ANEXA A IV-A

ECUAȚIA LUI SCHRÖDINGER NELINIARĂ

Se consideră un mediu în care:

$$\rho = 0, \quad \overline{J} = \overline{0} \qquad \text{(IV.1)}$$

ecuațiile lui Maxwell având forma:

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}; \qquad \text{(IV.2 a)}$$

$$\nabla \times \overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}; \qquad \text{(IV.2 b)}$$

$$\nabla \overline{D} = 0; \qquad \text{(IV.2 c)}$$

$$\nabla \overline{B} = 0, \qquad \text{(IV.2 d)}$$

iar relațiile constitutive fiind

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \qquad \text{(IV.3)}$$

și

$$\overline{B} = \mu_0 \left(\overline{H} + \overline{M}\right) = \mu_0 \overline{H}, \text{ deoarece } \overline{M} = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Aplicând divergența ecuației (IV.3), rezultă:

$$\varepsilon_0 \nabla \overline{E} + \nabla \overline{P} = 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

Transformând ecuația (IV.2a), ținând seama de (IV.4) și aplicându-i rotorul, avem:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overline{E}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \overline{H}\right). \qquad \text{(IV.6)}$$

Ținând seama de ecuațiile (IV.2 b) și (IV.3), în urma calculelor, ecuația (IV.6) devine:

$$\Delta \overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla \overline{P}\right) - \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial t^2} = 0. \qquad \text{(IV.7)}$$

Dacă mediul este polarizat permanent, densitatea sarcinii de polarizare este: $\rho_p = -\nabla \overline{P}^{(0)}$.

Considerând că α, β și γ se aliniază după axele x, y și z, iar mediul este neliniar, expresia generală a polarizației electrice va fi:

$$P_\alpha(\bar{r},t) = P_\alpha^{(0)} + \sum_\beta \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial E_\beta}\right)_0 E_\beta + \frac{1}{2!}\sum_{\beta,\gamma}\left(\frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma}\right)_0 E_\beta E_\gamma + \\ + \frac{1}{3!}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\left(\frac{\partial^3 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma \partial E_\delta}\right)_0 E_\beta E_\gamma E_\delta + \ldots \tag{IV.8}$$

sau (pentru $P_\alpha^{(0)} = 0$)

$$P_\alpha(\bar{r},t) = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta(\bar{r},t) + \sum_{\beta,\gamma}\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta(\bar{r},t) E_\gamma(\bar{r},t) + \\ + \sum_{\beta,\gamma,\delta}\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_\beta(\bar{r},t) E_\gamma(\bar{r},t) E_\delta(\bar{r},t) + \ldots \tag{IV.9}$$

Expresia (IV.9) se poate scrie sub forma:

$$P_\alpha(\bar{r},t) = P_\alpha^{(L)}(\bar{r},t) + P_\alpha^{(NL)}(\bar{r},t), \tag{IV.10}$$

unde *polarizația liniară* are forma

$$P_\alpha^{(L)}(\bar{r},t) = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta(\bar{r},t) \tag{IV.11}$$

și *polarizația neliniară*

$$P_\alpha^{NL}(\bar{r},t) = \sum_{\beta,\gamma}\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta(\bar{r},t) E_\gamma(\bar{r},t) + \sum_{\beta,\gamma,\delta}\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_\beta(\bar{r},t) E_\gamma(\bar{r},t) E_\delta(\bar{r},t) + \ldots \tag{IV.12}$$

Deoarece:

$$\nabla\overline{D} = \varepsilon_0 \nabla\overline{E} + \nabla\overline{P},$$

avem:

$$\Delta\overline{E} - \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\overline{D}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla\overline{P}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial t^2} = 0,$$

ecuația (IV.7) transformându-se în:

$$\Delta\overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla(\nabla P) - \mu_0 \frac{\partial^2\left(\overline{P}^{(L)} + \overline{P}^{(NL)}\right)}{\partial t^2} = 0 \tag{IV.13}$$

Mai departe avem:

$$\nabla\cdot\nabla\overline{E} - \Delta\overline{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{D} + \overline{P}^{(NL)}\right)\right]$$

și

$$-\Delta\overline{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{P}^{(NL)}}{\partial t^2},$$

ajungându-se la ecuația:

$$\Delta\overline{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{P}^{(NL)}}{\partial t^2} \tag{IV.14 a}$$

Considerându-se propagarea după direcția Oz, avem:

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{P}^{(NL)}(z,t), \tag{IV.14 b}$$

ecuație care devine:

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2}=-\frac{3\omega^2\overline{\chi}^{(3)}}{\varepsilon_0 c^2}\left|E_\omega(z,t)\right|^2\left|E_\omega(z,t)\right|\exp[ikz]\exp[-i\omega t] \qquad \text{(IV.15)}$$

unde s-a introdus:

$$\begin{aligned}\overline{P}^{(NL)}(z,t)=\overline{\chi}^{(3)}\Big\{&E_\omega^{(3)}(z,t)\exp[i3kz]\exp[-i3\omega t]+\\ &+3\left|E(z,t)\right|^2 E_\omega(z,t)\exp[ikz]\exp[-i\omega t]+\ldots\Big\}\end{aligned} \qquad \text{(IV.16)}$$

Calculând pe

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=-\left[k^2 E_\omega-2ik\frac{\partial E_\omega}{\partial z}\right]\exp[ikz]\exp[-i\omega t]$$

și pe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 D}{\partial z^2}=-\Bigg[&\omega^2\varepsilon E_\omega+2i\omega\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\omega\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\right)\frac{\partial E_\omega}{\partial t}+\left(\varepsilon+2\omega\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial t^2}\Bigg]\exp[ikz]\exp[-i\omega t],\end{aligned}$$

unda s-a presupus

$$D(z,t)=\exp[ikz]\int\varepsilon(t-t')E_\omega(z,t')\exp[-i\omega t']\,dt' ,$$

și, mai departe, folosind următoarele relații și notații

$$k^2(\omega)=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega);$$

$$\lambda=\frac{6\pi\omega v_p\overline{\chi}^{(3)}}{c^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)=-\frac{1}{v_g^2}\frac{\partial v_g}{\partial\omega}=-\sigma\mu ,$$

unde pentru $\sigma=+1$, avem $\frac{\partial v_g}{\partial\omega}>0$ și pentru $\sigma=-1$, avem $\frac{\partial v_g}{\partial\omega}<0$, ecuația (IV.15) se transformă în

$$-\frac{1}{2}\sigma\mu\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial t^2}-\lambda\left|E_\omega\right|^2 E_\omega=i\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_\omega . \qquad \text{(IV.17)}$$

Introducând în (IV.17) notațiile:

$$\tau=t-\frac{1}{v_g}z \ \text{ și } \ \xi=z ,$$

se obține *ecuația lui Schrödinger neliniară*:

$$-\frac{1}{2}\sigma\mu\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial\tau^2}-\lambda\left|E_\omega\right|^2=i\frac{\partial E_\omega}{\partial\xi} . \qquad \text{(IV.18)}$$

Pentru $\lambda=0$, se obține o ecuație asemănătoare formal cu ecuația lui Schrödinger din cazul particulei libere cuantice:

$$-\frac{1}{2}\sigma\mu\frac{\partial^2 E_\omega}{\partial\tau^2} = -i\frac{\partial E_\omega}{\partial\xi} \tag{IV.19}$$

În cele ce urmează se dă soluția ecuația (IV.18) pentru $\overline{\chi}^{(3)} > 0$, deci, $\lambda > 0$, $\frac{\partial v_g}{\partial\omega} > 0$ și $\sigma = +1$. Se introduc notațiile:

$$E_\omega = \frac{u}{\sqrt{\lambda}} \text{ și } \tau = \sqrt{\mu}\, y,$$

ecuația (IV.18) luând forma:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - |u|^2 u = i\frac{\partial u}{\partial\xi}. \tag{IV.20}$$

Se consideră soluția de forma:

$u(y,\xi) = \Phi(y)\exp[ik\xi]$,

care introdusă în (IV.20) o transformă în:

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2} + k\Phi - \Phi^3 = 0. \tag{IV.21}$$

Deoarece,

$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y} \to 0$, când $y \to \pm\infty$ avem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}\right)^2 - \frac{1}{2}k\Phi^2 + \frac{1}{4}\Phi^4\right] = 0$$

și

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}\right)^2 = \Phi^2\left(2k - \Phi^2\right)$$

sau

$$\int\frac{\mathrm{d}\Phi}{\Phi\left(2k\text{-}\Phi^2\right)^{1/2}} = \pm y.$$

Rezultă:

$$\Phi(y) = \frac{\sqrt{2k}}{\cosh\left(\sqrt{2k}\,y\right)}. \tag{IV.22}$$

Astfel, avem o stabilitate, un puls localizat, adică, o soluție care este, de fapt, soluție a ecuației Schrödinger neliniare

$$u(y,\xi) = \frac{\sqrt{2k}}{\cosh\left(\sqrt{2k}\,y\right)}\exp[ik\xi] \tag{IV.23a}$$

și

$$E_\omega(z,t) = c\left(\frac{k}{3\pi\omega v_p\overline{\chi}^3}\right)^{1/2}\frac{\exp[ikz]}{\cosh\left[\frac{1}{v_g}\left(\frac{2k}{\mu}\right)^{1/2}\left(z - v_g t\right)\right]}. \tag{IV.23b}$$

Deoarece:

$$u(y,\xi) = \exp\left[i\lambda y - \frac{i}{2}\lambda^2\xi\right]u_0(y - \lambda\xi,\ \xi) \tag{IV.24}$$

și

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_g}\right), \tag{IV.25}$$

rezultă:

$$E_\omega(z) = c\left(\frac{k}{3\pi\omega v_p\overline{\chi}^3}\right)^{1/2} \frac{\exp\left[i\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_g}\right)\frac{t}{\mu} + i\left\{k + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{v^2}\right)\right\}z\right]}{\cosh\left[\frac{1}{v_g}\left(\frac{2k}{\mu}\right)^{1/2}(z - vt)\right]} \tag{IV.26}$$