guvernat de cele trei ecuații cuplate (6.19). Pentru a simplifica prezentarea, se presupune că cele trei unde sunt în acord de fază ( $\Delta k = 0$ ) și că unda pompă este suficient de intensă astfel încât amplitudinea ei nu trebuie să se schimbe în mod apreciabil în interiorul distanței de interacție de interes, adică,  $a_2(z) \approx a_2(0)$  pentru orice  $z$  dintre 0 și  $L$ . Atunci, cele trei ecuații (6.19) se reduc la două:

$$\frac{da_1}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_3; \quad (6.41 \text{ a})$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_1, \quad (6.41 \text{ b})$$

unde  $\gamma = 2ga_2(0)$  și  $a_2(0)$  este presupusă reală. Ecuațiile diferențiale (6.41) au soluțiile armonice

$$a_1(z) = a_1(0) \cos\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (6.42 \text{ a})$$

$$a_3(z) = -ia_1(0) \sin\left(\frac{\gamma z}{2}\right). \quad (6.42 \text{ b})$$

Densitățile fluxurilor de fotoni corespunzătoare sunt:

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(0) \cos^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (6.43 \text{ a})$$

și

$$\Phi_3(z) = \Phi_1(0) \sin^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right). \quad (6.43 \text{ b})$$

Dependența densităților fluxurilor de fotoni  $\Phi_1(z)$  și  $\Phi_3(z)$  de  $z$  este reprezentată în figura 6.3 c. Fotonii sunt schimbați peiodic între cele două unde. Astfel, în

regiunea dintre  $z=0$  și  $z=\frac{\pi}{\gamma}$ , fotonii de intrare cu frecvență  $\omega_1$  se combină cu fotonii pompei de frecvență  $\omega_2$  și generează fotonii de frecvență crescută  $\omega_3$  (<<up-converted>>). Unda 1 este, prin urmare, atenuată, pe când unda 3 este amplificată. În regiunea de la  $\gamma z=\pi$  la  $\gamma z=2\pi$ , fotonii de frecvență  $\omega_3$  sunt mai abundenți. Ei se dezintegreză în fotonii de frecvență  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Astfel unda 3 este atenuată și unda 1 este amplificată. Procesul respectiv este repetat periodic în timp ce undele se propagă prin mediu.

Eficiența <<up-conversion>> pentru un aparat de lungime  $L$  este

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \sin^2\left(\frac{\gamma L}{2}\right). \quad (6.44)$$

Pentru  $\gamma L \ll 1$  și folosind relația (6.20), (6.44) devine

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} \approx \frac{\omega_3}{\omega_1} \left(\frac{\gamma L}{2}\right)^2 = \frac{\omega_3}{\omega_1} g^2 L^2 \Phi_2(0) = 2\omega_3^2 L^2 d^2 Z^3 I_2(0). \quad (6.45)$$

din care, se obține

$$\frac{I_3(L)}{I_1(0)} = 2Z_0^3 \omega_3^2 \frac{d^2}{n^3} \frac{L^2}{A} \mathcal{R}, \quad (6.46)$$

aceasta exprimând, în mod curent, eficiența la <<up-conversion>>. În expresia (6.45),  $A$  este aria secțiunii transversale și  $\mathcal{R} = I_2(0)A$  este puterea undei pompă. Eficiență conversiei este proporțională cu puterea undei pompă, raportul  $L^2/A$  și parametrul de material  $d^2/n^3$ .

#### 6.1.4. Amplificarea și oscilația parametrică<sup>(3)</sup>

##### A. Amplificatorul parametric

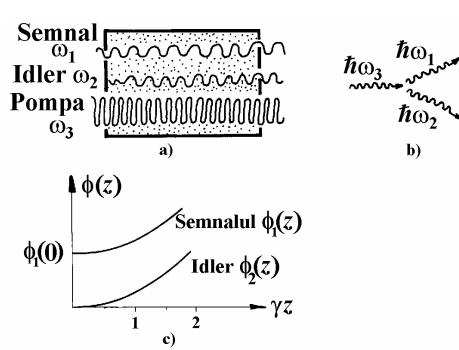


Fig. 6.4.

Amplificatorul parametric utilizează mixarea a trei unde într-un cristal nelinier pentru a produce căstig optic (figura 6.4a). În figura 6.4 avem reprezentate: mișcarea undelor (figura 6.4a); mixarea fotonilor (figura 6.4b) și densitățile fluxului de fotoni pentru semnal și pentru idler (figura 6.4c), densitatea fluxului de fotoni al pompei fiind presupusă constantă.

Procesul este guvernă de aceleasi trei ecuații cuplate (6.19),

<sup>(3)</sup> G.B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1974)

considerând undele:

- *unda 1* care este “semnalul” care trebuie amplificat; el este incident pe cristal cu o intensitate mică  $I_1(0)$ ;

- *unda 3*, numită undă “pompă”, aceasta fiind o undă intensă pentru a asigura puterea de amplificat;

- *unda 2*, numită “idler”, care este o undă auxiliară creată prin procesul de interacție.

Ideea de bază este că un foton  $\hbar\omega_3$  adus de pompă este despicate într-un foton  $\hbar\omega_1$ , care amplifică semnalul și un foton  $\hbar\omega_2$ , care creează “idlerul” (figura 6.4 b).

Presupunând acordul de fază perfect ( $\Delta k = 0$ ) și o pompă nevariabilă,  $a_3(z) \approx a_3(0)$ , ecuațiile undei cuplate (6.19) conduce la:

$$\frac{da_1}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_2^* \quad (6.46 \text{ a})$$

și

$$\frac{da_2}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_1^*, \quad (6.46 \text{ b})$$

unde  $\gamma = 2ga_3(0)$  și  $a_3(0)$  este real,  $\gamma$  este de asemenea real și ecuațiile diferențiale (6.46) au soluțiile:

$$a_1(z) = a_1(0) \cosh\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (6.47 \text{ a})$$

și

$$a_2(z) = -ia_1(0) \sinh\left(\frac{\gamma z}{2}\right). \quad (6.47 \text{ b})$$

Densițătile fluxurilor de fotoni corespunzătoare sunt:

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(0) \cosh^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \quad (6.48 \text{ a})$$

$$\Phi_2(z) = \Phi_1(0) \sinh^2\left(\frac{\gamma z}{2}\right). \quad (6.48 \text{ b})$$

Ambele fluxuri  $\Phi_1(z)$  și  $\Phi_2(z)$  cresc monoton cu  $z$ , după cum se ilustrează în figura 6.4 c. Această creștere se saturează când nu se mai extrage energie suficientă de la pompă încât presupunerea că pompa este nevariabilă nu mai este îndeplinită.

Câștigul total al unui amplificator de lungime  $L$  este

$$G = \frac{\Phi_1(L)}{\Phi_1(0)} = \cosh^2\left(\frac{\gamma L}{2}\right) \quad (6.49)$$

Presupunând că  $\gamma L \gg 1$ , avem

$$G = \left( \exp\left[\frac{\gamma L}{2}\right] + \exp\left[-\frac{\gamma L}{2}\right] \right)^2 \frac{1}{4} \approx \frac{\exp[\gamma L]}{4}, \quad (6.50)$$

adică, câștigul crește exponențial cu  $\gamma L$ . Coeficientul de câștig

$$\gamma = 2g a_3(0) = 2d (2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3 Z^3)^{1/2} a_3(0)$$

devine

$$\gamma = \left( 8Z_0^3 \omega_1 \omega_2 \frac{d^2}{n^3} \frac{\mathcal{P}_3}{A} \right)^{1/2}, \quad (6.51)$$

care poartă numele de *coeficient de câștig al amplificatorului parametric*. În expresia (6.51),  $\mathcal{P}_3 = I_3(0)A$  este puterea undei pompă și  $A$  este aria secțiunii transversale.

## B. Oscilatorul parametric

Un oscilator parametric este construit prin prevederea reacției ambele frecvențe ale semnalului și idlerului amplificatorului parametric, după cum se ilustrează în figura 6.5, unde oscilatorul parametric generează lumină la frecvențele  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , iar pompa de frecvență  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  servește ca sursă de energie.

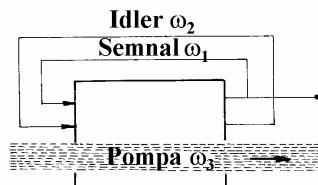


Fig. 6.5.

Pentru a determina condiția de oscilație, câștigul amplificatorului este egalat cu pierderile. În deducerea ecuațiilor cuplate (6.46), care descriu amplificatorul parametric, nu au fost incluse pierderile. Aceste ecuații pot fi modificate prin includerea fenomenologică a termenilor de pierderi, ecuațiile cuplate devenind:

$$\frac{da_1}{dz} = -\frac{\alpha_1}{2}a_1 - i\frac{\gamma}{2}a_2^* \quad (6.52a)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -\frac{\alpha_2}{2}a_2 - i\frac{\gamma}{2}a_1^* \quad (6.52b)$$

unde  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  sunt coeficienții de atenuare a puterii pentru undele *semnal* și, respectiv, *idler*. Acești termeni reprezintă pierderile prin împrăștiere și absorbtie în mediu și pierderile la oglinziile rezonatorului (figura 4.15) distribuite de-a lungul lungimii cristalului, ca în cazul laserelor. În absența cuplajului ( $\gamma = 0$ ), ecuația (6.52a) conduce la:

$$a_1(z) = \exp\left[-\frac{\alpha_1 z}{2}\right] \cdot a_1(0) \text{ și } \Phi_1(z) = \exp[-\alpha_1 z] \cdot \Phi_1(0), \quad (6.53)$$

adică, fluxul de fotoni se “dezintegrează” la rata  $\alpha_1$ . Ecuația (6.52 b) conduce la un rezultat similar.

Soluția stării staționare a ecuațiilor (6.52) este obținută din ecuațiile:

$$0 = \alpha_1 a_1 + i\gamma a_2^* \quad (6.54 a)$$

și

$$0 = \alpha_2 a_2 + i\gamma a_1^* \quad (6.54 b)$$

Ecuația (6.54 a) ne dă

$$\frac{a_1}{a_2^*} = -i \frac{\gamma}{\alpha_1}$$

și conjugata ecuației (6.54 b) conduce la

$$\frac{a_1}{a_2^*} = \frac{\alpha}{i\gamma},$$

astfel încât pentru o soluție netrivială,  $-i\frac{\gamma}{\alpha_1} = -i\frac{\alpha_2}{\gamma}$ , din care se obține:

$$\gamma^2 = \alpha_1 \alpha_2. \quad (6.55)$$

Dacă  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , condiția de oscilație devine  $\gamma = \alpha$ , adică, coeficientul de câștig al amplificatorului este egal cu coeficientul de pierderi. Deoarece  $\gamma = 2ga_3(0)$ , amplitudinea pompei trebuie să fie  $a_3(0) \geq \frac{\alpha}{2g}$ , iar fluxul de fotoni

corespunzător  $\Phi_3(0) \geq \frac{\alpha^2}{4g^2}$ . Substituind pe  $g$  din (6.20), obținem:

$$\Phi_3(0) \geq \frac{\alpha^2}{8\hbar\omega_1\omega_2\omega_3 Z^3 d^2}. \quad (6.56)$$

Astfel, intensitatea de pompaj minimă  $\hbar\omega_3\Phi_3(0)$  sau *intensitatea de pompaj de prag pentru oscilația parametrică*, este:

$$(I_3)_{prag} = \frac{\alpha^2 n^3}{8\omega_1\omega_2 Z_0^3 d^2}. \quad (6.57)$$

Frecvențele de oscilație  $\omega_1$  și  $\omega_2$  ale oscillatorului parametric sunt determinate de condițiile de acord de frecvență și de acord de fază,  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  și, respectiv  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3$ . Soluția acestor două ecuații conduce la  $\omega_1 = \omega_3 \frac{n_3 - n_2}{n_1 - n_2}$  și  $\omega_2 = \omega_3 \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_1}$ . Deoarece mediul este întotdeauna dispersiv, indicii de refracție sunt dependenți de frecvență, adică  $n_1 = n_1(\omega_1)$ ,  $n_2 = n_2(\omega_2)$  și  $n_3 = n_3(\omega_3)$ . Frecvențele de oscilație pot fi acordate prin varierea indicilor de refracție, utilizând, de exemplu, controlul temperaturii.

## 6.2. Teoria undei cuplate pentru amestecul a patru unde<sup>(4)</sup>

### 6.2.1. Ecuatiile undei cuplate

Acum se vor deduce ecuațiile diferențiale cuplate care descriu amestecul a patru unde într-un mediu neliniar de ordinul al treilea, utilizând o aproximatie similară cu cea utilizată în cazul amestecului a trei unde.

Cele patru unde constituie câmpul total:

---

<sup>(4)</sup> IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE - 22, no. 8 (1986)

$$E(t) = \sum_{q=1,2,3,4} \operatorname{Re} \{ E_q^0 \exp[i\omega_q t] \} = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4} \frac{1}{2} E_q^0 \exp[i\omega_q t], \quad (6.58)$$

care se propagă într-un mediu care se caracterizează prin polarizația neliniară

$$P_{NL} = 4\chi^{(3)} E^3(t). \quad (6.59)$$

Sursa corespunzătoare a radiației

$$S = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

este, prin urmare o sursă de  $8^3 = 512$  termeni, adică:

$$S = \frac{1}{2} \mu_0 \chi^{(3)} \sum_{q,p,r=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4} (\omega_q + \omega_p + \omega_r) E_q^0 E_p^0 E_r^0 \exp[i(\omega_q + \omega_p + \omega_r)t]. \quad (6.60)$$

Substituind pe (6.58) și (6.60) în ecuația (6.1) și egalând termenii ecuației la fiecare din cele patru frecvențe  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  și  $\omega_4$ , se obțin patru ecuații Helmholtz cu surse

$$(\nabla^2 + k_q^2) E_q^0 = -S_q^0; \quad q = 1, 2, 3, 4 \quad (6.61)$$

unde  $S_q^0$  este amplitudinea componentei lui  $S(t)$  la frecvența  $\omega_q$ .

Pentru ca cele patru unde să fie cuplate, frecvențele lor trebuie să fie corespunzătoare. Mai departe, considerăm, de exemplu, cazul pentru care suma a două frecvențe este egală cu suma celorlalte două frecvențe, adică, avem *condiția de acord de frecvență*

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2. \quad (6.62)$$

Astfel, trei unde se pot combina și crea o sursă la frecvența a patra. Folosind pe (6.62), termenii din (6.60) la fiecare din cele patru frecvențe sunt:

$$S_1^0 = \mu_0 \omega_1^2 \chi^{(3)} \left\{ 6E_3^0 E_4^0 E_2^{0*} + 3E_1^0 \left[ |E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2 + 2|E_3^0|^2 + 2|E_4^0|^2 \right] \right\} \quad (6.63a)$$

$$S_2^0 = \mu_0 \omega_2^2 \chi^{(3)} \left\{ 6E_3^0 E_4^0 E_1^{0*} + 3E_2^0 \left[ |E_2^0|^2 + 2|E_1^0|^2 + 2|E_3^0|^2 + 2|E_4^0|^2 \right] \right\} \quad (6.63b)$$

$$S_3^0 = \mu_0 \omega_3^2 \chi^{(3)} \left\{ 6E_1^0 E_2^0 E_4^{0*} + 3E_3^0 \left[ |E_3^0|^2 + 2|E_2^0|^2 + 2|E_1^0|^2 + 2|E_4^0|^2 \right] \right\} \quad (6.63c)$$

$$S_4^0 = \mu_0 \omega_4^2 \chi^{(3)} \left\{ 6E_1^0 E_2^0 E_3^{0*} + 3E_4^0 \left[ |E_4^0|^2 + 2|E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2 + 2|E_3^0|^2 \right] \right\}. \quad (6.63d)$$

Prin urmare, fiecare undă este condusă de o sursă cu patru componente. Primul termen este un rezultat al amestecării celorlalte trei unde. De exemplu, primul termen din  $S_1$ , este proporțional cu  $E_3^0 E_4^0 E_2^{0*}$  și, prin urmare, reprezintă amestecul undelor 2, 3 și 4 la creearea sursei pentru unda 1. Al doilea termen este proporțional cu amplitudinea complexă a unei însăși. De exemplu, al doilea termen din  $S_1$  este proporțional cu  $E_1^0$ , astfel încât joaca rolul de modulator al indicelui de refracție și, prin urmare, reprezintă *efectul Kerr optic*.

Rezultă că este convenabil să se separe cele două contribuții la aceste surse prin definirea sursei

$$S_q^0 = S_{q\Sigma}^0 + \left( \frac{\omega_q}{c} \right)^2 \Delta \chi_q \cdot E_q^0; \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad (6.64)$$

unde

$$S_{1\Sigma}^0 = 6\mu_0\omega_1^2\chi^{(3)}E_3^0E_4^0E_2^{0*} \quad (6.65 \text{ a})$$

$$S_{2\Sigma}^0 = 6\mu_0\omega_2^2\chi^{(3)}E_3^0E_4^0E_1^{0*} \quad (6.65 \text{ b})$$

$$S_{3\Sigma}^0 = 6\mu_0\omega_3^2\chi^{(3)}E_1^0E_2^0E_4^{0*} \quad (6.65 \text{ c})$$

$$S_{4\Sigma}^0 = 6\mu_0\omega_4^2\chi^{(3)}E_1^0E_2^0E_3^{0*} \quad (6.65 \text{ d})$$

și

$$\Delta \chi_q = 6 \frac{Z}{\epsilon_0} \chi^{(3)} (2I - I_q), \quad q = 1, 2, 3, 4. \quad (6.66)$$

În expresia (6.66) avem:  $I_q = \frac{|E_q^0|^2}{2Z}$ , care sunt intensitățile undelor;

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , care este intensitatea totală și  $Z$  este impedanța mediului.

Aceasta ne ajută să rescriem ecuațiile Helmholtz (6.61) sub forma:

$$(\nabla^2 + k_{q\Sigma}^2)E_q^0 = -S_{q\Sigma}^0; \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad (6.67)$$

unde

$$k_{q\Sigma} = n_{q\Sigma} \frac{\omega_q}{c} \quad (6.68)$$

și

$$n_{q\Sigma} = \left[ n^2 + \frac{6Z}{\epsilon_0} \chi^{(3)} (2I - I_q) \right]^{1/2} = n \left[ 1 + \frac{6Z}{\epsilon_0 n^2} \chi^{(3)} (2I - I_q) \right]^{1/2} \approx$$

$$\approx n \left[ 1 + \frac{3Z}{\epsilon_0 n^2} \chi^{(3)} (2I - I_q) \right], \quad (6.69)$$

din care se obține relația pentru *efectul Kerr optic*

$$n_{q\Sigma} \approx n + n_2 (2I - I_q) \quad (6.70)$$

unde

$$n_2 = \frac{3Z_0}{\epsilon_0 n^2} \chi^{(3)}, \quad (6.71)$$

care este identică cu (5.8).

Ecuația Helmholtz pentru fiecare undă este modificată în două moduri:

1°– Se consideră o sursă care reprezintă efectele combinate ale celorlalte trei unde. Aceasta poate conduce la amplificarea unei unde existente sau la emisia unei noi unde la frecvența aceea.

2°– Se consideră că indicele de refracție pentru fiecare undă este alterat, devenind o funcție de intensitățile celor patru unde.

Ecuațiile (6.67) și (6.65) conduc la patru ecuații diferențiale cuplate care pot fi rezolvate, ținând seama de condițiile la limită corespunzătoare.

### 6.2.2. Amestecul a patru unde degenerate

Acum se vor dezvolta și rezolva ecuațiile undelor cuplate în cazul degenerat pentru care toate cele patru unde au frecvențele  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$ . Ca și în §5.12, două dintre unde (undele 3 și 4), numite unde de pompaj, sunt unde plane care se propagă în direcții opuse, cu amplitudinile complexe:

$$E_3(\bar{r}) = A_3 \exp[-i\bar{k}_3 \bar{r}]$$

și

$$E_4(\bar{r}) = A_4 \exp[-i\bar{k}_4 \bar{r}] ,$$

iar vectorii de undă corespunzători sunt legați prin  $\bar{k}_4 = -\bar{k}_3$ . Intensitățile lor sunt presupuse mult mai mari decât aceleia ale undelor 1 și 2, încât ele sunt aproximativ independente de procesul de interacție, permitând să se presupună că amplitudinile lor complexe  $A_3$  și  $A_4$  sunt constante. Intensitatea totală a celor patru unde este atunci aproximativ constantă

$$I \approx \frac{|A_3|^2 + |A_4|^2}{2Z} .$$

Termenii  $2I - I_1$  și  $2I - I_2$ , care guvernează indicele de refracție  $n_{\Sigma}$  pentru undele 1 și 2 din (6.70) și (6.71), sunt aproximativ egali cu  $2I$  și, prin urmare, sunt, de asemenea, constanți, astfel încât efectul Kerr optic este echivalent cu o schimbare constantă a indicelui de refracție. Efectul lui va fi prin urmare ignorat.

Cu aceste presupuneri problema este redusă la o problemă a două unde cuplate, 1 și 2. Ecuațiile (6.67) și (6.65) conduc la

$$(\nabla^2 + k^2)E_1^0 = -\xi E_2^{0*} \quad (6.72 \text{ a})$$

$$(\nabla^2 + k^2)E_2^0 = -\xi E_1^{0*} \quad (6.72 \text{ b})$$

unde

$$\xi = 6\mu_0\omega^2\chi^{(3)}E_3^0E_4^0 = 6\mu_0\omega^2\chi^{(3)}A_3A_4 \quad (6.73)$$

și

$$k = \frac{n_{\Sigma}\omega}{c} ,$$

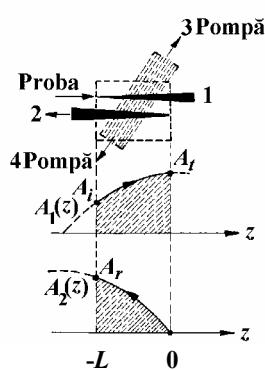
unde

$$n_{\Sigma} \approx n + 2n_2I$$

este o constantă.

Astfel, cele patru ecuații diferențiale cuplate neliniar au fost reduse la două ecuații cuplate liniare, fiecare dintre acestea având forma unei ecuații Helmholtz cu un termen sursă. Sursa pentru undă 1 este proporțională cu conjugata amplitudinii complexe a undei 2 și sursa pentru undă 2 este proporțională cu conjugata amplitudinii complexe a undei 1.

### 6.2.3. Conjugarea de fază<sup>(5),(6),(7)</sup>



**Fig. 6.6.**

Se presupune că undele 1 și 2 sunt, de asemenea, unde plane care se propagă în direcție opusă de-a lungul axei  $z$ , după cum se ilustrează în figura 6.6. În această figură se reprezintă amestecul a patru unde degenerate, undele 3 și 4 fiind unde de pompaj intense care se propagă în direcții opuse. Unda 1 (unda de probă) și unda 2 (unda conjugată) se propagă de asemenea în direcții opuse și au amplitudinile crescătoare.

Astfel, avem:

$$E_1 = A_1 \exp[-ikz] \quad (6.74 \text{ a})$$

și

$$E_2 = A_2 \exp[ikz]. \quad (6.74 \text{ b})$$

Presupunerea făcută este consistentă cu condiția de acord de fază, deoarece

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4. \quad (6.75)$$

Substituind expresia (6.74) în relațiile (6.72) și folosind *aproximația anvelopei lent variabile*, (6.74) va reduce ecuațiile (6.72) la două ecuații diferențiale de primul ordin:

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\gamma A_2^* \quad (6.76 \text{ a})$$

și

$$\frac{dA_2}{dz} = i\gamma A_1^*, \quad (6.76 \text{ b})$$

unde

$$\gamma = \frac{\xi}{2k} = \frac{3\omega Z_0}{n_{\Sigma}} \chi^{(3)} A_3 A_4 \quad (6.77)$$

este un coeficient de cuplaj.

Pentru simplificare, presupunem că  $A_3 A_4$  este real, încât  $\gamma$  este real. Soluția ecuațiilor (6.76) este dată, atunci, de două armonice  $A_1(z)$  și  $A_2(z)$  defazate cu  $90^\circ$ . Dacă mediul neliniar se extinde pe distanța dintre planele  $z = -L$  și  $z = 0$ , după cum este ilustrat în figura 6.6, unde 1 are amplitudinea  $A_1(-L) = A_i$  la planul de intrare și unde 2 are amplitudinea zero la planul de ieșire,  $A_2(0) = 0$ . Cu aceste condiții la limită, soluția ecuațiilor (6.76) este

$$A_1(z) = \frac{A_i}{\cos(\gamma L)} \cos(\gamma z) \quad (6.78 \text{ a})$$

și

<sup>(5)</sup> IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE - 25, no. 3, (1989)

<sup>(6)</sup> D.M. Pepper, Scientific American, **254** (1), 74 – 83, (1986)

<sup>(7)</sup> V.V. Shkunov, B.Ya. Zel'dovich, Scientific American, **253** (6), 54 – 59, (1985)

$$A_2(z) = i \frac{A_i^*}{\cos(\gamma L)} \sin(\gamma z) \quad (6.78 \text{ b})$$

Amplitudinea undei reflectate la pătrunderea în plan,  $A_r = A_2(-L)$ , este:

$$A_r = -iA_i^* \operatorname{tg}(\gamma L), \quad (6.79)$$

pe când amplitudinea undei transmise,  $A_t = A_t(0)$ , este

$$A_t = \frac{A_i}{\cos(\gamma L)}. \quad (6.80)$$

Ecuatiile (6.79) și (6.80) sugerează câteva aplicații:

– Unda reflectată este o versiune conjugată a undei incidente. Aparatul acționează ca un conjugător de fază (§5.1.1D).

– Intensitatea reflectată,  $\frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = \operatorname{tg}^2(\gamma L)$ , poate fi mai mică sau mai mare decât 1, corespunzând la atenuare și, respectiv la câștig. Mediul poate acționa, prin urmare, ca un *amplificator la reflexie* (o “*oglindă amplificator*”).

– Transmitanța,  $\frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{1}{\cos^2(\gamma L)}$ , este totdeauna mai mare decât 1, astfel încât mediul acționează întotdeauna ca un *amplificator al transmisiei*.

– Când  $\gamma L = \frac{\pi}{2}$ , sau un multiplu impar de  $\frac{\pi}{2}$ , reflectanța și transmitanța sunt infinite, indicând instabilitate. Aparatul este atunci un *oscilator*.