

# ANEXA A III-A.

## FORMALISMUL COMPLEX, DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A CÂMPURILOR

Se convine ca un câmp electric de forma

$$E(t) = |E^0| \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.1})$$

să fie reprezentat prin

$$E(t) = \text{Re}\{ |E^0| \exp[i\omega t] \} = |E^0| \exp[i\omega t] + |E^{0*}| \exp[-i\omega t], \quad (\text{III.2})$$

unde

$$E(t) = |E^0| \exp[i\varphi] \quad (\text{III.3})$$

Într-adevăr, pentru calculele ulterioare este mai simplu ca adesea să se scrie

$$E(t) = E^0 \exp[i\omega t] \quad (\text{III.4})$$

în loc de (III.1).

Acest lucru nu este strict corect, dar trebuie să avem în gând că partea reală a acestei expresii este ceea ce ne interesează deoarece ea are sens fizic. Această reprezentare complexă nu prezintă nici o problemă atâta timp cât sunt implicate operații matematice liniare (combinări liniare, transformata Fourier etc....). În același timp, însă, suntem în situația ca uneori să calculăm mărimi fizice care depind de o putere mai ridicată a câmpurilor. Aceste cazuri necesită o mai mare atenție.

Deoarece ecuațiile lui Maxwell:

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0; \quad (\text{III.5 a})$$

$$\nabla \times \bar{E} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J}; \quad (\text{III.5 b})$$

$$\nabla \bar{D} = \rho; \quad (\text{III.5 c})$$

$$\nabla \bar{B} = 0, \quad (\text{III.5 d})$$

și relațiile constitutive

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}; \quad (\text{III.6 a})$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 \bar{H} + \bar{M} \quad (\text{III.6 b})$$

sunt liniare în câmpuri<sup>(1)</sup>, li se poate aplica principiul suprapunerii la soluțiile sale. În particular, se poate descrie radiația policromatică ca o combinație liniară de componente spectrale. Aceasta poate să conțină mai multe componente spectrale de tipul (III.1):

$$E(t) = \sum_k |E_k^0| \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (\text{III.7})$$

unde, în cazul general, ea poate să conțină un continuum de componente spectrale caracterizate prin amplitudinile  $|E^0(\omega)|$  și fazele lor  $\varphi(\omega)$ :

$$E(t) = \int_0^\infty |E^0(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \quad (\text{III.8})$$

Atunci, se poate adopta formalismul funcțiilor complexe, tot ca pentru ecuația (III.4):

$$E(t) = \int_0^\infty E^0(\omega) \exp[i\omega t] d\omega, \quad (\text{III.9})$$

unde

$$E^0(\omega) = |E^0(\omega)| \exp[i\varphi(\omega)]. \quad (\text{III.10})$$

Se înțelege că partea reală a lui  $E(t)$  este aceea care are un sens fizic. Atunci, se pot scrie ecuațiile lui Maxwell – în mod separat – pentru toate componentele spectrale de pulsație  $\omega$ :

$$\nabla \times \bar{E} + i\omega \bar{B} = 0; \quad (\text{III.11 a})$$

$$\nabla \times \bar{H} - i\omega \bar{D} = \bar{J}; \quad (\text{III.11 b})$$

$$\nabla \bar{D} = \rho; \quad (\text{III.11 c})$$

$$\nabla \bar{B} = 0 \quad (\text{III.11 d})$$

și, după ce sunt rezolvate, se aplică expresia (III.9) pentru a găsi soluțiile policromatice.

Exemplele cele mai frecvente utilizează mărimi care depind sub o formă neliniară de vectorii câmpului ca densitate de energie electromagnetică și vectorul lui Poynting, care sunt funcții pătratice de vectorii de câmp. Astfel, este vorba de mărimi importante, deoarece acestea sunt direct măsurabile. Mai exact, detectorii de lumină nu sunt suficient de rapizi pentru a putea urmări oscilațiile la frecvențele optice ( $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ) și nu pot să măsoare decât valori medii pe un număr mare de perioade ale undei. Valoarea medie pentru un produs de două funcții armonice se scrie:

$$\begin{aligned} \langle E_1(t) E_2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T |E_1^0| \cos(\omega t + \varphi_1) |E_2^0| \cos(\omega t + \varphi_2) dt = \\ &= \frac{1}{2} |E_1^0 E_2^0| \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

---

<sup>(1)</sup> Este de notat că materialele neliniare au  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{E}, \bar{H})$  și, în consecință, sistemul de ecuații Maxwell trebuie să fie neliniar. Atunci, principiul de suprapunere nu va fi valabil.

unde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  este perioada semnalului. Introducând amplitudinile complexe  $E_1^0$  și  $E_2^0$  sub o formă analoagă cu relația (III.2), se poate scrie:

$$\langle E_1(t)E_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_1^0 E_2^{0*} \}. \quad (\text{III.13})$$

În consecință, valorile medii ale vectorului lui Poynting și ale densității de energie se scriu în formalismul complex:

$$\langle \bar{S}_p \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \bar{E} \times \bar{H}^* \}. \quad (\text{III.14})$$

și, respectiv

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{ \bar{E} D^* \times \bar{B} H^* \}. \quad (\text{III.15})$$