CURS 9

9.1 REGIMUL VARIABIL

Deosebirea esenţială între regimul variabil şi regimurile static şi staţionar este că în cazul regimului variabil mărimile caracteristice vor fi funcţii atât de punctul în care se calculează cât şi de timp, fiind descrise aşadar de ***legi de stare*** şi de ***legi de evoluţie*** exprimate fie sub ***formă locală*** fie sub **formă *globală***.Amintim ***legile de stare*** deduse până acum:

1. *Legea* (*teorema*) *lui Gauss*
   - Forma locală (diferenţială): $div.\vec{D} = \rho$.
   - Forma integrală: $\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q$.
2. *Relaţia între inducţia electrică* $\vec{D}$*, intensitatea câmpului electric* $\vec{E}$ *şi polarizaţia totală* $\vec{P}$ *în câmpul electric:* $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.
3. *Legea polarizaţiei electrice temporare:* $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ şi $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$
4. *Legea lui Ohm*
   - Forma locală: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$.
   - Forma integrală: $U_{12} = R_{12} I$.
5. *Legea fluxului magnetic:*

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \text{- forma locală, şi}$$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \quad \text{- forma integrală}$$

6. *Legea dependenţei între inducţia magnetică* $\vec{B}$*, intensitatea câmpului magnetic* $\vec{H}$ *şi magnetizaţia totală* $\vec{M}$ *în câmp magnetic.*

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

7. *Legea magnetizaţiei temporare:*

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H})$$

Legile de evoluţie ale câmpului electromagnetic se obţin ca şi legile de stare prin generaliza - rea unui mare număr de fapte experimentale.

9.1.1 LEGILE DE EVOLUŢIE PENTRU CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

♦ O astfel de lege am stabilit-o deja prin ecuaţia (8.12) care exprimă *continuitatea sarcinii electrice.*

♦ O altă lege rezultă din observarea faptului că un flux magnetic variabil generează tensiune electromotoare indusă, fenomen cunoscut sub numele de ***inducţie electromagnetică****:*

Mişcarea unui conductor într-un câmp magnetic generează la capetele conductorului o diferenţă de potenţial datorată deplasărilor electronilor sub acţiunea forţei Lorentz***. Câmpul electric imprimat*** produs de forţa Lorentz este dat de relaţia:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad (9.1)$$

*Tensiunea electromotoare indusă d*E *într-o porţiune dl a conductorului*, va fi:

$$d\mathrm{E} = \vec{E}_i\, d\vec{\ell} = (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{\ell} \qquad (9.2)$$

Pe conductorul întreg , tensiunea indusă E va fi:

$$\mathrm{E} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{\ell} \tag{9.3}$$

unde $\vec{\ell}$ reprezintă vectorul asociat lungimii conductorului, iar $\vec{B}$ este inducţia magnetică a câmpului magnetic presupus omogen. Se observă că:

$$d\mathrm{E}\; dt = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{\ell}\; dt = \left(\vec{v}\, dt \times \vec{B}\right) d\vec{\ell} = -\vec{B}\left(\vec{v}\, dt \times d\vec{\ell}\right) = -\vec{B}\, d\vec{S} \tag{9.4}$$

În această relaţie $d\vec{S}$ reprezintă elementul de arie orientat al unei suprafeţe străbătută de fluxul magnetic elementar $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ şi măturată de conductor în timpul *dt.* Rezultă,

$$d\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.5}$$

Concluzia ce se desprinde din această relaţie este evidentă: *"variaţia fluxului magnetic printr-o secţiune S a unui conductor generează o tensiune electromotoare* E*"*.

Se defineşte ***fluxul inducţiei magnetice*** Φ prin relaţia:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \tag{9.6}$$

Această relaţie confirmă constatările lui ***Faraday*** că *variaţia câmpului şi mişcarea conducto - rului în câmp, induc tensiune. Sensul tensiunii induse este astfel încât fluxul magnetic al curentului indus să compenseze variaţia fluxului inductor.*

Relaţiile anterioare, conduc la:

$$\mathrm{E} = \oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S} \tag{9.7}$$

sau considerând *curba Γ şi suprafaţa S invariabile în timp*,

$$\oint_\Gamma \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{S} \tag{9.8}$$

din care rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9.9}$$

Relaţia obţinută ***exprimă forma locală a legii inducţiei electromagnetice pentru medii în repaus,*** cunoscută ca ***ecuaţia Maxwell – Faraday*** şi care generează ***unul din postulatele fundamentale ale electromagnetismului:*** *"orice variaţie de câmp magnetic într-o regiune în spaţiu determină apariţia unui câmp electric "**rotaţional**"* $\left(\nabla \times \vec{E} \neq 0\right)$.

♦ O altă lege de evoluţie are la bază observaţia că *relaţia* $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ *nu este aplicabilă în cazul câmpului variabil întrucât devine incompatibilă cu conservarea sarcinii.* Impasul a fost depăşit de Maxwell care a introdus noţiunea de ***curent de deplasare*** $\vec{j}_d$ şi a corectat relaţia (8.47) la forma:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_d \tag{9.10}$$

Această relaţie *concordă cu continuitatea sarcinii electrice.*

Într-adevăr, ţinând seama că, $\nabla\left(\nabla \times \vec{H}\right) = 0$ se ajunge la

$$\nabla \vec{j}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.11}$$

şi întrucât $\nabla \vec{D} = \rho$, rezultă $\nabla \vec{j_d} = \nabla \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Deducem din aceasta că $\vec{j_d}$ *coincide cu* $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ *până la un vector arbitrar* $\vec{f}$ *de divergenţă nulă.*

$$\overrightarrow{j_d} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{f} \quad , \quad \nabla \vec{f} = 0 \qquad (9.12)$$

Experimental se constată că $\vec{f} = 0$ şi se obţine:

$$\overrightarrow{j_d} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (9.13)$$

Astfel, ecuaţia (9.10) se scrie sub forma cunoscută ca ***ecuaţia Maxwell – Ampére***, o ecuaţie *locală* ce arată că *un câmp electric variabil, generează un câmp magnetic cu liniile de câmp închise*. Notând cu $\vec{j_t}$ *densitatea totală de curent*,

$$\vec{j_t} \equiv \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (9.14)$$

şi aplicând divergenţa relaţiei (9.10) se obţine $\nabla \vec{j_t} = 0$.

Faptul că - aşa cum se observă şi din relaţiile (9.10) şi (9.13) - *variaţia* $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ *induce câmp magnetic*, pune în evidenţă *un fenomen reciproc inducţiei electromagnetice* numit ***inducţie magnetoelectrică***. Această interdependenţă a câmpurilor magnetic şi electric în regim variabil justifică noţiunea de ***câmp electromagnetic***.

Ţinând seama că $I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$ şi $I_d = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ se obţine

$$\oint_\Gamma \vec{H} d\vec{\ell} = I_t = I + I_d = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (9.15)$$

relaţie compatibilă cu cele scrise anterior.Ecuaţia (9.15) exprimă ***legea circuitului magnetic***.

9.1.2 ECUAŢIILE LUI *MAXWELL*

Recapitulăm principalele ecuaţii obţinute până acum presupuse şi confirmate ca valabile pen - tru regimul variabil şi pe care le vom folosi sub denumirea de ***ecuaţiile lui Maxwell***.

❑ Scrise ***sub formă locală*** acestea sunt:

$$\textbf{I.}\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \textbf{II.}\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \textbf{III.}\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \textbf{IV.}\ \nabla \vec{D} = \rho \qquad (9.16)$$

Ecuaţiile (9.16) descriu câmpul electromagnetic în sisteme de referinţă fixe, în raport cu domeniul de distribuţie al surselor de câmp, adică punctul curent în care sunt scrise este fix în raport cu domeniul în care sunt distribuite sarcinile şi curenţii. Ele însă *trebuiesc complectate cu **ecuaţiile de material** care în cazul unui mediu liniar, omogen, izotrop şi fără memorie, se scriu*:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \ ; \ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \ ; \ \vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (9.17)$$

Trebuie precizat că *ecuaţiile* (9.16) *şi* (9.17) *sunt valabile în următoarele condiţii*:

a) corpurile materiale aflate în câmpul electromagnetic se află în repaus.

b) mărimile $\varepsilon_r, \mu_r, \sigma$ ce caracterizează proprietăţile de material ale mediului nu depind de timp şi nici de intensitatea câmpurilor.

c) *în câmpurile studiate, nu se află magneţi permanenţi şi substanţe feromagnetice.*

Ecuaţiile lui Maxwell (9.16) *nu sunt toate independente*. Astfel *ecuaţiile* I şi III *nu sunt independente*: din identitatea $\nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$ rezultă că ecuaţia III joacă rolul *unei condiţii supli-*

mentare pentru ecuaţia I. De asemenea, *nici ecuaţiile* II şi IV *nu sunt independente*. Dacă aplicăm divergenţa ecuaţiei II se impune ecuaţia IV, pentru a obţine ecuaţia de continuitate. *Deci pot fi considerate independente numai ecuaţiile* I,II *şi ecuaţiile de material* (9.17) valabile pentru mediul ideal considerat.

Ţinând seama de ecuaţiile de material, ecuaţiile I şi II se pot scrie:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{9.18}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{9.19}$$

❑ ***Sub formă globală*** ecuaţiile lui Maxwell, se scriu:

$$\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}\,;\; \oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}\,;\; \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0\,;\; \int_S \vec{D}\, d\vec{S} = q\,. \tag{9.20}$$

Problema fundamentală a electromagnetismului presupune integrarea sistemului de ecuaţii Maxwell (9.16) *pentru determinarea vectorilor* $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$. Soluţia va fi unică dacă se cunosc *condiţiile iniţiale* pentru vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{B}$ precum şi *condiţiile la limită* implicând ***salturile*** componentelor *tangenţială* şi *normală* la intensităţile câmpurilor electric şi magnetic la suprafaţa de separare a două medii.

9.1.3 ENERGIA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC. VECTORUL *POYNTING*

Vom demonstra *conservarea energiei câmpului electromagnetic* în două ipoteze:

- *Într-un domeniu de volum V, fluxul de energie electromagnetică se propagă cu viteză finită.*
- Proprietăţile electrice ale unui mediu exprimate prin ε şi σ şi cele magnetice exprimate prin μ, nu depind de $\vec{E}$ şi $\vec{B}$.

Să considerăm un mediu *liniar, omogen şi izotrop* pentru care vom avea:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \text{ şi } \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \tag{9.21}$$

Cu aceste relaţii, ecuaţiile lui Maxwell, devin:

$$\textbf{I. } \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \;;\; \textbf{II. } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;;\; \textbf{III. } \nabla\vec{B} = 0 \;;\; \textbf{IV. } \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{9.22}$$

Înmulţind scalar cu $\vec{E}$ prima ecuaţie, cu $\vec{B}$ a doua ecuaţie şi scăzându-le obţinem:

$$\vec{E}\left(\nabla \times \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\nabla \times \vec{E}\right) = \mu \vec{E}\vec{j} + \varepsilon\mu \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9.23}$$

sau

$$\vec{E}\left(\nabla \times \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\nabla \times \vec{E}\right) = \mu \vec{j}\vec{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu \vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) \tag{9.24}$$

Deoarece $\nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\left(\nabla \times \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$ relaţia (9.24) devine:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right) = \vec{j}\vec{E} + \nabla \frac{1}{\mu}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{9.25}$$

care integrată pe domeniul de volum V, conduce la:

$$-\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right) dV = \int_V \vec{j}\vec{E}\, dV + \int_V \nabla \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) dV \qquad (9.26)$$

Cum $\vec{j}\, dV = \frac{dI}{dS} dV\, \vec{n} = dI \cdot d\vec{l}$ este un element de linie de curent *orientat* rezultă

$$\int_V \vec{j}\vec{E} d V = \int_S dI \int_\Gamma \vec{E} d\vec{\ell} = I E = \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad (9.27)$$

În (9.21), $dQ = I\,E\,dt$ este *căldura degajată în timpul dt* ***prin efect Joule***. Introducem notaţiile:

- W_{em} pentru *energia câmpului electromagnetic*

$$W_{em} = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right) d V \qquad (9.28)$$

- $w_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)$ pentru *densitatea de energie a câmpului electromagnetic.*

- $\vec{Y} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$ pentru ***vectorul*** **Poynting**.

Rezultă

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \int_V \nabla \vec{Y} d V \qquad (9.29)$$

Conform teoremei Gauss – Ostrogradski, $\int_V \nabla \vec{Y} dV = \int_S \vec{Y} d\vec{S}$ sau

$$\int_V \nabla \vec{Y} dV = \int_S \vec{Y}\vec{n} dS = \Phi_Q \qquad (9.30)$$

unde $\vec{n}$ este *versorul normalei elementului de suprafaţă dS de pe suprafaţa S care înconjoară volumul V*, iar Φ_Q este *fluxul total al vectorului* $\vec{Y}$ *prin suprafaţa S.* Se obţine astfel ***teorema conservării energiei electromagnetice:*** *"scăderea energiei electromagnetice este egală cu suma între căldura dezvoltată prin efect Joule şi fluxul de energie electromagnetică ce străbate suprafaţa S".* Matematic, exprimăm aceasta prin ecuaţia:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \Phi_Q \qquad (9.31)$$

EXTINDERI TEORETICE COMPLEMENTARE (4-2)

ELECTROMAGNETISM ÎN REGIM STAŢIONAR

Ec.1: ECUAŢIILE DE TRECERE LA LIMITA DE SEPARAŢIE A DOUĂ MEDII DIFERITE

Consideraţiile de până acum au vizat un singur mediu material care ocupă întreg spaţiul în care se manifestă câmpul electromagnetic. *La suprafaţa de separaţie dintre două medii 1 şi 2 cu caracteristici electromagnetice diferite concretizate în constantele* ε, μ *şi* σ, au loc ***discontinuităţi***, *adică modificări ale vectorilor care definesc câmpul electromagnetic.*

În vecinătatea unui punct, suprafaţa de separaţie este aproximativ plană, confundându-se cu planul tangent în procesul de trecere la limită al ariei către zero. De aceea fără a afecta generalitatea relaţiilor, *vom considera suprafaţa de separaţie plană, iar normala* $\vec{n}$ *orientată dinspre mediul 1 spre mediul 2.*

a) *Ecuaţia de trecere pentru vectorul* $\vec{D}$**.**

Presupunem în figura 4-2.1 *a* o suprafaţă cilindrică închisă *S*, de înălţime *h*, cu bazele paralele cu planul de separaţie Σ, care în procesul de trecere la limită (*h* → 0) se menţin de o parte şi de alta a planului de separaţie. Ariile bazelor sunt $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$.

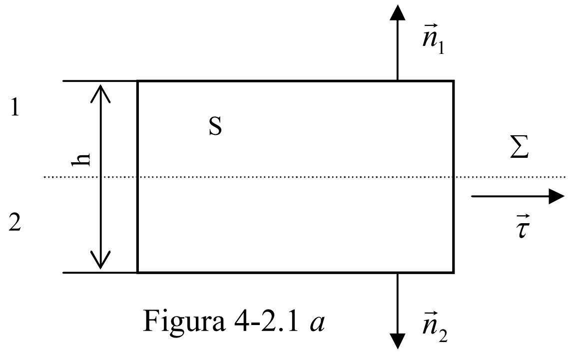


Figura 4-2.1 *a*

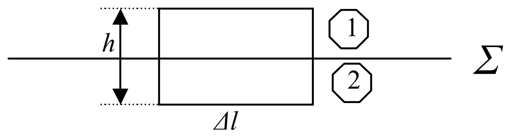


Figura 4-2.1 *b*

Considerăm că pe planul de separaţie există o distribuţie superficială a sarcinii σ. Conform teoremei lui Gauss,

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q \qquad (4\text{-}2.1.1)$$

În acelaş timp, *în măsura în care* ΔS *este suficient de mic pentru ca* $\vec{D_1}$ *şi* $\vec{D_2}$ *să poată fi consideraţi constanţi,*

$$\lim_{h\to 0} \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \lim_{h\to 0} \left(\vec{D_1}\,\vec{n_1}\,\Delta S_1 + \vec{D_2}\,\vec{n_2}\,\Delta S_2 + \Phi_{12}\right) = \left(\vec{D_1}\,\vec{n_1} + \vec{D_2}\,\vec{n_2}\right)\Delta S \qquad (4\text{-}2.1.2)$$

unde Φ_{12} este *fluxul prin suprafaţa laterală*. Cum însă,

$$\lim_{h\to 0} q = \sigma \Delta S \qquad (4\text{-}2.1.3)$$

rezultă $\vec{D_1}\,\vec{n_1} + \vec{D_2}\,\vec{n_2} = \sigma$ sau ţinând seama că $-\vec{n_1} = \vec{n_2} = \vec{n}$, rezultă încă

$$\left(D_2 - D_1\right)\vec{n} = \sigma \qquad (4\text{-}2.1.4)$$

relaţie care exprimă *discontinuitatea componentei normale a lui* $\vec{D}$ *la traversarea unei suprafeţe de separaţie pe care există o distribuţie superficială de sarcină* σ. *Dacă însă* $\sigma = 0$, *atunci componenta normală este continuă* $\vec{D}_{n_1} = \vec{D}_{n_2}$.

b) *Ecuaţia de trecere pentru vectorul inducţie magnetică* $\vec{B}$.

Rezultă din condiţia

$$\oint_S \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0 \qquad (4\text{-}2.1.5)$$

care printr-un raţionament analog conduce la:

$$\int_S \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\vec{n}\, d\vec{S} = 0 \qquad (4\text{-}2.1.6)$$

relaţie care exprimă *continuitatea componentei normale a inducţiei magnetice.*

c) *Ecuaţia de trecere pentru vectorul câmp magnetic* $\vec{H}$.

Considerăm un contur Γ de forma unui dreptunghi al cărui plan este perpendicular pe planul de separaţie a celor două medii.Două dintre laturile sale sunt paralele cu planul de separaţie Σ, au lungimile $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell$, se dispun de o parte şi de alta a acestuia iar în procesul de trecere la limită $h \to 0$,tind să se suprapună.Considerăm că pe suprafaţa de separaţie Σ există o distribuţie superficială de curenţi $\overrightarrow{j_\Sigma}$ .Integrăm (9.15)

$$\oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (4\text{-}2.1.7)$$

Observăm că intensitatea curentului de deplasare este nulă. Într-adevăr,

$$\lim_{h \to 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \lim_{h \to 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} h \Delta\ell \vec{n}' = 0 \qquad (4\text{-}2.1.8)$$

în care $\vec{n}' = \vec{\tau} \times \vec{n}$ este versorul normalei la suprafaţa $S = h\Delta l$ a dreptunghiului considerat.

Se constată că $I = \overrightarrow{j_\Sigma}\, \Delta\ell\, \vec{n}$ iar

$$\lim_{h \to 0} \oint_\Gamma \vec{H} d\vec{\ell} = \lim\left(\vec{H}_1\, \Delta\vec{\ell}_1 + \vec{H}_2 \Delta\vec{\ell}_2 + T_{12}\right) = \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\vec{\tau} d\ell \qquad (4\text{-}2.1.9)$$

unde T_{12} este circulaţia vectorului $\vec{H}$, pe laturile care tind spre zero; rezultă deci

$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\vec{\tau} = \overrightarrow{j_\Sigma}\, \vec{n}' \qquad (4\text{-}2.1.10)$$

unde $\overrightarrow{j_\Sigma}$ *este densitatea de curent pe suprafaţa* Σ care separă cele două medii.

Relaţia (10-1-10) exprimă *discontinuitatea componentei tangenţiale a vectorului magnetic* $\vec{H}$ când $\overrightarrow{j_\Sigma} \neq 0$.

d) *Ecuaţia de trecere pentru vectorul intensitate câmp electric* $\vec{E}$.

Se porneşte de la relaţia

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV \qquad (4\text{-}2.1.11)$$

observându-se că circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe conturul Γ din figura 10-1-1

$$\lim_{h \to 0} \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \lim_{h \to 0}\left(E_{\tau_1} \Delta l - E_{\tau_2} \Delta l + T'_{12}\right) = \left(E_{\tau_1} - E_{\tau_2}\right)\Delta l$$

S-a notat cu T'_{12} circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe laturile care tind spre zero. În aceste condiţii,

$$\lim_{h \to 0} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS = 0$$

astfel că se obţine $E_{\tau_1} - E_{\tau_2} = \vec{\tau}\left(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{E}_{\tau_1} = \vec{E}_{\tau_2}$, relaţie ce exprimă continuitatea *componentei tangenţiale a vectorului electric,* $\vec{E}$.

Ec.2. POSTULATELE ELECTRODINAMICII MAXWELLIENE

Ecuaţiile I şi II conţinute în sistemul de ecuaţii (9.16) şi cunoscute sub denumirea de ***"ecua - ţiile lui Maxwell"*** sunt ecuaţii *punctuale* în sensul că *punctul din spaţiu în care sunt scrise este fix în raport cu domeniul în care sunt distribuite sarcinile şi curenţii.*

Sistemul de ecuaţii (9.16) sau echivalentul integral al acestuia ,ecuaţiile de trecere, ecuaţiile de material (9.17) legile de conservare ale energiei şi impulsului, legile Ohm şi Faraday, presupun construcţia unui set de propoziţii fundamentale în baza cărora să se dezvolte electrodinamica maxwelliană. Aceste ***postulate*** determină local, *în regim variabil şi în medii oarecare*, structura câmpului electromagnetic, relaţiile dintre acest câmp şi starea locală a corpurilor macroscopice în repaus, precum şi interacţiunile dintre câmp şi aceste corpuri.

Starea locală a câmpului electromagnetic este definită de vectorii $\vec{D}, \vec{H}, \vec{E}$ *şi* $\vec{B}$ iar *starea corpurilor* este descrisă local de mărimea scalară ρ şi de mărimile vectoriale $\vec{P}$ *şi* $\vec{M}$. Uneori, în locul magnetizaţiei $\vec{M}$ se foloseşte mărimea

$$\vec{\mathcal{P}} = \mu_0 \vec{M} \tag{4-2.2.1}$$

numită ***polarizare magnetică***, astfel că relaţia (9.70) devine

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{\mathcal{P}} \tag{4-2.2.2}$$

Aşadar, *la baza electrodinamicii maxwelliene stau trei grupuri de* ***postulate***:

* ***primul grup de postulate*** exprimă relaţiile între vectorii $\vec{D}$ *şi* $\vec{H}$ şi densităţile sarcinilor şi curenţilor, adică relaţiile I şi IV ale sistemului (9.16), respectiv:

a. vârtejurile câmpului magnetic, sunt determinate local de densitatea $\vec{j}$ *a curentului de conducţie şi de variaţia în timp a inducţiei electrice* (relaţia I a sistemului (9.16));

b. sursele inducţiei electrice, $\vec{D}$ *sunt reprezentate de disponibilităţile de sarcină.* Ca o consecinţă a acestor postulate, rezultă *conservarea sarcinii electrice sau ecuaţia de continuita te a curentului electric.* La rândul său, această continuitate, presupune *existenţa curentului de deplasare* având densitatea $\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

* ***al doilea grup de postulate*** afirmă, că:

a. în natură nu există distribuţii de sarcină magnetică, vectorul $\vec{B}$ *fiind întotdeauna, solenoidal:* $\nabla \vec{B} = 0$

b. vârtejurile câmpului electric sunt date de variaţia în timp a inducţiei magnetice (relaţia II a sistemului (9.16)).

* ***al treilea grup de postulate*** exprimă legătura între vectorii electrici $\vec{D}, \vec{P},$ *şi* $\vec{E}$ şi cei magnetici $\vec{B}, \vec{M}$ *şi* $\vec{H}$ prin relaţiile $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ şi $\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{H} + \mu_0 \overrightarrow{M}$ (sau echivalenta (4-2.1.7)). Aceste trei grupuri de postulate, trebuiesc completate cu *legea conservării energiei şi legea conservării impulsului* generalizate astfel încât *să includă şi manifestările electromagnetice ale materiei.*

- ***Conservarea energiei*** se exprimă prin relaţia (9.31) .

- ***Conservarea impulsului*** cere ca în urma interacţiunilor între corpuri şi câmpul electromagnetic, suma vectorială între impulsul mecanic total şi impulsul electromagnetic total să rămână constantă în timp.

* ***Legile de material*** *sunt legi specifice materialelor şi exprimă dependenţele stabilite experimental între* $\vec{P}$ *şi* $\vec{E}$*, între* $\vec{M}$ *şi* $\vec{H}$ *sau între* $\vec{j}$ *şi* $\vec{E}$ *pentru fiecare material în parte, de pinzând aşadar de natura şi de starea materialului respectiv.*

* În sfârşit, se admite că *legea lui Faraday este general valabilă în toate procesele de conducţie, chiar dacă transportul de masă nu poate fi sesizat experimental.*

* *Ecuaţiile de trecere la suprafaţa de separare a două medii nu pot fi admise ca postulate fiind consecinţe ale ecuaţiilor sistemului* (9.16).

Ec.3.: POTENŢIALELE ELECTRODINAMICE

Analiza vectorială a permis conceperea unor tehnici specifice de abordare teoretică a câmpului electromagnetic. Astfel forma diferenţială a legii fluxului magnetic exprimată prin $\nabla\vec{B}=0$, conform rezultatelor analizei vectoriale, reclamă pe $\vec{B}$ *ca fiind rotorul unui vector* $\vec{A}$ întrucât oricare ar fi vectorul $\vec{A}$, $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$. Vom scrie, deci

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{4-2.3.1}$$

şi vom observa că *vectorul* $\vec{A}$ *nu este unic*. Într-adevăr, considerând vectorul

$$\vec{A}'\equiv A+\nabla\psi \tag{4-2.3.2}$$

Vom obţine:

$$\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'=\nabla\times A+\nabla\times\left(\nabla\psi\right)=\nabla\times A=\vec{B} \tag{4-2.3.3}$$

În ecuaţia (4-2.3.2) *funcţia* $\psi=\psi(x,y,z,t)$ *este o funcţie scalară arbitrară* iar în ecuaţia (4-2.3.3) s-a ţinut seama că *rotorul gradientului unei funcţii scalare, este nul*. Introducând (4-2.3.1) în ecuaţia II a sistemului (9.16) obţinem

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{A}\right) \tag{4-2.3.4}$$

sau ceea ce este totuna:

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{4-2.3.5}$$

Rezultă că *suma din paranteză reprezintă un* ***vector irotaţional*** *ce derivă dintr-un gradient al unei funcţii scalare,* φ

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \tag{4-2.3.6}$$

sau, echivalent

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{4-2.3.7}$$

Relaţiile (4-2.3.1) şi (4-2.3.6) arată că *vectorii* $\vec{B}$ *şi* $\vec{E}$ *pot fi exprimaţi funcţie de mărimile nou introduse* $\vec{A}$ *şi* φ *numite* ***potenţiale electrodinamice****; vectorul* $\vec{A}$ *se numeşte* ***potenţial vector*** iar *scalarul* φ *se numeşte* ***potenţial scalar****. Nici potenţialul scalar nu este unic*, deoarece ale - gând o altă funcţie scalară $\varphi'=\varphi-\psi$, se obţine:

$$\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}-\nabla\varphi'=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla\varphi+\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi=\vec{E} \tag{4-2.3.8}$$

Transformările

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi \text{ şi } \varphi'=\varphi-\psi \tag{4-2.3.9}$$

se numesc ***transformări de etalon de speţa a II-a***.

Introducând (10-3-1) şi (10-3-7) în ecuaţiile lui Maxwell I şi II din (10.16), rezultă:

$$\Delta\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{j}+\nabla\left(\nabla\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{4-2.3.10}$$

$$\Delta\varphi+\nabla\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\varphi}{\varepsilon} \tag{4-2.3.11}$$

Ecuaţiile (4-2.3.1) şi (4-2.3.6), admit o infinitate de soluţii chiar pentru condiţii la limită identice. Pentru a elimina acest inconvenient*, vom alege potenţiale* $\vec{A}$ *şi* φ *care să anuleze paranteza din* (4-2.3.10) : $\nabla\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$.

Relaţia de legătură între $\vec{A}$ şi φ se numeşte ***condiţie de etalonare Lorentz*** şi în ipoteza valabilităţii acestei condiţii, ecuaţiile (4-2.3.10) şi (4-2.3.10) , devin:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \qquad (4\text{-}2.3.12)$$

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4\text{-}2.3.13)$$

În cazul câmpului electrostatic, φ nu depinde de timp şi (4-2.3.13) capătă forma numită ***ecua - ţia Poisson***

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4\text{-}2.3.14)$$

Dacă ρ=0, se obţine ***ecuaţia Laplace***:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (4\text{-}2.3.15)$$

De asemenea, se observă din (4-2.3.12) că *în câmpuri magnetice constante în timp*, potenţialul vector $\vec{A}$ satisface ecuaţia vectorială

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \qquad (4\text{-}2.3.16)$$

O soluţie a acestei ecuaţii, este:

$$\vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}}{r}dv \qquad (4\text{-}2.3.17)$$

Unde $\vec{j}$ *este densitatea de curent dintr-un volum finit V*. În cazul general ecuaţile (4-2.3.12) şi (4-2.3.13) admit soluţiile:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(r, t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv \qquad (4\text{-}2.3.18)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(r, t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv \qquad (4\text{-}2.3.19)$$

în care, *densităţile de sarcină şi curenţi intervin nu la momentul t ci la un moment anterior,* $t-\frac{r}{v}$. Din acest motiv , *potenţialele* $\vec{A}$ *şi* φ *exprimate prin relaţiile* (4-2.3.18) *şi* (4-2.3.19) *se numesc **potenţiale retardate**.*

TEME DE CASA (4-2C)

(APLICAŢII LA CURS)

Tc 4-2C.1: PROBLEME DE ELECTROCINETICĂ ÎN REGIM STAŢIONAR

1. Să se deducă expresia intensităţii câmpului magnetic la distanţa *r* faţă de axul unui conductor cilindric, foarte lung, cu raza *R*, străbătut de un curent cu intensitatea *I*, repartizat uniform în toată secţiunea conductorului.

2. Se consideră o ţeavă cilindrică metalică cu raza exterioară R_e şi raza interioară R_i. Conduc - torul este parcurs de un curent *I*, repartizat uniform în secţiunea conductoare.
Să se determine intensitatea câmpului magnetic *H* într-un punct situat la distanţele: a) $r > R_e$; b) $R_i \le r \le R_e$. c) $r < R_e$.

3. Precizaţi vectorul inducţie magnetică   al câmpului creat de un curent I, uniform distribuit în secţiunea unui conductor cilindric infinit, de rază R şi permitivitate μ, aflat în vid.

4. Un conductor infinit, străbătut de un curent de intensitate I, uniform distribuit în secţiune are forma unui tub limitat de doi cilindri necoaxiali, de raze R_1 şi R_2 $(<R_1)$. Distanţa între axele cilindrilor este $a < R_1$-R_2. Calculaţi câmpul magnetic în cavitatea cilindrică de rază R_2.

5. Stabiliţi expresia densităţii curentului electric ce trece prin vid, între doi electrozi plani situaţi la distanţa L unul de altul, între care s-a aplicat o diferenţă de potenţial U_a în condiţiile în care electronii părăsesc catodul cu viteză nulă iar în jurul catodului se află un număr mare de electroni, ce alcătuiesc o sarcină de densitate ρ. Se presupune că la suprafaţa catodului câmpul electric este nul.

6. Calculaţi rezistenţele radială şi circulară ale unui inel de cupru cu secţiune rectangulară având razele $r_1 = 20\ mm$, $r_2 = 60\ mm$ şi grosimea $e = 6\ mm$. Se cunoaşte rezistivitatea cuprului .

7. Se consideră un semiconductor a cărui rezistenţă variază cu temperatura t după legea   unde R_0 este rezistenţa la temperatura $t = 0^0\ C$ şi $\mu>0$. Semiconductorul este conectat la o sursă de tensiune la borne U. Estimaţi temperatura de echilibru a semiconductorului dacă temperatura mediului înconjurător este de $0^0\ C$, iar puterea disipată de semiconductor în mediul înconjurător este exprimată prin relaţia $P=b\Delta\ t$ în care $\Delta\ t$ este diferenţa între temperaturile semiconductorului şi cea a mediului înconjurător. Se neglijează variaţia dimensiunilor semiconductorului cu temperatura. Precizaţi valoarea maximă a tensiunii la care se mai poate stabili echilibrul termic.

8. O spiră conductoare de diametru d, fixă se găseşte într-un câmp magnetic, a cărui inducţie variază în timp după legea $B = Bm \sin \omega\ t$. Normala   face un unghi constant θ cu vectorul $\vec{B}$ Se cer : a) t.e.m. maximă indusă în spiră; b) Intensitatea maximă a curentului, I_m care apare în spiră, aceasta având o rezistenţă R; c) sarcina electrică ce străbate secţiunea normală a conductorului din care este confecţionată spira la momentele $t_1 = 0$ şi $t_2 = T/4$.

9. Se consideră un mediu de conductivitate γ şi constantă dielectrică ε_0.Să se calculeze raportul α al amplitudinilor curentului de conducţie şi curentului de deplasare rezultate în urma excitării mediului cu un câmp alternativ $\vec{E} = 2\pi \cdot 10^6\, s^{-1}$ pentru mediile cu conductivităţile:

$\gamma = 6 \cdot 10^7\, \Omega^{-1} m^{-1}$ sol argilos cu $\gamma = 10^{-4}\, \Omega^{-1} m^{-1}$ şi sticlă, $\gamma = 10^{-6}\, \Omega^{-1} m^{-1}$.

10. Un disc dintr-un material izolat subţire, având raza $R=3cm$, este uniform încărcat pe una din feţe cu sarcina electrică $Q=1mC$. Discul se roteşte în aer în jurul axului său cu frecvenţa de $50Hz$. Calculaţi inducţia magnetică în centrul discului.

11. Aparent ar fi de presupus o analogie între inducţia magnetică $\vec{B}$ şi inducţia electrică $\vec{D}$, precum şi între câmpul magnetic $\vec{H}$ şi câmpul electric $\vec{E}$. Dovediţi că în realitate analogia este inversă.

12. Se consideră o spiră circulară de rază R parcursă de un curent cu intensitatea I. Se cere valoarea intensităţii câmpului magnetic H într-un punct situat pe axa perpendiculară pe planul spirei care trece prin centrul spirei la distanţa x de centrul acesteia.

13. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic pe axa unui solenoid infinit de lung având n spire pe unitatea de lungime,cunoscând că prin spirele solenoidului s-a stabilit un curent cu intensitatea *I*.

14. Se consideră un conductor de formă circulară (spiră) parcurs de un curent de intensitate constantă, *I*. Desenaţi spectrul liniilor de câmp magnetic al spirei şi calculaţi modulul vectorului inducţie magnetică într-un punct M aflat la distanţa *z* pe o dreaptă perpendiculară pe planul spirei şi care trece prin centrul acesteia.

15. Stabiliţi expresia modulului vectorului inducţie magnetică într-un punct M situat la distanţa *a* de un conductor de lungime finită parcurs de un curent constant cu intensitatea *I* cunoscută, apoi particularizaţi această expresie în cazul conductorului rectiliniu infinit de lung.

16. Pe un tor de Fe cu secţiunea $S = 12,56cm^2$ şi cu diametrul $D = 50cm$, este înfăşurată, spiră lângă spiră, o bobină din fir de Cu cu diametrul firului $d = 1,57mm$. Dacă la capetele firului se aplică o tensiune $U = 2,2\ V$ bobina este străbătută de un flux $\Phi = 16\ 10\text{-}2Wb$. Rezistivitatea cuprului $\rho = 1,7 \cdot 10^{-2}\ \Omega m$. Se cer:

a) curentul care circulă prin bobină
b) inductanţa proprie a bobinei
c) permeabilitatea relativă a Fe
d) câmpul creat în interiorul bobinei

17. Se consideră în vid un conductor cilindric infinit de rază *R* parcurs de un curent cu intensitatea *I* uniform distribuit în secţiune. Axul cilindrului coincide cu axa *OZ* a unui triedru cartezian iar permeabilitatea conductorului cilindric este μ. Precizaţi în coordonate cilindrice r, ψ şi z expresile pentru potenţialul vector al câmpului magnetic definit prin inducţia magnetică:

$$B_\psi = \begin{cases} \dfrac{\mu I}{2\pi R^2}, r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, r > R \end{cases}$$

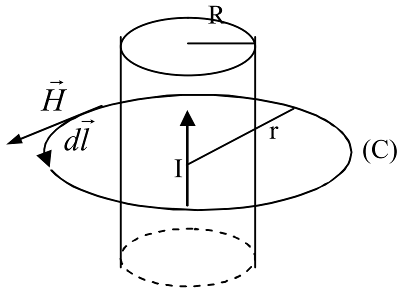
18. Precizaţi liniile de forţă ale câmpului magnetic creat de o distribuţie de curenţi de forma $i_x = i_y = 0; i_z = i_z(x, y)$.

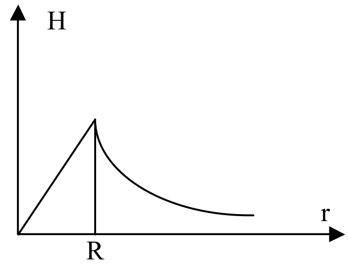
19. Pornind de la expresia potenţialului vector $\vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi}\int\limits_V \vec{j}\dfrac{dV}{r}$ să se deducă expresia matematică a legii Biot – Savart – Laplace care exprimă dependenţa inducţiei magnetice $\vec{B}$ de densitatea de curent $\vec{j}$.

20. Exprimaţi energia câmpului magnetic sub forma energiei de interacţiune a curenţilor elementari.

21. Pornind de la expresia potenţialului vector determinat de un curent constant *I*, demonstraţi că inducţia magnetică $\vec{B}$ produsă în punctul *P(x,y,0)* de curentul *I* din elementul de conductor *dl* este dat de ecuaţia lui Laplace.

22. Se consideră o bară de forma unui cilindru de rază a şi cu lungime foarte mare. Bara este magnetizată uniform cu vectorul $\vec{M}$ perpendicular pe axa□sa. Să se calculeze potenţialul vector
$\vec{A}$ în interiorul şi în exteriorul barei. Să se deducă câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ în interio - rul şi în exteriorul barei.





Tc.4-2C.2: INDICAŢII ŞI SOLUŢII PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE ELECTROCINETICĂ ÎN REGIM STAŢIONAR

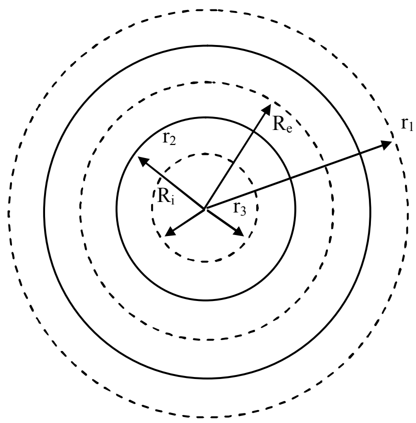
1. În figură, vectorul $\vec{H}$ este tangent la curbă şi constant în modul, iar vectorii $\vec{H}$ şi $d\vec{l}$ sunt coliniari. Folosind legea circulaţiei (Ampére), $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \oint_c Hdl = H\oint_c dl \Rightarrow H = \dfrac{1}{2\pi r}$.

♦ Pentru $r < R$, curentul fiind repartizat uniform în secţiunea conductorului, se poate scrie: $I' = I\dfrac{r^2}{R^2}$ şi rezultă $H = I\dfrac{1}{2\pi R^2 r}$;

♦ Pentru $r > R$, $H\cdot 2\pi R = I \Rightarrow H = \dfrac{I}{2\pi R}$.

♦ În sfârşit, pentru $r = R, H = \dfrac{I}{2\pi R}$.

*

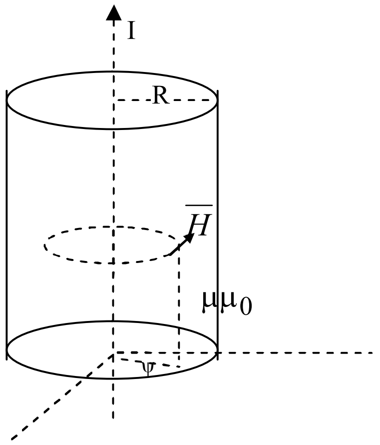


2. a) $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_1} = I;\ H\cdot 2\pi r_1 = I \Rightarrow H = \dfrac{I}{2\pi r}, (r > R_e)$;

b) $\oint_{c_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_2} = \dfrac{r_2^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot I;\ R_i < r < R_e$

c) $\oint_{c_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_3} = 0 \Rightarrow H = 0\ pentru\ r < R_i$

*



3. Liniile de forţă magnetice vor fi – în virtutea simetriei cercuri situate în plane perpendiculare pe axa conductorului cu centrele situate pe această axă, iar mărimea câmpului rămâne constantă de-a lungul unei linii de forţă.
Din legea circulaţiei (Ampére) $\oint \vec{H}d\vec{l} = H_\varphi 2\pi r$ şi pentru o distribuţie uniformă a curenţilor,

$$I_{int} = \begin{cases} \dfrac{r^2}{R^2} I, \text{pentru } r < R \\ I, \text{ pentru } r > R \end{cases}$$

$$H_{\psi}(r) = \frac{I}{2\pi R^2} r \text{ pentru } r < R \text{ şi}$$

$$H_{\psi}(r) = \frac{I}{2\pi r}, \text{ pentru } r = R$$

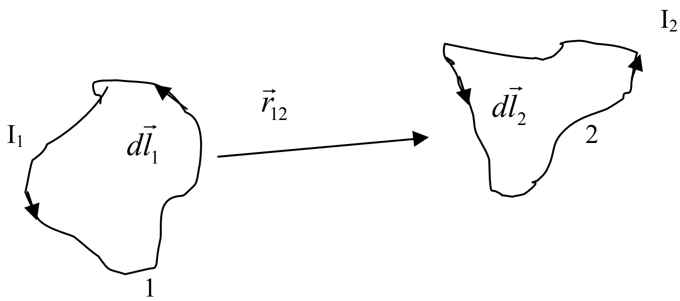
Vectorul inducţie magnetică se obţine înmulţind pe $\vec{H}$ în interior cu μ şi în exterior cu μ_0.

*

4. Forţa $\vec{F}_{12}$ cu care acţionează curentul I_1 asupra curentului I_2 conform legii lui Laplace este

$$F_{12} = \oint_2 I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

unde $\vec{B}_1$ este inducţia magnetică a câmpului creat de primul curent dată de relaţia *Biot – Savart – Laplace:*



$\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \dfrac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r^2}$ *cu* $r = |r_{12}|$. Se obţine: $\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \dfrac{d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}\right)}{r^3}$ sau ,

$\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \dfrac{d\vec{l}_1\left(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2\right) - \vec{r}_{12}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^2}$.Avem, $\oint_1 \oint_2 \dfrac{d\vec{l}_1\left(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^2} = \oint_1 d\vec{l}_1 \oint_2 \dfrac{\vec{r}_{12}}{r^3} d\vec{l}_2$ şi $\dfrac{\vec{r}_{12}}{r^3} = -\nabla_2\left(\dfrac{1}{r}\right)$,

unde ∇_2 se referă la derivări în raport cu coordonatele vârfului vectorului $\vec{r}_{12}$. Rezultă $\oint_2 \dfrac{\vec{r}_{12}}{r^3} d\vec{l}_2 = -\oint_2 \nabla_2\left(\dfrac{1}{r}\right) \cdot d\vec{l}_2 = -\oint_2 d\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$, în virtutea faptului că integrala pe contur închis dintr-o diferenţială totală, este nulă. S-a obţinut astfel că primul termen al integrantului conţinut în expresia obţinută pentru $\vec{F}_{12}$, este nul. Rămâne astfel doar al doilea termen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{r}_{12}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}.$$

Analog, se obţine $\vec{F}_{21} = -\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \dfrac{\vec{r}_{21}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}$ şi cum $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, rezultă $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

*

5. Scriem densitatea de curent ce parcurge spaţiul dintre cei doi electrozi: $\vec{j} = -\rho\vec{v}$

Valoarea vitezei se obţine din formula variaţiei energiei cinetice: $\dfrac{mv^2}{2} = eu \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$

Ecuaţia lui Poisson corelează tensiunea cu densitatea de sarcină spaţială ρ: $\dfrac{d^2U}{dx^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Se obţine

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia : $2\frac{dU}{dx}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)=\sqrt{\frac{m}{2eU}}\frac{dU}{dx}\frac{2j}{\varepsilon_0}$ pe care o scriem sub forma: $d\left(\frac{dU}{dx}\right)^2=\frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}dU$.

După integrare ţinând seama că j este constantă, $\left(\frac{dU}{dx}\right)^2=\frac{2}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int\sqrt{\frac{1}{U}}dU=\frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2mU}{e}}+C_1$

Prin ipoteză, pentru $x = 0,\ \frac{dU}{dx}=0\ \text{şi}\ U = 0$. Rezultă $C_1 = 0$ şi $\frac{dU}{dx}=\sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}}U^{\frac{1}{4}}$

Prin integrarea ultimei ecuaţii, se obţine $\int_0^{U_a}U^{-\frac{1}{4}}dU=\sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{2m}{e}}\int_0^L dx$ din care rezultă

$j=\frac{4\sqrt{2}}{9L^2}\varepsilon_0\sqrt{\frac{e}{m}}U_a^{\frac{3}{2}}$.Această relaţie exprimă o lege cunoscută sub denumirea de *“legea* $\frac{3}{2}$ ”.

*

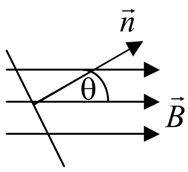
6. Considerăm un inel elementar cu razele r şi $r + dr$. Rezistenţa radială a inelului elementar este dată de: $dR=\frac{\rho dr}{2\pi re}$ şi rezultă ca rezistenţă echivalentă a unei grupări serie de astfel de rezistenţe elementare: $R_r=\frac{\rho}{2\pi e}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{\rho}{2\pi e}ln\frac{r_2}{r_1}=0,47\mu\Omega$. Dacă inelul este parcurs de un curent circular,conductanţa G a inelului elementar, este $dG=\frac{1}{\rho}\frac{edr}{2\pi r}$.Rezistenţa circulară a inelului este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralele de rezistori elementari a cărei conductanţă este: $G=\frac{e}{2\pi\rho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{e}{2\pi\rho}ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{R_c}$.Rezultă pentru rezistenţa circulară R_c a inelului, $R_c=\frac{2\pi\rho}{e}\left(ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}=15,15\mu\Omega$. Se observă că $R_rR_c=\left(\frac{\rho}{e}\right)^2$, adică produsul între rezistenţele radială şi circulară manifestate de inel nu depinde de razele inelului.

*

7. Puterea electrică ce se disipă în semiconductor este: $P=\frac{U^2}{R}=\frac{U^2}{R_0(1-\mu t)}$. Echilibrul termic se va stabili atunci când se va realiza egalitatea puterilor: $\frac{U^2}{R_0(1-\mu t)}=bt$. Rezultă valorile temperaturilor de echilibru $t_{1,2}=\frac{1}{2\mu}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4\mu U^2}{bR_0}}\right]$ pentru tensiunile $U\in\left(0,\sqrt{\frac{bR_0}{4\mu}}\right)$.Canti - tatea $U_0=\sqrt{\frac{bR_0}{4\mu}}$ exprimă valoarea maximă a tensiunii pentru care s-ar putea stabili echilibrul.

*

8. a) Fluxul magnetic prin spiră este



$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta=B_{max}\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta\sin\omega t=\Phi_{max}\sin\omega t\ \text{unde}$$

$$\Phi_{max}=B_{max}S\cos\theta$$

iar tensiunea electromotoare indusă în spiră,

$$e=-\frac{d\Phi}{dt}=-\omega\Phi_{max}\cos\omega t=-B_{max}\cdot S\omega\cos\theta\cos\omega t=E_{max}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_{max}=B_{max}S\omega\cos\theta$$

b).Valoarea instantanee a curentului indus în spiră este:

$$i=\frac{e}{R}=\frac{E_{max}}{R}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=I_{max}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\ unde\ I_{max}=\frac{E_{max}}{R}=\frac{B_{max}S}{R}\omega\cos\theta$$

c).*Sarcina electrică elementară ce străbate secţiunea normală a spirei,se scrie:*

$$dQ=idt=\frac{e}{R}dt=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}\cdot dt=-\frac{1}{R}d\Phi\,;d\Phi=\Phi_{max}\omega\cos\omega tdt=B_{max}S\omega\cos\theta\cos\omega tdt$$

Rezultă $dQ=-\frac{B_{max}S}{R}\omega\cos\theta\cos\omega tdt.$ şi,

$$Q=\int_0^{T/4}dQ=-\frac{B_{max}S}{R}\omega\cos\theta\int_0^{T/4}\cos\omega t\,dt=-\frac{B_{max}S}{R}\cos\theta\sin\omega t\Big|_0^{T/4}=-\frac{B_{max}S}{R}\cos\theta$$

*

9. Scriem, legea lui Ohm: $\vec{j}=\sigma\vec{E}=\sigma\vec{E}_0\cos\omega t$ .Cum inducţia electrică $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$, rezultă $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_0\omega\vec{E}_0$ .Se obţine $\alpha=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ relaţie din care se estimează:*pentru Cu*: $\alpha=1,1\cdot10^{12}$; pentru *solul argilos*: *1,8*; pentru *sticlă*: $1,8\cdot10^{-2}$.

*

10. Sarcina electrică dQ conţinută într-o coroană circulară de rază r şi de lăţime dr de pe disc, este $dQ=\sigma\cdot2\pi rdr=\frac{2Q}{R^2}rdr$ unde σ reprezintă densitatea superficială de sarcină.

Cum discul se roteşte cu frecvenţa de n rotaţii pe secundă, sarcina electrică dQ trece de n ori pe secundă prin faţa unui plan normal pe disc care trece prin axul discului, echivalând cu un curent $dI=n\cdot dQ$. Acest curent creează în centrul discului un câmp de inducţie $dB=\mu_0\frac{dI}{2r}$.

Câmpul de inducţie total B în centrul discului se obţine prin integrare între 0 şi R:

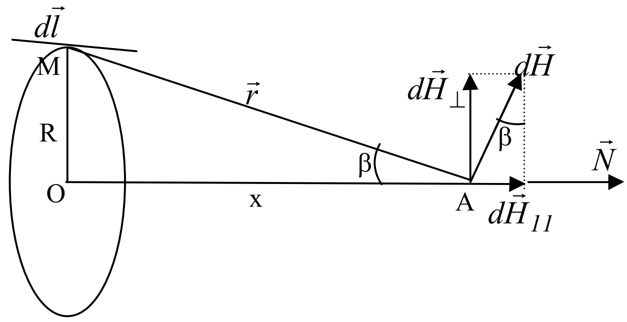
$$B=\frac{\mu_0Qn}{R^2}\int_0^R dr=\frac{\mu_0Qn}{R}=2.1\cdot10^{-6}tesla\,.$$

*

11. Vom observa că în virtutea legii Biot – Savart – Laplace, intensitatea câmpului magnetic H, creat de un conductor liniar filiform şi infinit de lung parcurs de curentul electric cu intensitatea I, la distanţa r de conductor este $H=\frac{I}{2\pi r}$ iar inducţia magnetică $B=\mu_0\mu_rH$. Din aceste relaţii se observă că B depinde de proprietăţile magnetice ale mediului, în timp ce H nu depinde de mediu. Pe de altă parte, câmpul electric între două plăci plane paralele şi infinite uniform distribuite cu sarcină electrică de densitate σ este caracterizat de intensitatea $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ şi de inducţia electrică $D=\varepsilon_0\varepsilon_rE=\sigma$, relaţii ce exprimă faptul că $\vec{E}$ depinde de proprietăţile electrice ale mediului, în timp ce $\vec{D}$, nu depinde de mediu.Rezultă aşadar că $\vec{B}$ este analogul lui $\vec{E}$, ambele mărimi depinzând de proprietăţile mediului, iar $\vec{H}$ este analog cu $\vec{D}$.

*

12. Elementul de curent $d\vec{l}$ va genera în A câmpul elementar $d\vec{H}$ care în virtutea relaţiei Biot – Savart – Laplace va fi perpendicular pe planul format de tangenta în M la cerc şi raza vectoare, $\vec{r}$. Din considerente de simetrie, componentele vectorului elementar $d\vec{H}$ perpendiculare pe normala $\vec{N}$ la planul spirei se vor anihila ca urmare a contribuţiilor elementelor de curent diametral opuse.



Rămân doar componentele $dH_{//}$ ale căror efecte se însumează şi astfel câmpul rezultat va fi orientat pe direcţia OA.

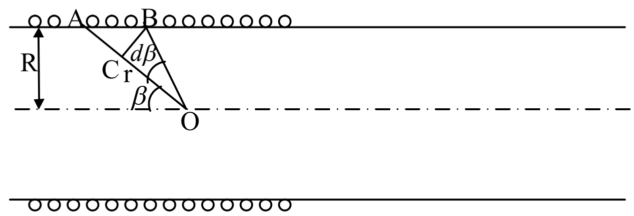
Putem scrie $dH_{11} = dH \sin\beta = \frac{R}{r} dH$ unde $dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\left(d\vec{l} \perp \vec{r}\right)$.Se obţine

$$dH_{II} = \frac{I}{4\pi}\frac{Rdl}{r^2}, \qquad r^2 = R^2 + x^2 .$$

Prin integrare, rezultă $H = \int dH_{II} = \frac{1}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\oint dl = \frac{1}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\cdot 2\pi R = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$.

*

13. Considerăm o lungime elementară |AB| de solenoid ce conţine n|AB| spire parcurse de curentul I. Elementul de curent conţinut în segmentul elementar |AB| este echivalent cu un curent $I_1 = n\,|AB|\,I$ ce ar parcurge o singură spiră şi care ar genera în O pe axul solenoidului un câmp magnetic elementar pe care îl vom descompune în două componente: $dH_{//}$ având direcţia şi suportul axului solenoidului şi $dH_{\perp}$ perpendicular pe ax. În virtutea simetriei, componentele $dH_{\perp}$ ale elementelor de lungime diametral opuse se anihilează reciproc iar componentele $dH_{//}$ se însumează, sugerând integrarea după β.

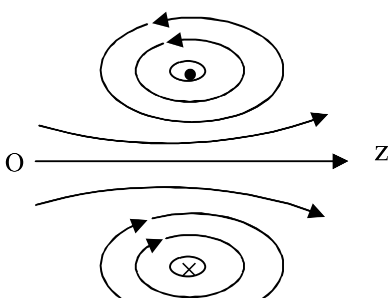


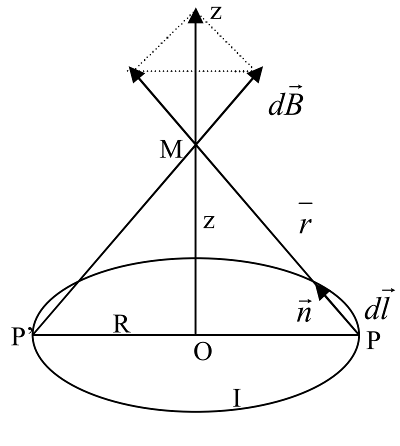
Avem: $\sin\beta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin\beta}$; $dH_{//} = \frac{2\pi R^2 I_1}{4\pi r^3} = \frac{2\pi R^2 I}{4\pi r^3}\cdot n \cdot \frac{R}{\sin^2\beta} d\beta = \frac{1}{2} In \sin\beta d\beta$.

Se obţine prin integrare, $H_{//} = \frac{1}{2} I \cdot n \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta d\beta = -\frac{1}{2} I \cdot n \cdot \left(\cos\beta\right)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$ .Pentru un solenoid infinit $\beta_1 = 0$ şi $\beta_2 = \pi$ iar $\cos\beta\Big|_0^{\pi} = -2$. Rezultă, $H=nI$.

*

14. În virtutea simetriei contribuţia elementelor de curent diametral opuse la câmpul magnetic



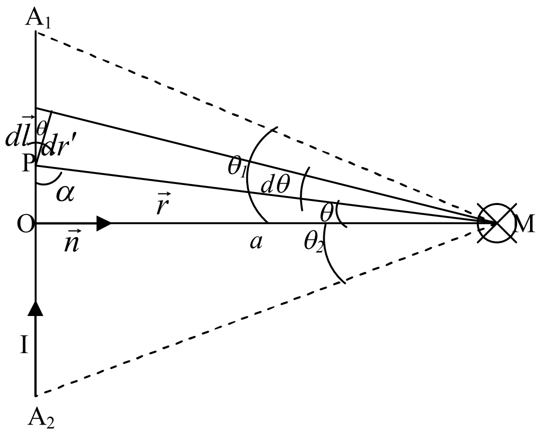


generat la cota z se concretizează printr-o însumare a câmpurilor elementare $dB_\perp$ adică a acelor componente ale lui $d\vec{B}$ perpendiculare pe planul spirei. Componentele $d\vec{B}_{11}$ s-ar anihila reciproc. Ca urmare, într-un plan diametral perpendicular pe planul spirei, liniile de câmp din vecinătatea conductorului circular sunt de formă aproape circulară, sensul lor fiind dat de regula burghiului. Liniile de câmp vor fi simetrice în raport cu linia de câmp axială dirijată după Oz. Inducţia magnetică elementară $d\vec{B}$ produsă de curentul elementar $Id\vec{l}$ are expresia: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{n}}{r^2}$ cu modulul $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} sin \frac{\pi}{2}$. Câmpul total în M rezultă integrând contribuţiile $dB_\perp = dB sin\theta$ pe conturul spirei. $B_\perp = \oint dB_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{sin\,\theta}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R}{r^2} sin\,\theta$

Cum $R = r\,sin\,\theta$ şi $r^2 = R^2 + z^2$, rezultă $B_\perp = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$. În centrul spirei ($z = 0$) şi câmpul total produs de curentul circular I prin spiră, are valoarea $B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}$.

*

15.
Vectorul inducţie magnetică în punctul M este perpendicular pe planul definit de conduc -tor şi de punctul M iar sensul acestui vector rezultă prin aplicarea regulii burghiului drept , în cazul prezentat în figu-ră, dinspre cititor spre hârtie.



Elementul de curent corespunzător elementului de lungime $d\vec{l}$ va crea în M o inducţie elementară în conformitate cu legea Biot – Savart -Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{n}}{r^2}$,

al cărui modul este $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha$ în timp ce ,$\left|d\vec{l} \times \vec{n}\right| = dl \cdot sin(\pi - \alpha) = dl\,sin\,\alpha$ în care $sin\,\alpha = sin(\pi/2 - \theta) = cos\,\theta$.Cum $dr' = dl\,cos\,\theta = rd$ şi $a = r\,cos\,\theta$, obţinem:

$$dl = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta} \text{ şi } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\cos\theta d\theta}{a}.$$

Câmpul de inducţie total se obţine prin integrare $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} cos\,\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(sin\,\theta_2 - sin\,\theta_1\right)$

În cazul particular când punctele A_1 şi A_2 se deplasează către $+\infty$ şi respectiv $-\infty$, unghiurile θ_1 şi θ_2 tind către valorile $-\pi/2$ şi respectiv $\pi/2$ şi B va deveni egal cu $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

*

16. a) Numărul de spire N rezultă din relaţia: $Nd = \pi D \rightarrow N = 1000$ spire.

- diametrul unei spire: $d_s = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 4cm$
- lungimea firului $l = N\pi d_s = 40\pi\,m$
- rezistenţa firului $R = \rho l/s = 1{,}1\Omega$
- în sfârşit, intensitatea curentului $I = U/R = 1{,}12A$

b) $L = \phi/I = 8\pi \cdot 10^{-2}\,H$

c) $L = \dfrac{\mu N^2 S}{l} = \dfrac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2\pi r}$ rezultă $\mu_r = 500$.

d) $H = \dfrac{NI}{l} = \dfrac{NI}{2\pi r} = 1280 \dfrac{A}{m}$

*

17. Deoarece curentul are componentă nenulă numai pe axa Oz se poate considera $A_r = A_\psi = 0$ în această ipoteză, $B_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \varphi}$, $B_\psi = -\dfrac{\partial A_z}{\partial r}$, $B_z = 0$ care comparate cu expresia B_ψ din ipoteza de lucru, conduc la

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi R^2} r^2 + C & (r < R) \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C' & (r > R) \end{cases}$$

Convenţional vom accepta pe axa conductorului $C=0$, adică $A_z=0$ iar constanta C rezultă din condiţia ca A_z să fie continuu pentru $r = R$. Se obţine:

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi R^2} r^2, \text{ pentru } r < R \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\dfrac{r}{R} - \dfrac{\mu I}{4\pi}, \text{ pentru } r > R \end{cases}$$

*

18. Potenţialul vector $\vec{A}$ va avea în acest caz componentele: $A_x = A_y = 0$; $A_z = A_z(x,y)$. Din relaţia $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ obţinem $B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y}, B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x}, B_z = 0$. Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de forţă se scriu: $\dfrac{dx}{B_x} = \dfrac{dy}{B_y} = \dfrac{dz}{B_z}$, sau în cazul nostru

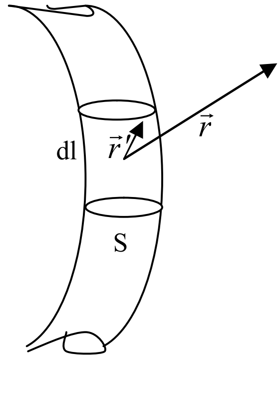
$$\frac{dx}{\dfrac{\partial A_z}{\partial y}} = -\frac{dy}{\dfrac{\partial A_z}{\partial x}} = \frac{dz}{0}.$$

Rezultă că $z = const.$ este o integrală primă. Aceasta înseamnă că liniile de forţă sunt conţinute în plane $y = const. = C_1$.

O altă integrală primă rezultă din ecuaţia $\dfrac{\partial A_z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0$ echivalentă cu ecuaţia $dA_z(x,y) = 0$ sau $A_z(x,y) = const = C_2$. Aşadar liniile de forţă coincid cu liniile de potenţial vector, constant.

*

19. Scriem $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \vec{j} \dfrac{dv}{r} = \dfrac{\mu}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\dfrac{\vec{j}}{r}\right)$. Introducerea rotorului sub integrală este îndreptăţită deoarece domeniul de integrare nu depinde de variabilele prin care acţionează operatorul rotor, adică nu depinde de coordonatele punctului în care se calculează $\vec{B}$



$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = \frac{1}{r} \nabla \times \vec{j} + \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{j}$$

Vectorul $\vec{j}$ depinde de coordonatele $\vec{r}'$ ale punctelor pe care se face integrarea iar operatorul rotor se efectuează după coordonatele $\vec{r}$ ale punctului în care se calculează câmpul.

Coordonatele $\vec{r}'$ şi $\vec{r}$ sunt aşadar independente. Rezultă, $\nabla \times \vec{j} = 0$ *şi cum* $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$,

$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{j} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{j} = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3}$. Se obţine $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$ şi $\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$ relaţii ce exprimă legea Biot – Savart – Laplace care permite calculul câmpului magnetic pentru o distribuţie dată a curenţilor. Dacă curenţii staţionari trec prin conductori suficient de subţiri $\left|\vec{j}\right| = const$ şi $dV = S \cdot dl$ astfel că, $\vec{j}dV = \vec{j}Sdl = \left|\vec{j}\right|Sd\vec{l} = Id\vec{l}$.

Se obţine $\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ unde s-a notat cu L conturul liniar al curentului, iar cu S secţiunea tubului de curent.

*

20. Densitatea volumică de energie magnetică este dată de relaţia: $w_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A}$.

În baza identităţii vectoriale $\nabla\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\nabla \times \vec{A} - \vec{A}\nabla \times \vec{B}$ obţinem

$$\vec{H}\nabla \times \vec{A} = \nabla\left(\vec{A} \times \vec{H}\right) + \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla\left(\vec{A} \times \vec{H}\right) + \vec{A}\vec{j};\ \left(\nabla \times \vec{H} = \vec{j}\right)$$

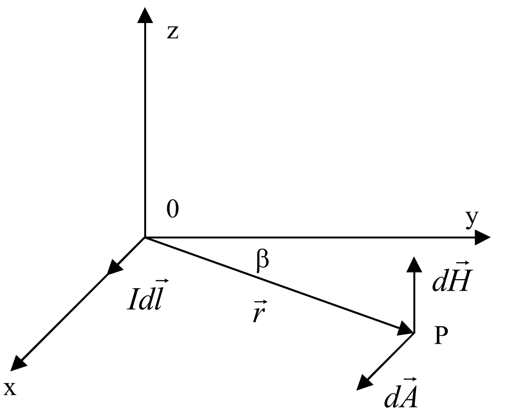
$$w_m = \frac{1}{2}\nabla\left(\vec{A} \times \vec{H}\right) + \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{j}$$

Integrând pe întregul volum al distribuţiei de curenţi, rezultă: $w_m = \frac{1}{2}\int_V \nabla\left(\vec{A} \times \vec{H}\right)dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j}dV$

În baza identităţii $\int_V \nabla\left(\vec{A} \times \vec{H}\right)dV = \oint\!\!\oint_S \left(\vec{A} \times \vec{H}\right)d\vec{S}$ ţinem seama că $\left|\vec{A}\right|$ se comportă ca $1/r^2$ iar $\left|\vec{H}\right|$ se comportă corespunzător ca $1/r^3$ astfel că dacă curenţii sunt distribuiţi în domenii finite, prima integrală din expresia energiei câmpului magnetic se anulează pentru r suficient de mare, rezultând $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j}dV$ şi cum $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \vec{j}'\frac{dV'}{r}$ rezultă în definitiv $W_m = \frac{\mu}{8\pi}\int_V \frac{\vec{j}\vec{j}'dVdV'}{r}$,

unde r reprezintă distanţa între elementele de volum dV şi dV'.

*



21. Potenţialul vector definit de elementul de curent $I\,d\vec{l}$ este: $d\vec{A} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi r}$. În cazul problemei, $dA_x = \frac{\mu_0 Idx}{4\pi r}$

Folosim relaţia, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ şi obţinem

$$dB_x = \left(\nabla \times d\vec{A}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y}dA_z - \frac{\partial}{\partial x}dA_y = 0$$

$$dB_y = \left(\nabla \times d\vec{A}\right)_y = \frac{\partial}{\partial z}dA_x - \frac{\partial}{\partial x}dA_z = 0$$

$$dB_z = \left(\nabla \times d\vec{A}\right)_z = \frac{\partial}{\partial y}dA_y - \frac{\partial}{\partial y}dA_x =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}dA_x = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_0 Idx}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 Idxy}{4\pi\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}\cos\beta$$

Cum $\beta = \alpha - 90°$, rezultă $d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi r^2}\sin\alpha$ care reprezintă ecuaţia Laplace pentru vid.

*

22. Fie un element de volum $d\tau$ care posedă momentul $d\vec{M} = \vec{M}d\tau$;

$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{M}\times\vec{u}}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{u}}{r^2}d\tau \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0\vec{M}}{4\pi}\times\iiint\limits_{vol}\frac{\vec{u}\,d\tau}{r^2}$. Integrala *reclamă un câmp electrostatic în dependența de* $\frac{1}{r^2}$.Pentru a evidenția această analogie multiplicăm și împărțim cu $\varepsilon_0\,\rho$ unde ρ este o constantă cu dimensiunile unei densități volumice de sarcină.

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon_0\mu_0\vec{M}}{\rho}\times\iiint\limits_{vol}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\vec{u}\,dV}{r^2} = \frac{\varepsilon_0\mu_0\vec{M}}{\rho}\times\vec{E}^*$$, unde

$\vec{E}^*$ este câmpul creat de o densitate volumică de sarcină uniform distribuită în domeniul V;

Calculul lui $\vec{E}^*$ se face cu ajutorul teoremei Gauss:

- $r < a \quad ,\vec{E}^* = \rho\frac{\vec{r}}{3\varepsilon_0}$;
- $r > a\,\vec{E}^* = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$, de unde rezultă :
- $r < a,\ \vec{A}_{int} = \mu_0\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{3}$;
- $r > a,\ \vec{A}_{ext} = \mu_0\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{4\pi r^3} \quad cu \quad \vec{M}_e = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}$.

Câmpul magnetic de inducție se calculează în exterior ca fiind produs de un dipol magnetic de moment $\vec{M}_e$; în interior câmpul este uniform : $\vec{B}_{int} = \frac{2\mu_0}{3}\vec{M}$.

*