CURS 8

8.1 REGIMUL STAŢIONAR

Prin convenţie*, sensul liniilor de câmp este dinspre sarcinile pozitive spre sarcinile negative sau dinspre zonele cu potenţial electrostatic creat de sarcini pozitive, înspre zonele cu potenţial electrostatic generat de sarcini negative*. Zonele cu încărcare electrostatică diferită manifestă potenţiale electrostatice diferite şi presupun un transfer de sarcină în sensul egalizării potenţialelor electrostatice. Transferul de sarcină se produce de la sine totdeauna către zonele cu potenţial mai mic până la obţinerea stării de echilibru când potenţialele electrostatice vor fi devenit egale. Acest transfer de sarcină se produce instantaneu în urma punerii în contact a două zone cu potenţiale diferite prin intermediul unui *corp conductor ideal* şi într-un timp infinit de lung dacă corpul este *izolator ideal*. În practică nu există conductorii ideali şi nici izolatorii ideali, există doar *corpuri cu o foarte bună disponibilitate de purtători de sarcină numite **medii conductoare***, corpuri cu *disponibilitate moderată spre "slabă" numite **semicon ductori** şi corpuri lipsite de purtători de sarcină, **izolatorii**.*

Numim ***curent electric*** *orice deplasare dirijată de sarcini electrice (pozitive sau negative) sau de corpuri încărcate cu sarcină electrică*. În primul caz, *curentul obţinut prin deplasarea sarcinilor libere prin mediile conductoare se numeşte **curent de conducţie** iar cel asociat deplasării corpurilor încărcate, **curent de convecţie**.*

Prin definiţie, ***intensitatea curentului electric*** *I* printr-*un conductor* reprezintă *sarcina netă ΔQ ce traversează în unitatea de timp suprafaţa unei secţiuni transversale a conductorului.*

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{8.1}$$

*Curentul electric care transportă prin fiecare secţiune a conductorului cantităţi de sarcină egale în intervale egale de timp se numeşte **curent electric staţionar** şi se măsoară în amperi (A).* Din (8.1) se observă că *intensitatea curentului electric este o mărime scalară.*

Conductibilitatea diferitelor medii materiale este *specifică*. Astfel în *metale* aceasta este asigurată de un singur tip de purtători de sarcină, electronii. În *lichide*, conducţia se datorează ionilor pozitivi şi negativi. *În gazele ionizate* conducţia este asigurată de către ionii moleculari sau atomici şi de electroni, iar în mediile *semiconductoare* de electroni şi de purtători de sarcină pozitivi care se numesc "*goluri*".La orice temperatură diferită de zero absolut, purtătorii de sarcină se află într-o mişcare dezordonată de *agitaţie termică* astfel că prin orice suprafaţă imaginară din volumul conductorului, sarcina netă transportată de aceşti purtători într-un interval de timp *Δt* în mişcarea lor dezordonată, va fi nulă. Altfel spus, în absenţa unor forţe create din exterior, prin conductoare nu se va stabili un curent electric. *Pentru a produce deplasarea dirijată a purtătorilor va fi deci necesară plasarea mediului conductor într-un câmp electric exterior*. Prin aceasta *purtătorii de sarcină pozitivi vor fi antrenaţi într-o mişcare ordonată în sensul câmpului electric iar cei negativi, în sens invers.*

Sensul curentului electric coincide totdeauna cu sensul orientării vectorului câmp electric în conductor. Pentru caracterizarea completă a curentului electric de conducţie se introduce o mărime fizică *vectorială* numită ***densitate de curent*** notată cu $\vec{j}$:

$$\vec{j} = qn\vec{\bar{v}}_d \tag{8.2}$$

în care *q* reprezintă *sarcina purtătorilor*, *n numărul de purtători din unitatea de volum* adică *densitatea de purtători* (denumirea de concentraţie întâlnită în alte manuale este dacă nu improprie, cel puţin conjuncturală), iar $\bar{\vec{v}}_d$ **_driftul_** mediu al purtătorilor în lungul câmpului, adică *viteza medie de deplasare acestora în lungul câmpului*. Această nouă mărime va depinde atât de intensitatea $\vec{E}$ a câmpului electric cât şi de numărul de ciocniri ale purtătorului în unitatea de timp suportate de acesta în drumul său dirijat.

Densitatea de curent $\vec{j}$ are un caracter *local* imprimat de variaţia locală a densităţii de purtători în mediile neomogene.Definiţia (8.2) se generalizează *pentru mediile omogene şi izotrope* care conţin mai multe tipuri de purtători de sarcină, la forma:

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i q_i n_i \bar{\vec{v}}_i \qquad (8.3)$$

sau *în cazul când în conductor există două tipuri de purtători de sarcină de semn opus*

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = q_+ n_+ \vec{v}_+ + q_- n_- \vec{v}_- \qquad (8.4)$$

Regimul permanent staţionar se caracterizează prin aceea că, în unitatea de timp, la orice moment t, prin secţiunea normală a conductorului este transferată aceeaşi sarcină electrică.

8.1.1 CURENTUL ELECTRIC STAŢIONAR. ECUAŢIA DE CONTINUITATE

Să considerăm o suprafaţă închisă S în interiorul unui mediu conductor prin care se transferă sarcini electrice. Fie *dS* un element de suprafaţă pe suprafaţa *S*.

Figura 8.1 ne permite să observăm că $\vec{n}_i \cdot \vec{n} = \cos\theta$ şi $dS \cdot \cos\theta = dS_n$. S-a notat cu $\vec{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa *dS* şi cu $\vec{n}_i$ versorul direcţiei transferului de sarcină. Dacă în plus se consideră că *dq este sarcina transferată prin dS în intervalul de timp dt* iar *ρ* este *densitatea volumică de sarcină*, vom putea scrie în conformitate cu relaţia (8.2):

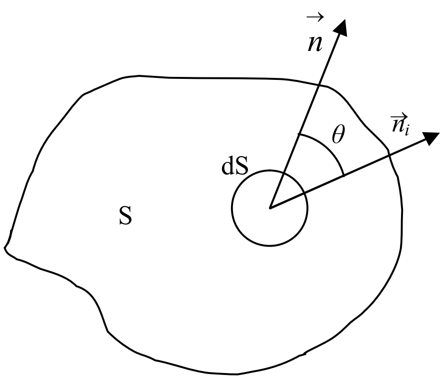

Figura 8.1

$$\vec{j} = \frac{dq}{dS\,\vec{n}\,\vec{n}_i\,dt}\vec{n}_i = \frac{dq}{dS_n dr}\frac{d\vec{r}}{dt} = \rho\vec{v} \qquad (8.5)$$

S-a considerat pentru simplificarea scrierii *păstrându-se semnificaţia* $\vec{v} \equiv \bar{\vec{v}}$. *Curbele tangente în fiecare punct la direcţia locală a vectorului densitate de curent se numesc* **_linii de curent_**. Se obţine:

$$I = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = \oint_S \vec{j}\,\vec{n}\, dS \qquad (8.6)$$

Conform legii de conservare a sarcinii electrice, variaţia sarcinii electrice din interiorul suprafeţei se datorează sarcinii transferate prin suprafaţa *S* şi - pentru un interval de timp *dt* – cantitativ, *această variaţie va fi egală cu sarcina transferată în acelaşi interval de timp, dt:*

$$- dq_{int.} = dq_{tr.} = I \cdot dt \qquad (8.7)$$

sau echivalent,

$$\frac{dq_{int.}}{dt} + I = 0 \qquad (8.8)$$

Cum

$$I = \oint_S \vec{j}\,\vec{n}\, dS = \int_V \nabla \vec{j}\, dV \qquad (8.9)$$

şi $q_{int.} = \int_V \rho dV$ se obţine: $\frac{dq_{int.}}{dt} + \oint_S \vec{j}\,\vec{n} dS = 0$ sau echivalent, $\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_V \nabla \vec{j} dV = 0$.

relaţie care va ţine seama de liniaritatea operatorului de derivare şi de efectul introducerii acestuia sub integrală:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{8.10}$$

Se obţine încă:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j}\right) dV = 0 \tag{8.11}$$

şi cum *aceste elemente de volum sunt arbitrare*, rezultă în definitiv ca o condiţie necesară ***ecuaţia de continuitate*** *a curentului electric*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \tag{8.12}$$

care exprimă *conservarea sarcinii electrice.*

Cazul staţionar presupune $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ care conduce la $\nabla \vec{j} = 0$ sau la

$$\oint_S \vec{j}\,\vec{n}\, dS = 0 \tag{8.13}$$

pentru orice suprafaţă închisă S. Aşadar, *liniile de curent ale curenţilor staţionari sunt curbe închise.*

8.1.2 TENSIUNEA ELECTROMOTOARE. LEGEA LUI *OHM*

Sarcinile electrice în mişcare transferă continuu şi ireversibil energia lor mediului în care se deplasează. Acestă energie transferată trebuie compensată în timp. Câmpul electric nu poate face acest lucru întrucât,după cum s-a stabilit anterior, *lucrul mecanic efectuat de forţa generată de câmpul electrostatic la deplasarea unităţii de sarcină pozitivă pe un circuit închis este nul.* Rezultă deci că *pentru a menţine curentul într-un circuit este necesar ca asupra purtătorilor de sarcină să acţioneze, pe lângă forţele de natură electrostatică şi forţe de natură diferită de cea electrostatică, forţe neelectrice numite* ***induse*** *sau* ***imprimate***. Aceste forţe sunt generate în diferite puncte pe traseul circuitului electric de dispozitive numite ***surse de tensiune electromotoare*** *care transformă în energie electrică energii de altă natură.* Un exemplu pentru un astfel de dispozitiv, ar fi *pila electrică de tip Volta* ce transformă în energie electrică energia rezultată printr-o reacţie chimică. ***Generatoarele electrice*** convenţionale transformă în energie electrică energia unui câmp magnetic inductor a cărei variaţie în timp induce în circuitul electric un câmp electric neconservativ ce generează forţele imprimate:

$$\vec{E}_{ind.} = \frac{\vec{F}_{ind.}}{q_0} \tag{8.14}$$

Astfel câmpul electric total din conductor va fi $\vec{E} + \vec{E}_{ind.}$, $\vec{E}$ fiind *intensitatea câmpului electric de natură electrostatică.* Dacă notăm cu φ_1 şi φ_2 *potenţialele electrostatice ale punctelor 1 şi 2* ale unui circuit închis, *lucrul mecanic efectuat de câmpul total (electric şi indus) asupra sarcinii de probă q_0 între punctele 1 şi 2 ale circuitului* va fi exprimat prin:

$$L_{1\to 2} = q_0 \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_{ind.}\, d\vec{l} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) + q_0 \varepsilon_{12} \tag{8.15}$$

în care s-a notat cu ε_{12} *tensiunea electromotoare ce acţionează pe segmentul* 1→ 2 al circuitului. ***Căderea de tensiune*** pe această porţiune *reprezintă lucrul mecanic total efectuat asupra unităţii de sarcină pozitivă.*

$$\frac{L_{1\to 2}}{q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \tag{8.16}$$

Scrisă pentru întregul circuit ,starea finală 2 coincide cu cea iniţială 1,$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ şi

$$\varepsilon_{12} = E = \oint_C \vec{E}_{ind.} d\vec{l} \tag{8.17}$$

reprezintă ***forţa electromotoare totală*** definită ca *fiind circulaţia vectorului* $\vec{E}_{ind.}$ *de-a lungul circuitului*, adică *lucrul mecanic efectuat de forţa indusă pentru deplasarea unităţii de sarci - nă pozitivă de-a lungul întregului circuit.* Experimental se constată că între *diferenţa de potenţial* $\varphi_1 - \varphi_2$ şi intensitatea I a curentului electric printr-un conductor omogen există relaţia:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = R \cdot I \tag{8.18}$$

în care *constanta de proporţionalitate R este specifică materialului conductorului depinzând de proprietăţile sale conductoare prin* ***rezistivitatea*** ρ şi *de dimensiunile geometrice ale acestuia*: *lungime* l şi *secţiune transversală*, s:

$$R = \rho\frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{s} \tag{8.19}$$

În această relaţie σ este ***conductivitatea,*** *egală cu inversul rezistivităţii* şi- *ca şi rezistivitatea*- este o mărime scalară. *În cazul mediilor anizotrope ambele mărimi sunt tensoriale* iar *notaţiile folosite pentru a le desemna nu trebuiesc confundate cu notaţiile identice din electrostatică folosite pentru densităţile de sarcină (volumică, ρ şi superficială, σ) .*
Se poate scrie

$$-d\varphi = I\,dR = I\frac{1}{\sigma}\frac{dl}{dS} \tag{8.20}$$

din care rezultă $j = \frac{I}{S} = -\sigma\frac{d\varphi}{dl} = \sigma E$ în care se ia în considerare că *purtătorii de sarcină se deplasează în lungul liniilor câmpului electric* astfel că relaţia va permite o scriere vectorială

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{8.21}$$

cunoscută sub denumirea de ***formă vectorială a legii lui Ohm***.

8.2 CÂMPUL MAGNETIC CONSTANT

Deplasarea în spaţiu a sarcinilor electrice este însoţită întotdeauna de apariţia unui câmp magnetic în zona din jurul traiectoriilor sarcinilor electrice. Astfel un conductor liniar parcurs de un curent electric, generează un câmp magnetic în jurul său. De asemenea, o buclă de curent (spiră) manifestă existenţa unor linii de câmp magnetic ce ies prin faţa ***nord*** a spirei şi intră prin faţa ***sud***. Solenoidul parcurs de curent electric generează un câmp magnetic axial, etc. ***Ampère*** explică magnetismul prin intermediul *curenţilor microscopici.* ***Curentul "amperic"*** *este asociat mişcării pe orbite închise de dimensiuni submoleculare, sau rotaţiei particulelor elementare încărcate electric în jurul axelor proprii.* În moleculele constituite din unul sau mai mulţi atomi, *de regulă centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu acela al sarcinilor negative* şi respectivele molecule se vor comporta ca mici *dipoli* numindu-se ***molecule polare.*** *Când curenţii "amperici" sunt polarizaţi permanent, corpul are comportare de* ***magnet permanent****, iar când nu sunt polarizaţi permanent dar se pot polariza sub acţiunea unui câmp magnetic exterior, atunci corpul are comportare macroscopică de* ***corp magnetizabil***.

8.2.1 INTERACTIUNI ELECTROMAGNETICE

Câmpul magnetic creat de purtătorii de sarcină în mişcare dirijată interacţionează cu alte conductoare parcurse de curenţi sau de alte câmpuri magnetice generând astfel forţe electromagnetice dintre care reţinem câteva de importanţă fundamentală în electromagnetism şi anume:

Forţa electromagnetică ce *caracterizează interacţiunea între câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ şi curentul electric de intensitate I care circulă printr-un conductor*. Pentru un conductor rectiliniu de lungime l parcurs de un curent de intensitate I şi plasat într-un câmp magnetic cu inducţia magnetică $\vec{B}$, forţa electromagnetică se exprimă prin relaţia:

$$\vec{F} = I\left(\vec{l}\times\vec{B}\right) \tag{8.22}$$

În această relaţie vectorului $\vec{l}$ i se atribuie ca modul *lungimea conductorului*, ca sens, *sensul "curgerii" curentului electric* şi desigur *direcţia coincide cu cea a conductorului.*
Ecuaţia (8.22) se scrie sub formă scalară,

$$F = BIl\sin\alpha \tag{8.23}$$

în care α *este unghiul dintre vectorii* $\vec{l}$ *şi* $\vec{B}$. În cazul unui curent *curbiliniu şi filiform* când $\vec{B}$ nu se păstrează neapărat constant în lungul conductorului,

$$\vec{F} = I\int_{\Gamma} d\,\vec{l}\times\vec{B} \tag{8.24}$$

Γ fiind porţiunea de curbă parcursă de curent şi plasată în cîmpul magnetic.

Mai general *în cazul în care curentul nu este filiform ci este distribuit cu o densitate* $\vec{j}$ *într-un domeniu V*, forţa electromagnetică rezultă din relaţia:

$$\vec{F} = \int_{V}\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)dV \tag{8.25}$$

care derivă din (8.24) observând că:

$$I\,d\,\vec{l} = jS\,d\,\vec{l} = \vec{j}\,S\,dl \tag{8.26}$$

Forţa electrodinamică *este de fapt tot o forţă electromagnetică* care *se manifestă prin interacţiunea reciprocă a două conductoare rectilinii paralele şi infinite parcurse de curenţii* I_1 *şi* I_2. Dacă aceste conductoare se găsesc în vid la distanţa *d*, unul de altul forţa electrodinamică ce acţionează asupra unităţii de lungime a conductoarelor se exprimă prin relaţia:

$$\frac{F}{l} = \mu_0\frac{I_1 I_2}{2\pi d} \tag{8.27}$$

Forţa Lorentz *este de asemenea o forţă electromagnetică* dacă se ia în considerare că *forţa cu care câmpul magnetic acţionează asupra curenţilor se datorează acţiunii câmpului magnetic asupra purtătorilor de sarcină care generează curentul electric*. Oservând că $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ şi că $\rho dv = dq$ expresia (8.25) devine,

$$\vec{F} = \int_{V}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)dq \tag{8.28}$$

care în cazul unei sarcini distribuite într-un volum mic sau al unei sarcini punctiforme, se scrie:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{8.29}$$

Pentru o sarcină q care evoluează într-un câmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ peste care s-a suprapus un câmp electric de intensitate $\vec{E}$, *forţa totală* ce va acţiona asupra sarcinii q se scrie,

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (8.30)$$

Expresia (8.30) exprimă ***forţa Lorentz*** şi *conţine o componentă electrică* $q\vec{E}$ şi *o componentă magnetică* $q\vec{v} \times \vec{B}$, care fiind perpendiculară pe $\vec{v}$ nu modifică modulul vitezei deci nici energia cinetică a particulei ci numai direcţia acesteia acţionând ca o forţă centripetă.

8.2.2 FORMULA *"BIOT – SAVART – LAPLACE"*

Câmpul magnetic poate fi descris şi printr-o altă mărime vectorială notată cu $\vec{H}$ şi numită ***intensitate a câmpului magnetic*** introdusă prin *relaţia de definiţie*

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (8.31)$$

în care μ_0 reprezintă *permeabilitatea magnetică a vidului*. Pentru un mediu oarecare caracterizat de o permeabilitate magnetică μ, relaţia devine,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (8.32)$$

Fizicienii francezi ***Jean – Baptiste Biot*** (1774 – 1862) şi ***Felix Savart*** (1791 – 1841) au stabilit experimental că intensitatea H a câmpului magnetic generat de un curent electric filiform este proporţională cu intensitatea I a curentului electric şi invers proporţională cu distanţa ce separă curentul filiform de punctul în care se calculează intensitatea câmpului magnetic.

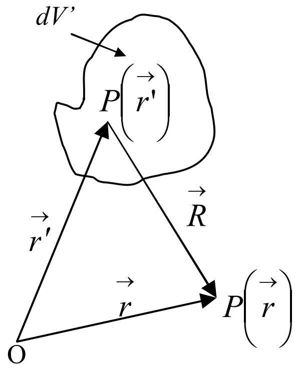

Figura 8.2

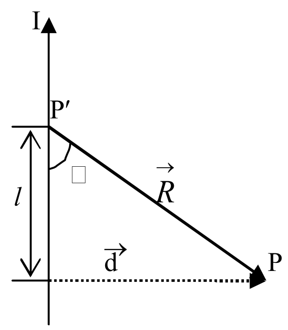

Figura 8.3

Savantul francez ***Simion de Laplace*** (1749 – 1829) a generalizat relaţia $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi d}$ valabilă în cazul curentului filiform pentru *cazul unei distribuţii de curenţi constanţi*, la :

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right) \times \vec{R}}{R^3} dV' \qquad (8.33a)$$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, notaţiile fiind cele din figura 8.2 în care *dV' este elementul de volum care conţine distribuţia de curenţi de densitate* $\vec{j}\left(\vec{r}'\right)$.

Pentru un *curent filiform cu secţiunea S'*,se pot scrie relaţiile $\vec{j}\,dV' = \vec{j}\,S'dl = I d\vec{l}$.

Se obţine:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{\Gamma}\frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3} \tag{8.33b}$$

Figura 8.3 particularizează situaţia generală din figura 8.2 pentru un curent stabilit într-un *conductor rectiliniu infinit de lung* . Se observă că $sin\,\theta = \dfrac{d}{R}$ şi $R^2 = d^2 + l^2$, astfel că relaţia (8.33) conduce la:

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\,\theta}{R^2}dl = \frac{Id}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} \tag{8.34}$$

sau observând că integrantul este o funcţie *pară în l*:

$$H = \frac{Id}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dl}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} = \frac{Id}{2\pi}\left[\frac{l}{d^2\left(d^2 + l^2\right)^{1/2}}\right]_{l=0}^{\infty} = \frac{I}{2\pi d} \tag{8.35}$$

Folosind identitatea vectorială

$$\nabla\times\left(\alpha\vec{a}\right) = \nabla\alpha\times\vec{a} + \alpha\nabla\times\vec{a} \tag{8.36}$$

în care α este o funcţie scalară *oarecare*, iar $\vec{a}$ este o funcţie vectorială şi ţinând seama că $\vec{j}\left(\vec{r}'\right)$ nu depinde de coordonatele $\vec{r}$ la care se referă operatorul ∇, relaţia (8.33) devine:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla\times\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}dV' \tag{8.37}$$

8.3 ECUAŢIILE CÂMPULUI MAGNETIC CONSTANT ÎN CAZUL DISTRIBUŢIILOR STAŢIONARE

Vom aplica operatorul ∇ ambilor membri ai ecuaţiei (8.37) şi vom ţine seama că *divergenţa unui rotor este nulă*. Obţinem:

$$\nabla\vec{B} = \nabla\left(\mu_0\vec{H}\right) = \mu_0\nabla\vec{H} = 0 \tag{8.38}$$

În continuare vom considera identitatea vectorială:

$$\nabla(\alpha\vec{a}) = (\nabla\alpha)\vec{a} + \alpha\nabla\vec{a} \tag{8.39}$$

şi vom obţine încă

$$\nabla\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right] = \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\vec{j}(\vec{r}') = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r}') \tag{8.40}$$

Ultimul termen din (8.38) fiind nul şi întrucât

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \text{ iar} \tag{8.41}$$

$$\nabla\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right] = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\cdot\vec{j}(\vec{r}')\right) \tag{8.42}$$

se va obţine

$$\nabla'\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right] = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{R}\nabla'\,\vec{j}(\vec{r}') \tag{8.43}$$

În virtutea ecuaţiei de continuitate scrisă în cazul staţionar, ultimul termen este nul $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\right)$.

Ca urmare, $\nabla\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV' = -\int\limits_{V'}\frac{\nabla'\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV' = -\oint\limits_{S}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\vec{S}}{R} = -\oint\limits_{S}\frac{j_n(\vec{r}\,')}{R}dS$ (8.44)

ceea ce conduce la $\nabla\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV' = 0$ ca o consecinţă a faptului că $\vec{j}_n(\vec{r}\,')=0$.

O altă identitate vectorială

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\vec{a}) - \nabla^2\vec{a} \tag{8.45}$$

şi relaţia lui Poisson

$$\nabla^2\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV' = -f(\vec{r}) \tag{8.46}$$

conduc la relaţia

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} \tag{8.47}$$

Această ecuaţie s-a obţinut în virtutea faptului că *în ecuaţia lui Poisson, f este o funcţie arbitrară care a fost particularizată la componentele vectorului* $\vec{j}$. Relaţia (8.47) este aplicabilă şi curenţilor amperici

$$\nabla\times\vec{H}_m = \vec{j}_m \tag{8.48}$$

Vom aplica operatorul ∇ ambilor membri ai ecuaţiei (8.47) , vom folosi (8.32) şi vom ţine seama că *divergenţa unui rotor este nulă*. Obţinem:

$$\nabla\vec{B} = \nabla\left(\mu_0\vec{H}\right) = \mu_0\nabla\vec{H} = 0 \tag{8.49}$$

Ecuaţiile (8.49) şi (8.47) sunt echivalente cu ecuaţiile:

$$\int\limits_{V}\nabla\vec{B}\,dV = \oint\limits_{S}\vec{B}\,d\vec{S} = 0 \tag{8.50}$$

$$\oint\limits_{\Gamma}\vec{H}\,d\vec{l} = \oint\limits_{S}\vec{j}\,d\vec{S} = I \tag{8.51}$$

oricare ar fi suprafaţa S de frontieră Γ.

Ultima relaţie exprimă ***legea circuitală a lui Ampére*** :" *circulaţia vectorului* $\vec{H}$ *pe o curbă închisă* (numită şi ***tensiune magnetomotoare***) este egală cu ***solenaţia***, adică *cu suma curenţilor înconjuraţi de curba respectivă"*. În această sumă fiecare curent se însumează algebric de atâtea ori de câte ori traversează suprafaţa mărginită de curba Γ.

8.3.1 INTERACŢIUNI MAGNETICE

Aşa cum prezentăm mai jos în figura 8.4, unei spire parcurse de un curent cu intensitatea I şi care delimitează o suprafaţă a cărei arie este S, având versorul normalei la suprafaţă $\vec{n}$, *i se asociază un moment magnetic* $\vec{m}$ *definit prin relaţia:*

$$\vec{m} = SI\vec{n} \tag{8.52}$$

Plasată într-un câmp de inducţie $\vec{B}$ *neomogen,* spira va fi acţionată *de un cuplu.*

$$\vec{C} = \vec{m}\times\vec{B} \tag{8.53}$$

şi *de o forţă*

$$\vec{F} = \left(\vec{m}\nabla\right)\vec{B} \tag{8.54}$$

ambele independente de forma buclei plane, depinzând doar de momentul magnetic. Evident, *dacă* $\vec{B}$ *este omogen, forţa* $\vec{F}$ *va fi nulă. Datorită prezenţei câmpului magnetic omogen cuplul definit de* (8.53) *va roti spira pentru a o plasa în starea cu energie potenţială minimă.*

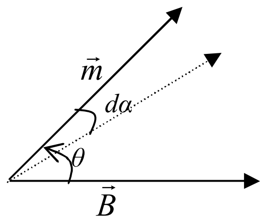

Figura 8.4

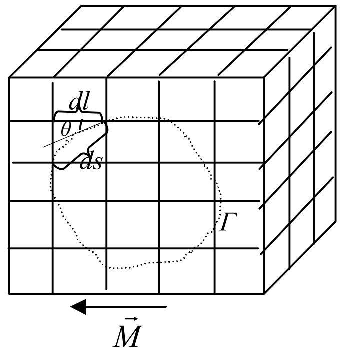

Figura 8.5

Lucrul mecanic elementar efectuat la o mică rotaţie $d\alpha = -d\theta$ va fi egal cu scăderea $-dE_p$ a energiei potenţiale E_p

$$dL = Cd\alpha = -\, dE_p \tag{8.55}$$

sau

$$-\, dE_p = dL = m\cdot B\sin\alpha d\alpha = -\, mB\sin\theta d\theta = d(mB\cos\theta) \tag{8.56}$$

Prin integrare se obţine:

$$E_p = -mB\cos\theta + const. = -\vec{m}\vec{B} + const. \tag{8.57}$$

Alegând constanta nulă, *rezultă că un sistem cu moment magnetic* $\vec{m}$ *plasat într-un câmp magnetic omogen, posedă energia potenţială*

$$E_p = -\vec{m}\vec{B} \tag{8.58}$$

Acţiunea unui câmp magnetic neomogen asupra unui mediu magnetizabil de volum V şi moment magnetic $\vec{m}$ se traduce prin cuplul şi forţa definite de (8.53) şi (8.54).

Se defineşte ***densitatea volumică de moment magnetic*** $\vec{M}$ numită şi ***intensitate de magnetizare*** sau ***magnetizaţie*** prin relaţia,

$$\vec{m} = \int_V d\vec{m} = \int_V \vec{M} dV \tag{8.59}$$

astfel că relaţiile (8.53) şi (8.54) , devin:

$$\vec{C} = \int_V \left(\vec{M} \times \vec{B}\right) dV \tag{8.60}$$

$$\vec{F} = \int_V \left(\vec{M}\nabla\right)\vec{B} dV \tag{8.61}$$

Figura (8.5) prezintă un mediu magnetizat în care s-a considerat un microdomeniu de lungime $d\vec{l}$ şi secţiune $d\vec{S}$ ce conţine curentul amperic dI_m, caracterizat de momentul magnetic $dI_m dS\vec{n}$. Prelucrăm ultimul integrant din (8.61) :

$$\vec{M}\, dV = \vec{M}\cdot dl\cdot dS \tag{8.62}$$

Cum $dI_m = M\cdot dl$ ($\vec{M}$ *fiind paralel cu* $\vec{n}$)şi $dl = ds\cdot\cos\theta$ ($d\vec{l}$ *fiind paralel cu* $\vec{M}$), rezultă

$$dI_m = M\cdot ds\cdot\cos\theta = \vec{M}\, d\vec{s} \tag{8.63}$$

Integrând relaţia obţinem curentul amperic I_m ce traversează suprafaţa S delimitată de curba Γ.

$$I_m = \oint_{\Gamma} \vec{M} d\vec{s} = \oint_{S} \left(\nabla \times \vec{M} \right) d\vec{S} \qquad (8.64)$$

Pe de altă parte,

$$I_m = \oint_{S} \vec{j}_m \, d\vec{S} \qquad (8.65)$$

astfel că

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_m \qquad (8.66)$$

Comparând această relaţie cu $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_m$ deducem că

$$\vec{M} = \vec{H}_m + \nabla \psi \qquad (8.67)$$

în care ψ este o funcţie, scalară arbitrară.Aşadar dacă se plasează un mediu magnetizat într-un câmp magnetic, atunci în ecuaţia câmpului rezultat trebuie să se includă atât curenţii de conducţie cât şi cei amperici. În consecinţă, vom scrie:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_m \qquad (8.68)$$

sau ţinând seama de (8.66) se obţine relaţia:

$$\nabla \times \left(\vec{H} - \vec{M} \right) = \vec{j} \qquad (8.69)$$

Această relaţie exprimă ***legătura între curenţii amperici şi magnetizaţie***.

8.3.2 MEDII MAGNETIZABILE ŞI MEDII MAGNETICE

Câmpul magnetic poate produce magnetizări în substanţe. La rândul lor acestea în urma magnetizării produc modificări în câmpul magnetic inductor ca urmare a suprapunerii câmpului magnetic indus peste câmpul magnetic inductor, astfel că se poate scrie:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \qquad (8.70)$$

În această relaţie, $\vec{M}$ este ***magnetizaţia indusă în substanţă*** *de câmpul magnetizant* $\vec{H}$. În vid, $\vec{M} = 0$ şi

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (8.71)$$

Nu toate substanţele plasate în câmp magnetic se comportă la fel. Unele se magnetizează mai intens, altele nu se magnetizează deloc. Unele păstrează magnetizarea, altele nu. De aceea se dovedeşte a fi necesară o *clasificare a substanţelor din punctul de vedere al comportării lor atunci când sunt plasate într-un câmp magnetic*. În acest sens, deosebim:

- ***substanţe magnetic dure*** pentru care magnetizaţia manifestă două componente: o componentă $\vec{M}_t$ care depinde de intensitatea $\vec{H}$ a câmpului inductor şi care se numeşte ***magnetizaţie temporară*** şi o componentă $\vec{M}_r$ numită ***magnetizaţie remanentă*** (sau permanentă) care depinde de asemenea de $\vec{H}$ dar nu biunivoc.

$$\vec{M} = \vec{M}_t \left(\vec{H} \right) + \vec{M}_r \qquad (8.72)$$

- ***substanţe magnetic moi*** care nu manifestă magnetizaţie remanentă.
- ***mediile liniare*** în care magnetizarea este proporţională cu $\vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad (8.73)$$

constanta de proporţionalitate χ_m numită ***susceptivitate magnetică*** a substanţei fiind aproximativ independentă de $\vec{H}$ iar magnetizaţia remanentă fiind absentă ($\vec{M}_r = 0$).

- ***medii izotrope*** în care χ_m este o funcţie scalară de $\vec{H}$ aceeaşi în fiecare punct al mediului pentru mediile *omogene*.
- ***medii anizotrope*** caracterizate printr-un *tensor susceptivitate* ale cărui componente sunt dependente de $\vec{H}$.
- ***medii feromagnetice*** în care $\chi_m > 0$ de valoare mare, puternic dependentă de $\vec{H}$.
- ***medii paramagnetice*** ce manifestă de asemenea susceptivitate magnetică pozitivă, de valoare mică fiind practic independentă de $\vec{H}$.
- ***medii diamagnetice*** cu $\chi_m < 0$, de valoare mică, practic independentă de $\vec{H}$.

Magnetizarea acestor substanţe se produce astfel încât vectorul $\vec{M}$ va fi orientat în sens invers câmpului inductor. *Toate substanţele magnetice sunt mai mult sau mai puţin diamagnetice* însă diamagnetismul lor se poate identifica numai dacă nu este mascat de feromagnetism sau paramagnetism. Dependenţa analitică a lui χ_m *de* $\vec{H}$ nu se cunoaşte, însă se pot face estimări experimentale care evidenţiază caracteristicile magnetice ale substanţei.

Relaţiile (8.31) şi (8.73) conduc la $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$ în care, $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$ reprezintă ***permeabilitatea magnetică*** *a substanţei respective*, iar raportul $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$ reprezintă ***permeabilitatea magnetică relativă***.