CURS 7

ELECTRICITATE ŞI ELECTROMAGNETISM

"*Particulele elementare"* privite ca *cele mai mici entităţi din care este alcătuită materia, "câmpul " ca formă alternativă* de existenţă a materiei *şi "mişcarea"* infinită în timp, continuă şi perpetuă sunt elemente fundamentale implicate în orice formă de interacţiune. Aceste trei elemente sunt într-o permanentă interdependenţă şi se presupun reciproc. Nu există câmpuri (gravitaţional, electromagnetic, etc.) în afara prezenţei particulelor care le generează iar existenţa câmpurilor este marcată de interacţiunile între acestea şi particule. De asemenea, nu există particule caracterizate de un repaus absolut. Chiar dacă particula privită ca ansamblu pare a fi în repaus, elementele sale constituente sunt animate de mişcări continui şi perpetue.Deosebim în acest sens mişcări interatomice, internucleare, etc.Universul este un edificiu cu o structură infinită ce conţine corpuri, câmpuri şi mişcare, în interacţiune. *Orice particulă considerată ca "elementară"* are structură internă materială sau sub formă de câmp şi cercetările actuale confirmă această ipoteză arătând că nici măcar protonii şi neutronii nu pot fi considerate"elementare", acestea la rândul lor manifestând o structură internă.

Fenomenele electromagnetice presupun existenţa ***sarcinii electrice***. ***Masa*** şi ***spinul*** sunt de asemenea alte două elemente definitorii pentru aceste interacţiuni. În natură, există corpuri ***încărcate electric*** şi corpuri ***neutre*** din punct de vedere electric. Acestea din urmă pot deveni încărcate electric intervenind – *într-un anume fel* – din exterior.

Corpurile încărcate electric interacţionează prin forţe de atracţie sau de respingere. Se consideră că există două *clase* de corpuri încărcate electric, cu alte cuvinte două feluri de sarcini numite- *prin convenţie* - ***sarcină pozitivă*** (+) respectiv, ***sarcină negativă*** (-);

- *sarcina electrică are un caracter aditiv şi se poate transfera de la un corp la altul.* Prin transfer de sarcină corpurile încărcate electric pot schimba clasa sau pot deveni neutre.
- *în cazul unui sistem izolat de orice acţiune electrică exterioară, sarcina totală a sistemului rămâne constantă în timp* (***legea conservării sarcini electrice***);
- *într-un mediu omogen şi izotrop două corpuri considerate **punctiforme** şi în repaus încărcate cu sarcinile $q_1 = const.$ şi $q_2=const.$, interacţionează printr-o forţă exprimată prin **legea lui Coulomb***

$$\vec{F}_{12} = const\frac{q_1 q_2}{r_0^3}\cdot\vec{r}_0 \qquad (7.1)$$

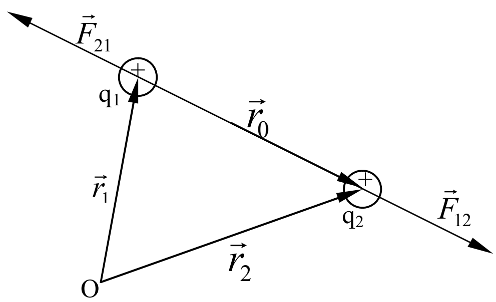


Figura 7.1

în care *constanta depinde de natura mediului* şi are valoarea exprimată în Sistemul Internaţional, $const = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$.În această relaţie, ε este o *constantă de material* care caracterizează mediul din punct de vedere electric şi se numeşte ***permitivitate electrică*** a mediului.

În cazul vidului permitivitatea electrică se notează cu ε_0 şi are valoarea *8,854* $\cdot 10^{-12}$ *Farad / metru.* Se defineşte şi ***permitivitatea relativă*** $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ prin raportul

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{7.2}$$

şi *este o mărime adimensională*;

- sarcina electrică este *cuantificată*, ***cuanta de sarcină*** fiind sarcina numită ***elementară*** şi căreia i se atribuie valoarea $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *coulombi*;
- *la viteze relativiste sarcina electrică a corpurilor este relativist – invariantă*;
- acţiunea unui ansamblu de sarcini electrice q_i asupra unei singure sarcini q_0 se produce în con formitate **cu** ***principiul independenţei acţiunii forţelor*** : *"fiecare sarcină* q_I *acţionează asupra sarcinii* q_0 *cu forţa cu care ar acţiona dacă toate celelalte sarcini ar lipsi".*
  În acest sens forţa rezultantă ce va acţiona asupra sarcinii q_0 va fi -în conformitate cu *principiul suprapunerii* sau *superpoziţiei-* dată de relaţia:

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{i0} \tag{7.3}$$

  în care $\vec{e}_{i0}$ reprezintă *versorul direcţiei* $\vec{r}_i$ care uneşte sarcinile q_i *şi* q_0. $\vec{e}_{i0} = \dfrac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$.

Pentru ca legea lui Coulomb să funcţioneze este necesar ca sarcinile să nu varieze în timp caz în care ne-am confrunta cu un ***proces de propagare***;

- definim ***intensitatea câmpului electrostatic*** $\vec{E}$, ca fiind "*forţa care acţionează asupra unităţii de sarcină*". Prin urmare mărimea $\vec{E}$ este o mărime vectorială fiind de fapt *o forţă specifică.*

$$\vec{E} = \frac{1}{q} \cdot \vec{F} \tag{7.4}$$

- *c*âmpul electrostatic se reprezintă prin *linii de câmp ce* - convenţional - *pornesc de pe sarcinile pozitive şi se opresc pe sarcinile negative.* ***Liniile de câmp*** *sunt curbe tangente în fiecare punct vectorului* $\vec{E}$ *asociat intensităţii câmpului electrostatic în punctul respectiv;*
- se admite *continuitatea sarcinii electrice şi a materiei* în sensul că acestea se pot diviza continuu astfel că – fără a afecta rezultatele ce descriu realitatea – se operează cu mărimea $\vec{E}$ considerată a fi $\vec{E} = \lim\limits_{q \to 0} \frac{1}{q} \vec{F}$.

7.1 REGIMUL STATIC

Legea lui Coulomb este valabilă numai pentru sarcinile punctiforme în repaus şi a căror "încărcare" este constantă în timp. De asemenea aplicabilitatea ei nu a putut fi confirmată pentru distanţe mai mari de 10^4 *m* în schimb s-a observat că peste 10^4 *m* legea îşi încetează valabilitatea. ***Regimul static*** presupune sarcini fixate în anumite puncte din spaţiu. "Fixarea" sarcinilor se realizează prin "echilibrarea" reciprocă a forţelor care le solicită. Aceste forţe pot fi atât de natură electrică cât şi de natură mecanică şi pot fi generate de *distribuţii* de particule încărcate situate în vecinătatea particulei fixate.

7.1.1 DISTRIBUŢIILE DE SARCINĂ ELECTRICĂ

Referindu-ne la figura 7.2 vom scrie expresia intensităţii câmpului electrostatic $\vec{E}(\vec{r})$ produs *în vid* de sarcina q într-un punct marcat de vectorul de poziţie $\vec{r}$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \qquad (7.5)$$

Această expresie , conţine în mod implicit versorul

$$\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_1} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

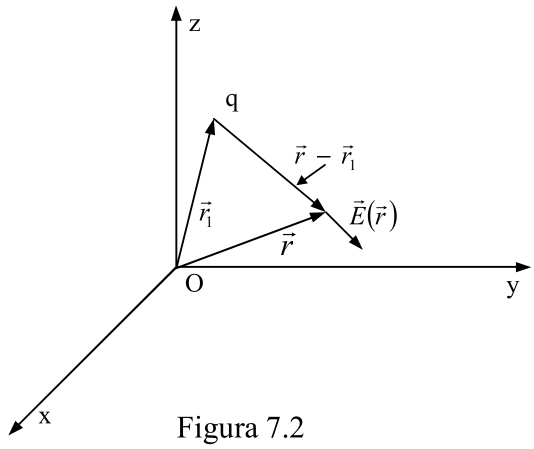


Figura 7.2

Distribuţiile de sarcină pot fi ***discrete*** (sarcini punctiforme separate) sau ***continui*** (sarcini punctiforme atât de apropiate încât dispunerea lor poate fi asimilată unui "conglomerat"cu comportare continuă din punctul de vedere al proprietăţilor sale electrice).

În *cazul unei* ***distribuţii discrete*** *de sarcini punciforme aflate în vid* $(\varepsilon = \varepsilon_0)$,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \qquad (7.6)$$

Distribuţia continuă în volum este caracterizată de mărimea ρ definită prin relaţia:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \qquad (7.7)$$

şi denumită ***densitate volumică de sarcină*** iar *distribuţia continuă pe suprafaţă* prin ***densitatea superficială de sarcină,*** σ **:**

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \qquad (7.8)$$

În acest fel,sarcina electrică totală conţinută pe suprafaţa S şi volumul V, se va scrie

$$q = \int_V \rho \, dV' + \int_S \sigma \, dS'' \qquad (7.9)$$

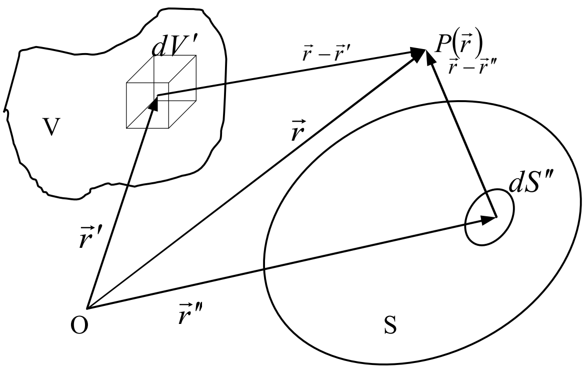


Figura 7.3

Corespunzător, câmpul electrostatic generat în vid de o distribuţie continuă de sarcini într-un punct $P(\vec{r})$ va rezulta din

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma(\vec{r}'') \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} dS'' \qquad (7.10)$$

S-au folosit notaţiile din figura 7.3. Considerând scrierea pe componente a vectorului de poziţie

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (7.11)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind versorii axelor de coordonate *Ox,Oy*, şi respectiv *Oz.*) şi a ***operatorului gradient*** ∇,

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (7.12)$$

expresia (7.5) devine:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) \tag{7.13}$$

În această expresie este conţinută *funcţia scalară*

$$\varphi(\vec{r}) \equiv -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + const \tag{7.14}$$

care permite scrierea relaţiei (7.13) sub forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \tag{7.15}$$

Prin convenţie se consideră $\varphi\ (\infty) = 0$. Recunoaştem astfel în relaţia de definiţie (7.14) mărimea electrică scalară $\varphi(r)$ numită ***potenţial electrostatic*** *definită până la o constantă arbitrară* ce reprezintă *nivelul de referinţă* al potenţialului electrostatic.

Pentru o ***distribuţie discretă*** de *N* sarcini punctiforme potenţialul astfel introdus se va scrie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + const \tag{7.16}$$

iar pentru ***distribuţii continue***,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,'')}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}dS'' \tag{7.17}$$

Să considerăm un câmp electrostatic oarecare şi o sarcină "de probă" q_0 care se deplasează în acest câmp. Pentru ca sarcina q_0 să rămână în repaus în vârful vectorului $\vec{r}$ la orice moment de timp, asupra ei trebuie să acţioneze o forţă mecanică $\vec{F}_m(\vec{r})$ care să echilibreze forţa electrică $\vec{F}_e(\vec{r}) = -q_0\vec{E}(\vec{r})$ aşa cum se schiţează în figura 7.4.

Calculăm lucrul mecanic efectuat de forţa exterioară $\vec{F}_m(\vec{r})$ pentru a deplasa sarcina q_0 din punctul iniţial P_1 până în punctul final P_2 al câmpului.Lucrul mecanic elementar efectuat de forţa $\vec{F}_m(\vec{r})$ pentru a deplasa sarcina q_0 pe elementul de lungime $d\vec{l}$ al traiectoriei punctate, se scrie:

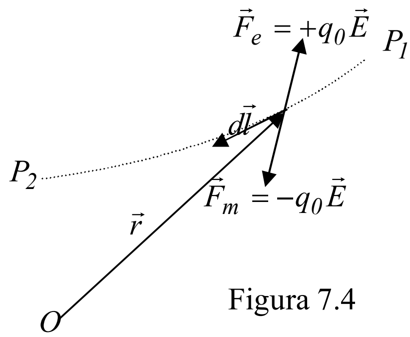


Figura 7.4

$$d\mathcal{L} = \vec{F}_m(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -q_0\vec{E}(\vec{r})d\vec{l} \tag{7.18}$$

Prin integrarea acestei relaţii se obţine lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}_m$ pentru a deplasa sarcina din $P_1(\vec{r}_1)$ în $P_2(\vec{r}_2)$:

$$\mathcal{L} = \int_{P_1}^{P_2} d\mathcal{L} = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_m(\vec{r})d\vec{l} = -q_0\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = q_0\int_{r_1}^{r_2}\nabla\varphi\, d\vec{l} = q_0\int_{P_1}^{P_2} d\varphi = q_0(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{7.19}$$

Am folosit relaţiile: $\nabla\varphi = +\frac{d\varphi}{dr}\, vers\ \vec{r} = \frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r$ şi $\vec{e}_r \cdot d\vec{l} = dl\cos\theta = dr$.

Relaţia (7.19) arată că *pe un contur închis integrala se anulează*. Pentru a interpreta rezultatul este necesar să subliniem că sarcina q_0 numită *de probă*, materializează existenţa câmpului electric în spaţiu şi se deplasează pe o traiectorie ce are proprietatea că pentru o sarcină de probă de mărime unitate*, tangenta la traiectorie în fiecare punct în care se găseşte sarcina, coincide cu direcţia vectorului intensitate a câmpului electric* iar *forţa ce acţionează asupra acestei sarcini unitate este chiar intensitatea câmpului electrostatic în acel punct*. Aşadar,dacă trasăm curbele care au ca tangente în fiecare punct al lor vectorul intensitate a câmpului electric corespunzător punctului respectiv, obţinem aşa numitele ***linii de câmp electric.*** *Câmpul ale cărui linii sunt paralele şi echidistante se numeşte* ***câmp omogen***.

Revenind la relaţia (7.19) vom numi ***circulaţie*** a vectorului $\vec{a}$ *pe curba închisă Γ*, integrala $\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l}$ şi vom constata că *în cazul câmpului electrostatic circulaţia vectorului intensitate a câmpului este nulă.*

7.1.2 FLUXUL ELECTRIC PRINTR-O SUPRAFAŢĂ ÎNCHISĂ

Să considerăm o sarcină punctiformă q în interiorul unei suprafeţe închise S. *Prin definiţie,* ***fluxul*** câmpului electric produs de sarcina q prin suprafaţa S este:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS \qquad (7.20)$$

în care s-a notat cu dS *un element de arie de pe suprafaţa* S şi cu $\vec{n}$ *versorul normalei exterioare al elementului de arie*, ca în figura 7.5. Alegem originea sistemului de coordonate în punctul în care se află sarcina q. În această configuraţie, intensitatea câmpului electric $\vec{E}(\vec{r})$ în vid se scrie:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (7.21)$$

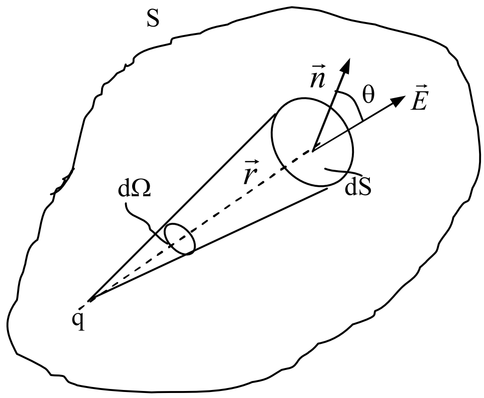


Figura 7.5

Fluxul total al vectorului $\vec{E}(\vec{r})$ prin suprafaţa S se va obţine integrând peste toate elementele de suprafaţă dS conţinute pe întreaga suprafaţă S:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} \qquad (7.22)$$

sau ţinând seama de expresia elementului de unghi solid $d\Omega$ sub care se vede din origine elementulde suprafaţă $dS, d\,\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$ expresia (6.22) devine $\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$. Rezultă că pentru o sarcină plasată în interiorul suprafeţei ($\oint d\Omega = 4\pi$), $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ iar pentru o sarcină exterioară, fluxurile prin elementele de suprafaţă opuse se anulează reciproc rezultând un flux total, nul. Aceste constatări exprimă ***teorema lui Gauss***.

În ***cazul distribuţiei volumice***, $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ şi aplicăm *teorema Gauss – Ostrogradski*:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \int_V \nabla\vec{E} \cdot dV \qquad (7.23)$$

expresie din care se obţine prin identificare,

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = \rho \tag{7.24}$$

dacă distribuţia volumică de sarcină se află în interiorul suprafeţei, sau

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = 0 \tag{7.25}$$

când distribuţia de sarcină este plasată în exterior.

Relaţiile (7.24) şi (7.25) conţin operatorul ***divergenţă*** care pentru un vector $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ se scrie:

$$\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

şi se citeşte "*divergenţă din $\vec{a}$* ". Aceste relaţii exprimă ***forma diferenţială a teoremei lui Gauss***.
Prin folosirea *teoremei lui Stokes* se obţine încă

$$\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \vec{n}\, dS = 0 \tag{7.26}$$

din care rezultă

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{7.27}$$

Ultimele două relaţii folosesc operatorul "***rotor***"care pentru un vector oarecare $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, se scrie în coordonate carteziene:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

şi se citeşte ***rotor din*** $\vec{a}$. Dacă în relaţia (7.24) se consideră relaţia (7.15) se obţine ***ecuaţia Poisson***

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.28}$$

care se scrie în coordonate carteziene: $\nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ şi defineşte în membrul stâng al ultimei egalităţi, "***laplaceianul***" sau ***operatorul lui Laplace*** notat cu *"Δ"* sau cu *"∇^2"*. În punctele din spaţiu în care nu există sarcină electrică, $\rho(x, y, z) = 0$, ecuaţia (7.28) se scrie

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0 \tag{7.29}$$

şi se numeşte ***ecuaţia lui Laplace***.

7.1.3 CONSTANTE ELECTRICE "DE MATERIAL"

Teoria fenomenologică arată că *intensitatea de polarizare depinde de intensitatea câmpului electric:* $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$.Această dependenţă se stabileşte experimental. S-a constatat că o clasă importantă de dielectrici manifestă *proporţionalitate* între $\vec{P}$ *şi* $\vec{E}$ *cu conservarea direcţiei şi sensului vectorilor*:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \tag{7.30}$$

Mărimea χ_e se numeşte ***susceptivitate electrică*** şi *în mediile izotrope se comportă ca o mărime scalară*. Se observă că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \tag{7.31}$$

sau

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{7.32}$$

în care

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \tag{7.33}$$

reprezintă ***permitivitatea mediului dielectric***. Se obţine pentru *permitivitatea relativă* ε_r *expresia* $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$, care compară permitivitatea mediului dielectric ε cu aceea a vidului ε_0 .*În cazul mediilor liniare* însă *anizotrope*, atât susceptivitatea χ_e cât şi permitivitatea ε sunt mărimi *tensoriale*, componentele intensităţii de polarizare $\vec{P}$ fiind funcţii liniare de componentele câmpului electric $\vec{E}$.

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 \left(\chi^0_{xx} E_x + \chi^0_{xy} E_y + \chi^0_{xz} E_z \right) \\ P_y &= \varepsilon_0 \left(\chi^0_{yx} E_x + \chi^0_{yy} E_y + \chi^0_{yz} E_z \right) \\ P_z &= \varepsilon_0 \left(\chi^0_{zx} E_x + \chi^0_{zy} E_y + \chi^0_{zz} E_z \right) \end{aligned} \tag{7.34}$$

Aceste relaţii definesc matricea ***tensorului de susceptivitate electrică:***

$$\chi^0 = \begin{pmatrix} \chi^0_{xx} & \chi^0_{xy} & \chi^0_{xz} \\ \chi^0_{yx} & \chi^0_{yy} & \chi^0_{yz} \\ \chi^0_{zx} & \chi^0_{zy} & \chi^0_{zz} \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

7.1.4 DIPOLUL ELECTRIC

Numim ***dipol electric*** un sistem de două sarcini punctiforme egale ca mărime şi de semne contrarii situate la o distanţă *l* una faţă de cealaltă.(figura 7.6). Dipolului electric i se asociază

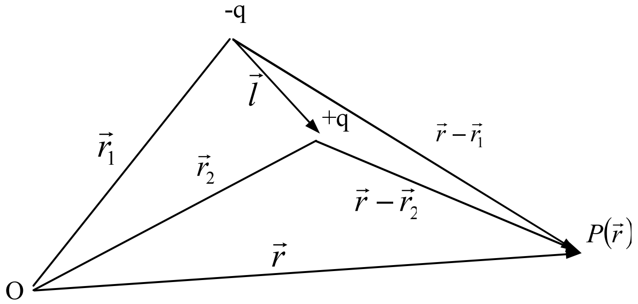


Figura 7.6

momentul electric dipolar $\vec{p}$ definit prin relaţia $\vec{p} = q\vec{l}$.

Potenţialul creat de câmpul dipolului în punctul $P(\vec{r})$,se obţine conform principiului superpoziţiei

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right] \text{ sau } \varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right] \qquad (7.36)$$

Vom scrie ţinând seama că $l << r$:

$$\left(|\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{l}|\right)^{-1} = \left[\left(\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{l}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[(\vec{r}-\vec{r}_1)^2 - 2(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{l} + l^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\left[1 + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} + \ldots\right] \simeq \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \vec{l}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) \qquad (7.37)$$

astfel că expresia (7.36) devine:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^{(1)}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) \qquad (7.38)$$

în care $\nabla^{(1)} \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y_1} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z_1}$ se referă la coordonatele vectorului de poziţie $\vec{r}_1$. Relaţiile (7.38) şi (7.15) permit calculul intensităţii câmpului electric produs de dipol.

7.1.5 POLARIZAŢIA ELECTRICĂ.

Toate mărimile fizice exprimate până acum au fost estimate pentru vid $(\varepsilon = \varepsilon_0)$. Alte medii pot influenţa semnificativ rezultatele. Există substanţe – *numite **dielectrici*** – care introduse într-un câmp electric ***se polarizează***, adică *atât în volumul cât şi pe suprafaţa lor apar sarcini electrice numite* ***sarcini de polarizare***. Un câmp electric omogen acţionează asupra dielectricului polarizat printr-un *cuplu* şi o *forţă*. Se admite că orice dielectric iniţial neutru din punct de vedere electric conţine dipoli microscopici şi uniform distribuiţi în volumul dielectricului. Câmpul electric exterior orientează sarcinile pozitive în sensul lui iar pe cele negative în sens invers. Fenomenul este prezent în tot corpul, *orice element de volum comportându-se ca un mic dipol. Starea electrică a unui corp polarizat electric este caracterizată printr-o mărime vectorială* $\vec{p}$, *numită* ***moment electric*** al corpului respectiv *univoc definit de forţa* $\vec{F} = \nabla\cdot\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$ şi *de cuplul* $\vec{C} = \vec{p}\times\vec{E}$ corpul fiind în repaus.

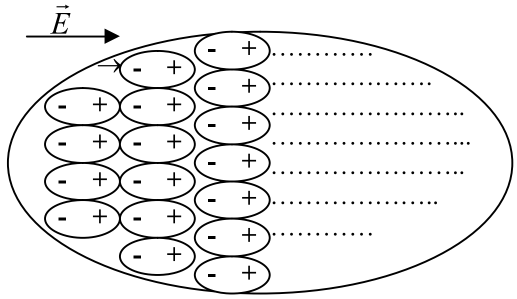


Figura 7.7

Numim ***intensitate de polarizare electrică*** sau ***polarizaţie electrică***, *momentul electric al unităţii de volum:*

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad (7.39)$$

Rezultă *pentru momentul electric dipolar al elementului de volum*

$$d\vec{p} = \vec{P}dV \qquad (7.40)$$

Potenţialul câmpului creat în vid de acest element de volum, considerat dipol elementar se scrie conform relaţiei (7.38):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{P}(r_1)\cdot\nabla^{(1)}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)\right]dV^{(1)} \tag{7.41}$$

iar *potenţialul creat de întregul corp*, se obţine prin integrare

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}_1)\cdot\nabla^{(1)}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)dV^{(1)} \tag{7.42}$$

Notând $\alpha \equiv \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$ şi $\vec{a} \equiv \vec{P}$ şi folosind relaţia vectorială $\nabla(\alpha\vec{a}) = \alpha\nabla\vec{a} + \vec{a}\nabla\alpha$ se obţine

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(-\nabla\vec{P})}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dV^{(1)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla\left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)dV^{(1)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(-\nabla\vec{P})}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dV^{(1)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{P}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dS^{(1)}\end{aligned} \tag{7.43}$$

Ultima egalitate provine din aplicarea teoremei Gauss – Ostrogradski. Prin analogie cu (7.17), expresia $(-\nabla\vec{P})$ poate fi interpretată ca ***fiind densitatea de volum a sarcinilor de polarizare*** iar $\vec{P}\cdot\vec{n}$ ca fiind ***densitatea de suprafaţă a sarcinilor de polarizare***.

$$\rho_p = -\nabla\vec{P} \text{ şi } \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}\,. \tag{7.44}$$

Aşadar, în urma polarizării substanţei, aceasta va produce un câmp electric datorat sarcinilor de polarizare în volum ρ_p şi pe suprafaţă σ_P. Într-un mediu omogen şi izotrop, intensitatea de polarizare $\vec{P}$ este aceeaşi în orice punct al mediului astfel că - în acest caz- $\rho_P = 0$ şi drept consecinţă vor apare sarcini de polarizare numai pe suprafaţa de separare a mediului.

7.1.6 INDUCŢIA ELECTRICĂ. TEOREMA LUI *GAUSS* PENTRU MEDIILE DIELECTRICE

Considerăm un mediu dielectric în interiorul căruia se află o distribuţie discretă de sarcini electrice q_1, q_2, ..., q_n aşa cum se poate urmări în figura 7.8. Această distribuţie de sarcină va polariza dielectricul şi conform (7.9) şi (7.44) va apare o sarcină de polarizare q_p dată de relaţia:

$$q_p = \int_{S'} \vec{P}\cdot\vec{n}'dS' + \int_V (-\nabla\vec{P})dV \tag{7.45}$$

în care S' reprezintă aria totală a suprafeţelor de discontinuitate:

$$S' = S_1+S_2+\ldots+S_n \tag{7.46}$$

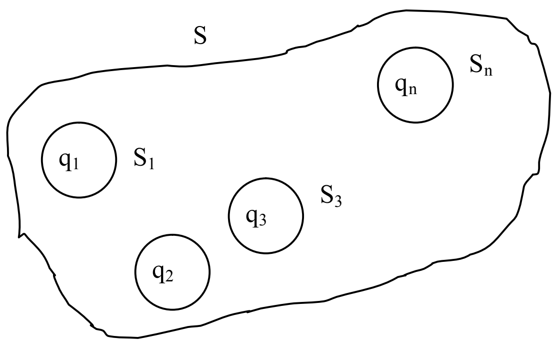


Figura 7.8

Folosind în (7.45) teorema Gauss –Ostrogradski obţinem:

$$-\int_V \nabla\vec{P}\cdot dV = -\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}dS - \int_{S'} \vec{P}\cdot\vec{n}'dS' \tag{7.47}$$

Rezultă

$$q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS \tag{7.48}$$

şi câmpul electric din dielectric va rezulta din însumarea câmpului electric produs de distribuţia discretă $q=q_1+q_2+...+q_n$ şi a câmpului produs de sarcina de polarizare q_p. Fluxul câmpului electric rezultant prin suprafaţa S se va scrie conform teoremei lui Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\ dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + q_p\right) \tag{7.49}$$

sau

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot \vec{n} \cdot dS = q \tag{7.50}$$

Această relaţie permite considerarea unui nou vector de câmp $\vec{D}$ numit ***inducţie electrică*** (sau ***deplasare electrică***)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{7.51}$$

astfel că (7.50) devine:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q \tag{7.52}$$

Rezultă că *fluxul inducţiei electrice prin suprafaţa S este determinat numai de sarcinile* $q_1, q_2, \ldots, q_n$. În cazul *distribuţiei volumice continui de sarcini libere*,

$$\int_V \nabla \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho dV \tag{7.53}$$

din care rezultă ***forma diferenţială a teoremei lui Gauss***

$$\nabla \vec{D} = \rho \tag{7.54}$$

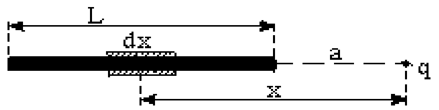
Vom observa că:

- *mărimea* $\vec{E}$ *caracterizează câmpul elecrostatic din punctul de vedere al intensităţii efectelor pe care acesta le poate produce asupra distribuţiilor de sarcini cu care interacţionează;*
- *vectorul* $\vec{D}$ *este definit de sarcina electrică ce generează câmpul;*
- *fluxul vectorului* $\vec{D}$ *nu depinde de sarcinile induse prin polarizare*. De aceea neomogenităţile mediului nu vor conta iar relaţia (6.54) se va păstra şi pentru medii neomogene. *Această relaţie este însă o **relaţie locală**.*

TEME DE CASA (4 -1C)
(APLICAŢII LA CURS)

Tc.4-1C.1: **PROBLEME DE ELECTROSTATICĂ**

1. Se consideră o distribuţie liniară de sarcină pe lungimea *L*. Să se calculeze forţa de interacţiune între această distribuţie de sarcină şi o sarcină *q* situată la o distanţă *a* de distribuţia de sarcină şi pe direcţia acesteia.



2. Stabiliţi expresia cîmpului electric în centrul unui arc semicircular, uniform încărcat.

3. Calculaţi potenţialul φ şi câmpul electric *E* într-un punct situat pe axa unui inel circular de rază *a*, încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină λ.

4. Se consideră un disc izolator de rază *a* şi grosime foarte mică, încărcat cu o sarcină pozitivă *Q* de densitate superficială σ. Calculaţi :

a) potenţialul electric în punctul P situat la distanţa *y* faţă de centrul discului (pe axa de simetrie) pentru cazurile $y > 0, y < 0, y = 0, y >> a$;

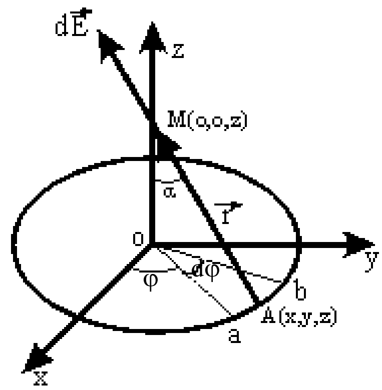
b) câmpul electric prin componentele E_{y+} şi E_{y-} pentru care se cere să se stabilească relaţia.

5. Se consideră o sferă de rază *R* încărcată uniform cu sarcina *Q* şi densitate de sarcină volumică, ρ .Calculaţi energia electrostatică a sferei.

6. Un conductor inelar cu raza *R=1mm* este încărcat uniform cu sarcina *Q=10C*. Fie M un punct pe perpendiculara dusă din centrul conductorului inelar.

a) scrieţi expresia vectorului electric $\vec{E}$ în punctul M şi calculaţi valoarea acestuia.

b) precizaţi poziţia lui M astfel ca în acest punct, valoarea lui *E* să fie maximă şi precizaţi de asemenea acestă valoare.

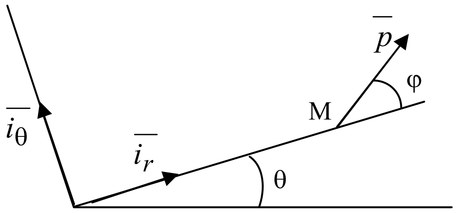


7. Se consideră o placă dreptunghiulară de lungime *2a* şi lăţime *2b*, uniform încărcate electric, cu densitatea superficială de sarcină, σ. Stabiliţi expresia potenţialului electric în centrul de masă al plăcii.

8. Utilizând ecuaţia lui Poisson, stabiliţi expresiile potenţialului şi câmpului electric produs de o sarcină electrică cu densitatea volumică ρ = constant şi care ocupă volumul cuprins între două plane paralele infinite depărtate unul de celălalt la distanţa a.

9. Deduceţi expresiile potenţialului şi intensităţii câmpului electric generat de un dipol electric având momentul dipolar electric, $\vec{p}$.

10. O sarcină punctiformă Q se află în originea O a unui referenţial. Un dipol electric de moment dipolar $\vec{p}$ este plasat într-un punct M. Calculaţi forţa şi momentul forţei exercitate de sarcina Q' asupra dipolului.



11. Stabiliţi expresia energiei electrostatice a unei sfere de rază R încărcată uniform în volum cu sarcina electrică Q.

12. Stabiliţi expresia capacităţii unui condensator cilindric.

13. Stabiliţi expresia capacităţii unui condensator sferic.

14. Să se calculeze potenţialul şi intensitatea câmpului electric în cazul unei plăci infinite de grosime a, încărcată uniform cu sarcină electrică de densitate volumică ρ = const.

15. Precizaţi expresiile potenţialului şi intensităţii câmpului electric generate de un cilindru cu raza a încărcat uniform cu sarcină electrică de densitate volumică $\rho=const$.

16. Între armăturile unui condensator plan paralel, situate la distanţa $d=2,2mm$, legate la bornele unei surse cu tensiune continuă $U = 1\ 000V$, se introduce o placă de sticlă având $\varepsilon_r = 6$, care umple complet spaţiul dintre armături. În cazurile:

1) condensatorul aflat în permanenţă sub tensiunea constantă a sursei de alimentare;

2) înainte de introducerea plăcii de sticlă, condensatorul se deconectează de la sursă să se calculeze: a) densitatea superficială a sarcinilor de polarizare de pe suprafaţa dielectricului b) cu cât se modifică densitatea superficială iniţială a sarcinii de pe suprafaţa armăturilor condensato - rului.

17. În centrul unei sfere dielectrice omogene, de rază R şi de permitivitate relativă ε_r se găseşte o sarcină punctiformă q. Calculaţi densitatea σ_p a sarcinilor de polarizare pe suprafaţa sferei, presupunând că sfera se află în vid.

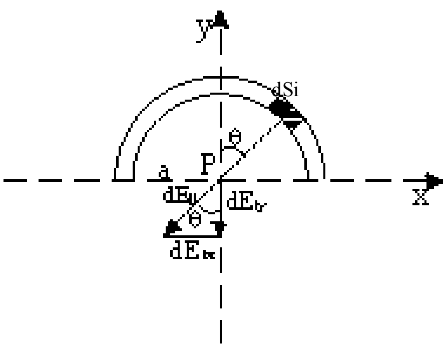
18. Se consideră o sferă de rază R uniform polarizată $\vec{P}$; fie potenţialul $d\varphi$ datorat momentului $d\vec{p} = \vec{P}dV$ corespunzător elementului de volum dV. Să se calculeze potenţialul electromagnetic în interiorul şi exteriorul sferei. Să se calculeze câmpul electric E corespunzător.

Tc.4-1C.2: INDICAŢII ŞI SOLUŢII PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE ELECTROSTATICĂ

1. Fie λ densitatea liniară de sarcină. Sarcina elementară dQ conţinută în elementul liniar dx, rezultă a fi : $dQ = \lambda dx$.Forţa de interacţie între sarcina q şi această sarcină elementară dQ, este:
$dF = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{x^2} = \dfrac{q\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$.Prin integrare obţinem : $F = \dfrac{q\cdot\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_a^{L+a}\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{a(L+a)}$.

*

2.

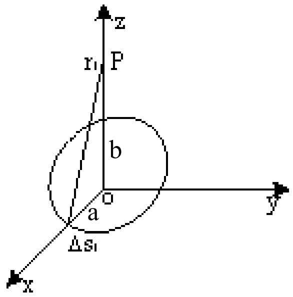


Notăm cu λ densitatea liniară de sarcină distribuită pe arcul de cerc.Sarcina elementară distribuită pe elementul de arc dS_i,va fi egală cu $\lambda\cdot dS_i$.Câmpul electric creat de acest element în punctul P,este $dE_i = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{dS_i}{a^2}$; a fiind raza semicercului. Acest câmp se descompune într-o componentă orizontală dE_{ix} şi o componentă verticală dE_{iy}. Componentele dE_{ix} generate de porţiunea din arc din partea dreaptă a figurii vor fi anihilate de aceleaşi componente generate de porţiunea din arc din partea stângă, astfel că numai componentele dE_{iy} vor contribui la câmpul total în P:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int \cos\theta ds.$$

Observând că elementul de arc ds poate fi exprimat în funcţie de $d\theta$, $ds = rd\theta$, r fiind raza semicercului a cărei valoare este egală cu a, rezultă: $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$.

*

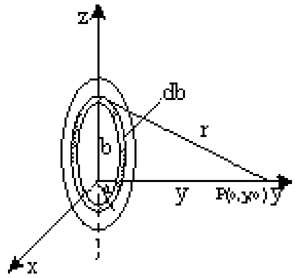


3. Notăm cu b distanţa de la centrul O al inelului la punctul P. Potenţialul φ în punctul P se calcu

lează cu relaţia $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i}$ în care Δq_i sunt sarcinile elementare conţinute în elementele de arc Δs_i ale inelului şi au valorile, $\Delta q_i = \lambda\Delta s_i$. Rezultă, $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}}\oint ds$ şi cum $\oint ds = 2\pi a$ obţinem $\varphi = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}}$. Punctul P are coordonatele $(0,0,z)$, astfel

încât potenţialul φ în lungul axei Oz, va fi $\varphi = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$ şi $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$.

*



4. a) Potenţialul φ_p în punctul $P(0,y,0)$ poate fi calculat cu relaţia $\varphi_p = \int \frac{dq}{r}$. Considerăm pe disc un inel de grosime db care se găseşte la distanţa b de origine. Sarcina conţinută în acest inel, este:

$$dq = \sigma ds = \sigma \cdot 2\pi \cdot b \cdot db = 2\pi\sigma \cdot b \cdot db.$$

Dar $r = \sqrt{y^2+b^2}$. Rezultă,

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dq}{\sqrt{y^2+b^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+y^2} - |y|\right).$$

Deosebim : $\varphi_p(0,y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{y^2+a^2} - y\right)$ pentru $y > 0$, $\varphi_p(0,-y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{y^2+a^2} + y\right)$ pentru $y < 0$, $\varphi_p(0,0,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ pentru $y = 0$.

Pentru $y >> a$, $\sqrt{y^2+a^2} - y = y\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}} - 1\right)$ şi cum $\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{a^4}{y^4} + ...$,

obţinem $\varphi_p \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2} = \frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0 y^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$.

b). Pentru calculul câmpului, ţinem seama că

$$E_{y+} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - y\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right]$$

Analog se obţine $E_{y-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}+1\right]$ şi $E_{y+} - E_{y-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

*

5.Considerăm un strat sferic de rază r şi grosime dr. Lucrul mecanic necesar pentru a încărca acest strat sferic cu sarcina dq este $dL = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}dq$.Sarcina q conţinută în sfera de rază $r < R$ este dată de $q = \rho\cdot\frac{4\pi}{2}r^3$ din care se obţine $dq = 4\pi\rho r^2 dr$ şi $dL = \frac{4\pi\rho r^3}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 4\pi\rho r^2 dr = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 r^4 dr$.

Însă $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$. Rezultă, $dL = \frac{3Q^2}{4\pi R^6\varepsilon_0}r^4 dr$ şi pentru energia electrostatică W a sferei :

$$W = L = \int_0^R \frac{3Q^2}{4\pi R^6\varepsilon_0}r^4 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\cdot R\varepsilon_0}.$$

*

6. Se consideră un element de lungime $dl = \overset{\frown}{ab}$ al conductorului inelar încărcat cu sarcina dQ şi care generează în M vectorul câmp electric elementar $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ în care $\vec{r} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$.

Vom lucra în coordonate cilindrice: $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = z$ iar $dl = Rd\varphi$.Avem, de asemenea $dQ = \lambda dl$ ceea ce presupune $Q = 2\pi R\lambda$. Rezultă, prin integrare

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\left(-R\cos\varphi\vec{i} - R\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}\right)d\varphi$$

şi cum $\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0$ se obţine , $\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot z\vec{k} = \vec{E}(z)$.

Prin anularea derivatei

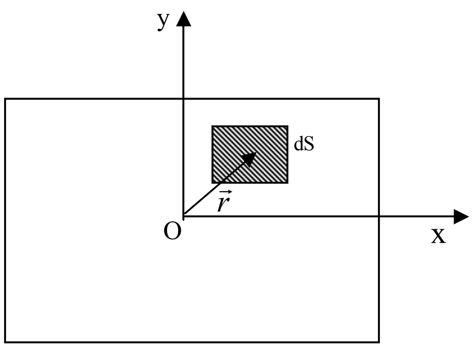
$$\frac{d\vec{E}(z)}{dz} = 0 \ rezultă \ z_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}} \ \text{şi.} \quad E(z_{max}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{R^2} = 2\sqrt{3}\cdot 10^{16}V/m$$

$$E_{y+} - E_{y-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

*

7. Elementul de suprafaţă dS al plăcii, conţine sarcina $dq = \sigma dxdy$ considerată punctiformă care va crea în centrul de masă O al plăcii, potenţialul elementar,

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$



Potenţialul total, φ se va obţine prin integrare asupra tuturor contribuţiilor elementare dS:

$$\varphi_1(o)=\int d\varphi_1=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\int\frac{dxdy}{r}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^b dy\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Integrala $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se calculează cu substituţia Euler:

$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=-x\sqrt{\alpha}+t$ unde- în cazul nostru- $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=y^2$.

Cum $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+\ C$, avem $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=ln\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}$.

Rezultă $I_2=\int_0^b ln\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}dy$ care se efectuează prin părţi notând $u\equiv y$ şi

$v=\frac{ln\left(a+\sqrt{a^2+y^2}\right)}{y}$.Se obţine: $I_2=y\,ln\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}\Bigg|_0^b+a\int_0^b\frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}}$.

În final, rezultă contribuţia unui sfert din placă la valoarea potenţialului :

$$\varphi_1(0)=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[a\,ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b\,ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right]$$

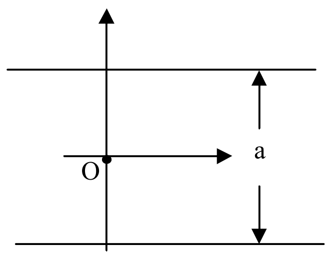
astfel încât pentru intreaga placă, $\varphi(0)=4\varphi_1(0)$

*

8

Planele fiind infinite, potenţialul Φ va depinde doar de coordonata x, iar ecuaţia lui Poisson se scrie : $\frac{d^2\Phi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ .Pentru $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$, ρ este constant şi diferit de zero. Se observă că $\Phi(0)=0$; $\Phi(x)=\Phi(-x)$ şi se poate scrie

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$.



$$\int d\frac{d\Phi}{dx}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int dx\Rightarrow\frac{d\Phi}{dx}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}x+C_1\Rightarrow\int d\Phi=\Phi(x)=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2+C_1x+C_2$$

Câmpul electric $E(x)=-\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}x-C_1$

$$-\,pentru\quad x\notin\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right],\rho=0,\frac{d^2\Phi}{dx^2}=0\Rightarrow\frac{d\Phi}{dx}=C_3\Rightarrow\Phi(x)=C_3x+C_4$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile $\Phi(0)=0$ şi $\Phi(x)=\Phi(-x)$. Rezultă $C_1=C_2=0$.Constantele C_3 şi C_4 se stabilesc prin condiţiile de continuitate a potenţialului

$\Phi(x)$ şi a derivatei sale de ordinul I , $\dfrac{d\Phi}{dx}$ la frontierele $x = \pm\dfrac{a}{2}$.

Obţinem $C_3 = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ şi $C_4 = \dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$, astfel că

- *pentru* $|x| \le \dfrac{a}{2}$: $\Phi(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$; $\quad E(x) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}$
- *pentru* $x > \dfrac{a}{2}$ *şi* $x < -\dfrac{a}{2}$, $\Phi(x) = -\dfrac{\rho a x}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$ *şi* $E(x) = \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}$

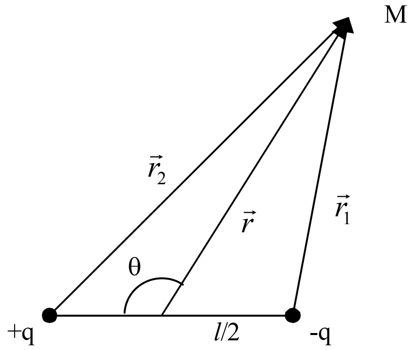
*

9. Amintim că dipolul electric este ansamblul a două sarcini electrice de valoare egală, dar de semne contrarii. Proprietăţile electrice ale acestui sistem sunt stabilite în primă aproximaţie de momentul electric dipolar $\vec{p} = q\vec{l}$.În vid, potenţialul câmpului electric în M este

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

În cazul $r >> l$, $r_1^2 = r^2 + \vec{r}\cdot\vec{l}$, $r_2^2 = r^2 - \vec{r}\vec{l}$ *şi* $r_1^2 - r_2^2 \approx 2\vec{r}\vec{l}$.

Rezultă, $r_1 - r_2 = \dfrac{2\vec{r}\vec{l}}{r_1 + r_2}$, $r_1 + r_2 \cong 2r$ *şi* $r_1 r_2 \cong r^2$.



Cu aceste relaţii, expresia potenţialului devine

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

iar pentru intensitatea câmpului electric al dipolului,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\vec{r}) + \vec{p}\vec{r}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

Avem, pe de altă parte $\nabla\dfrac{1}{r^3} = \nabla\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} = -\dfrac{3r}{r^5}$

şi,

$$\nabla(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{r}\nabla)\vec{p} + (\vec{p}\nabla)\vec{r} + \vec{r}\times\nabla\times\vec{p} + \vec{p}\times\nabla\times\vec{r} = (\vec{p}\nabla)\vec{r}$$

S-a ţinut seama de faptul că $\vec{p} = const$ iar $\Delta\vec{r} = 0$.

Pe de altă parte, $(\vec{p}\nabla)\vec{r} = \left(p_x\dfrac{\partial}{\partial x} + p_y\dfrac{\partial}{\partial y} + p_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} = \vec{p}$.

Se obţine astfel expresia finală a intensităţii câmpului electric creat de un dipol electric:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right).$$

Se observă că potenţialul electric şi intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ scad mai puternic cu distanţa *r* pentru dipolul electric decât pentru sarcinile electrice punctiforme.

$$\varphi_{dipol} \sim \frac{1}{r^2};\ \varphi_q \sim \frac{1}{r};\ E_{dipol} \sim \frac{1}{r^3};\ E_q \sim \frac{1}{r^2}.$$

Caracterizate de momente electrice de dipol, vor interacţiona între ele numai dacă sunt suficient de apropiate.

*

10. Se observă din figura asociată enunţului,că $\vec{p} = p\left(\cos\varphi\, \vec{i}_r + \sin\varphi\, \vec{i}_\theta\right)$.

Ţinând seama de expresia gradientului în coordonate polare plane r şi θ, $\nabla \equiv \vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$

avem: $\vec{p}\nabla = p\left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right]$. Deci: $\vec{F} = \left(\vec{p}\,\nabla\right)\vec{E}$ şi $\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}$ .Rezultă:

$$\vec{F} = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-2\cos\varphi\,\vec{i}_r + \sin\varphi\,\vec{i}_\theta\right] \quad \vec{C}(M) = -\frac{Qp\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{i}_z$$

*

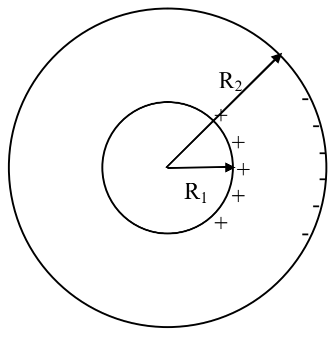
11. Fie ρ densitatea volumică de sarcină cu care se distribuie uniform în volum sarcina Q a sferei.

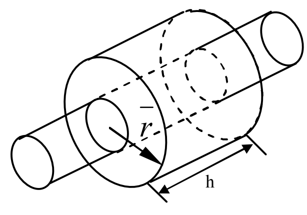
În sfera curentă de rază r este conţinută sarcina: $q' = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$.

Câmpul electric generat de această sarcină, va fi: $E(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{qr^3}{R^3} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}$ iar potenţialul sferei de rază r, se scrie: $\varphi = \int_r^\infty E(r)dr = \frac{q'}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r^2}{R^3}$ .Sarcina electrică conţinută în stratul sferic de grosime dr,este $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$, iar energia potenţială a acestui strat sferic, se scrie: $dW_q = \varphi\, dq = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{r^4}{R^6}dr$ .Obţinem energia electrostatică a sferei,integrând această expresie pentru r cuprins între 0 şi R , $W = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{3}{20\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{R} > 0$ astfel că din punct de vedere mecanic, sistemul este instabil şi poate ceda această energie.

*

12. Notăm cu τ sarcina electrică a unităţii de lungime.





Utilizăm teorema luiGauss $E(r)\cdot 2\pi rh = \frac{\tau h}{\varepsilon_0}$.Rezultă, $E(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{r}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$.

Dacă avem doi cilindri coaxiali intensitatea câmpului electric în porţiunea dintre cilindri pentru $R_1 \le r \le R_2$ rezultă din această relaţie, în timp ce pentru $r > R_2$ şi $r < R_1$, $E = 0$.
Considerăm deci un condensator format din doi cilindri coaxiali de lungime l, fiecare armătură fiind încărcată cu sarcina q, $\tau = \frac{q}{l}$.Dacă între armături avem un dielectric cu permitivitatea relativă ε_r, câmpul între armături, este: $E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{q}{lr}$ iar diferenţa de potenţial între armături este

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}ln\frac{R_2}{R_1}$ şi capacitatea condensatorului, va fi

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

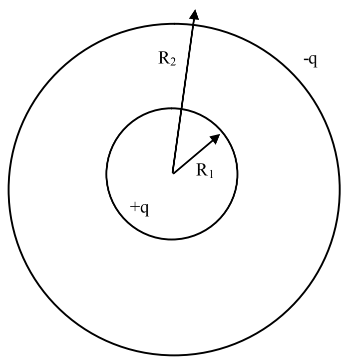
Notând cu $d = R_2 - R_1$, în cazul $d<<R_1$, $ln\frac{R_2}{R_1} = ln\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right) = ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \approx \frac{d}{R_1}$.

Întrucât dacă $\alpha << 1$, $ln(1+\alpha) \approx \alpha$, $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r lR_1}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$, $S = 2\pi lR_1$ fiind aria suprafeţei armă - turii. Se obţine astfel capacitatea unui condensator plan.

*

13. Câmpul electric $E(r)$ în interiorul dielectricului aşa cum rezultă prin aplicarea teoremei lui Gauss, se exprimă prin:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & pentru\ r < R_1\ şi\ r > R_2 \end{cases}$$



Diferenţa de potenţial dintre armături

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}$$

În definitiv rezultă expresia capacităţii condensatorului sferic:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

Şi din această expresie se poate deduce expresia capacităţii condensatorului plan notând $d \equiv R_2 - R_1$, în cazul $d<<R_1, R_1 \cong R_2 = R$ şi $4\pi R^2 = S$.

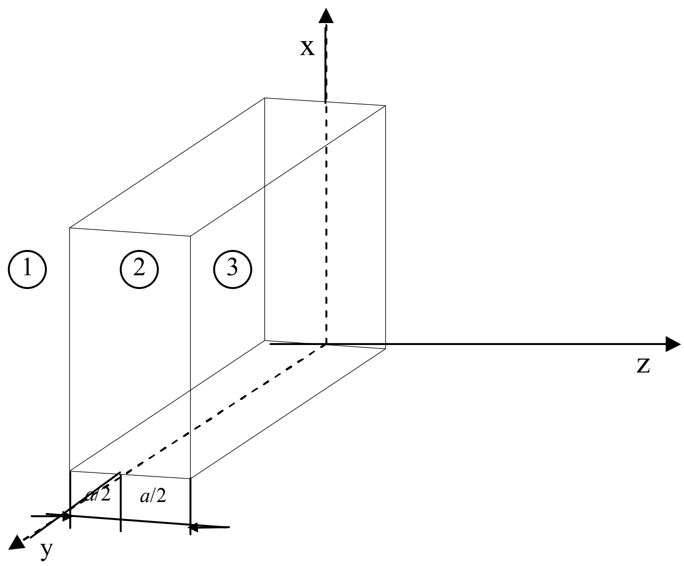
*

14. Scriem ecuaţiile pentru zonele 1,2 şi 3 din figură.

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}=0, z\le -\frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}=\frac{-\rho}{\varepsilon};\quad -\frac{a}{2}<z<\frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dz^2}=0\ , z\ge \frac{a}{2}.$$



Prin integrarea acestor ecuaţii,obţinem:

$\varphi_1 = A_1 z + B_1;\ \varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}z^2 + A_2 z + B_2;$

$\varphi_3 = A_3 z + B_3$

Punem $\varphi_2(0)=0 \Rightarrow B_2 = 0$

şi $\left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow A_2 = 0$ apoi punem

condiţia ca în centrul plăcii, potenţialul şi câmpul electric să fie nule.Impunem condiţiile de continuitate pentru câmp şi potenţial la limitele de separaţie între medii

$$\varphi_1\left(-\frac{a}{2}\right)=\varphi_2\left(-\frac{a}{2}\right);\ \left.\frac{d\varphi_1}{dz}\right|_{z=-\frac{a}{2}}=\left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=-\frac{a}{2}};\ \varphi_2\left(\frac{a}{2}\right)=\varphi_3\left(\frac{a}{2}\right);\ \left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=\frac{a}{2}}=\left.\frac{d\varphi_3}{dz}\right|_{z=\frac{a}{2}}$$

Rezultă $\varphi_1 = A_1 z + B_1;\ \varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}z^2;\ \varphi_3 = A_3 z + B_3$.Rezolvând sistemul de ecuaţii obţinut prin impunerea condiţiilor de continuitate, rezultă valorile constantelor:

$$A_1 = \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2};\ A_3 = -\frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2};\ B_1 = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon};\ B_2 = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon}$$

Se obţin în definitiv expresiile potenţialelor şi câmpurilor în cele trei zone:

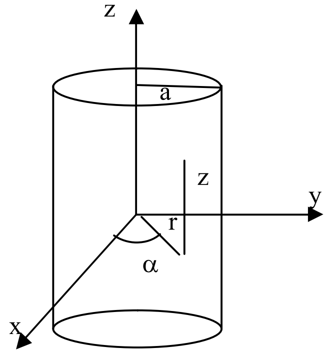
$$(1)\begin{cases}\varphi_1 = \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2}\left(z+\frac{a}{4}\right)\\ E_{z_1} = -\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2}\end{cases}\quad (2)\begin{cases}\varphi_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{\varepsilon}z^2\\ E_{z_2} = -\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon}z\end{cases}\quad (3)\begin{cases}\varphi_3 = \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2}\left(-z+\frac{a}{4}\right)\\ E_{z_3} = -\frac{d\varphi_3}{dz} = +\frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2}\end{cases}$$

Soluţiile *(1)- (3)* corespund zonelor respective definite de $z < -a/2$, $-a/2 < z < a/2$ *şi* $z > a/2$.

*

15. Potenţialul generat de această distribuţie de sarcini rezultă prin integrarea ecuaţiilor Laplace şi Poisson. În coordonate cilindrice (r,α,z) laplaceianul se scrie:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$



Potenţialul φ va depinde numai de r şi

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

astfel că ţinând seama de ecuaţia Poisson se poate scrie:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_1}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon},\ pentru\ 0<r<a$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=0,\ pentru\ r>a$$

Prin integrarea acestor relaţii, se obţin soluţiile $\varphi_1=-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2+A_1\ln r+B_1;\ \varphi_2=A_2\ln r+B_2$

Cum însă φ trebuie să fie finit în orice punct şi cum pentru $r\to 0$, $\ln r\to\infty$, rezultă în mod necesar $A_1=0$. Vom norma potenţialul pe axul cilindrului considerând $\varphi_1(0)=0$ ceea ce presupune $B_1=0$. Impunem încă condiţiile de continuitate ale potenţialului şi câmpului pe suprafaţa cilindrului.

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a)\ şi\ \left.\frac{d\varphi_1}{dr}\right|_{r=a}=\left.\frac{d\varphi_2}{dr}\right|_{r=a}\ în\ expresiile\ \varphi_1=-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2\ şi\ \varphi_2=A_2\ln r+B_2.$$

Se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}A_2\ln a+B_2=-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2\\ \frac{A_2}{a}=-\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_2=-\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2\\ B_2=-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon}+\frac{\rho a^2\ln a}{2\varepsilon}\end{cases}$$

Rezultă

$$\varphi_1(r)=-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2\ pentru\ 0<r<a$$

$$\varphi_2(r)=-\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2\ln r+\frac{1}{2}a^2\frac{\rho}{\varepsilon}\ln a-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2=\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2\ln\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2\ pentru\ r>a$$

astfel că pentru intensitatea câmpului electric $E(r)$ se obţin expresiile:

$$E(r)=\begin{cases}-\frac{d\varphi_1}{dr}=\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}r\ pentru\ 0<r<a\\ -\frac{d\varphi_2}{dr}=\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{a^2}{r}\ pentru\ r>a\end{cases}$$

*

16 .Notăm cu σ_a densitatea de sarcină de pe armături în absenţa dielectricului, σ densitatea de sarcină de pe armături în prezenţa dielectricului şi cu σ_p densitatea sarcinilor de polarizare de pe suprafaţa dielectricului, urmare a polarizării acestuia.Câmpul în dielectric va rezulta din diferenţa $\sigma-\sigma_p$.Câmpul electric în absenţa dielectricului este: $E_a=\frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}=\frac{U}{d}$ iar câmpul în dielectric,

$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\sigma-\sigma_p}{\varepsilon_0}=\frac{U}{d}$, de unde rezultă: $\sigma_p=\varepsilon_0E(\varepsilon_r-1)=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{U'}{d}$.

În cazul 1), $U'=U$

a) $\sigma_p=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{U}{d}=8,85\cdot10^{-12}(6-1)\cdot\frac{10^3}{2,2\cdot10^{-3}}=2\cdot10^{-5}\frac{C}{m^2}$

b) $\sigma - \sigma_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r E - \varepsilon_0 E_a$ şi cum $E = E_a = \frac{U}{d}, \sigma - \sigma_a = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U}{d} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$

Aşadar, datorită sursei de tensiune U constantă densitatea de sarcină pe armături a crescut cu $\sigma_p = \sigma - \sigma_a$

2) În acest caz, $Q = const.$

- Înainte de introducerea dielectricului, $E_a = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} = \frac{U}{d} \Leftrightarrow \sigma_a d = \varepsilon_0 U$.
- După introducerea dielectricului, $E = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{U'}{d} \Leftrightarrow \sigma_a d = \varepsilon_0 \varepsilon_r U'$. Rezultă: $U' = \frac{U}{\varepsilon_r}$

a) $\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U'}{d} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U}{\varepsilon_r d} = 3{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{c}{m^2}$

b) $\sigma = \sigma_a$ adică densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului nu se modifică (Q =const)

*

17. Simetria sferică presupune orientarea vectorilor $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ în direcţia radială. Vectorul polarizaţie $\vec{P}$ verifică ecuaţia de trecere: $\vec{n} \cdot \left(\vec{P_2} - \vec{P_1}\right) = -\sigma_p$, în care indicele 1 se referă la interiorul sferei iar indicele 2 la exteriorul ei.

Avem: $\vec{P_2} = 0, \ \vec{P_1} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \Big|_{r \to R}$.

Pentru $r > R$, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$. Combinând ultimele două ecuaţii, se obţine $\sigma_p = \frac{\varepsilon_0 \chi_e}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{R^2}$.

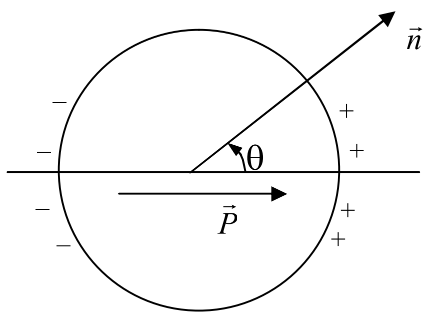
Din relaţiile: $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ şi $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$, deducem $\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{R^2}$.

*

18. $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P}\vec{l}_n dV}{r^2}$, $\vec{l}_n = \frac{\vec{r}}{r}$. Cum $\vec{P}$ este uniformă în volumul sferei,

$$\varphi = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P}\vec{l}_u dV}{r^2} = \vec{P} \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{l}_n dV}{r^2}$$

Integrala evocă un câmp electrostatic. Pentru a evidenţia aceasta se multiplică şi se împarte cu ρ scalar uniform (densitate volumică de sarcină).



$\varphi = \frac{\vec{P}}{\rho} \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho \vec{l}_n dV}{r^2} = \frac{\vec{P}}{\rho} \vec{E}^*$ unde $\vec{E}^*$ este câmpul creat de o densitate uniformă de sarcină în volumul V. Pentru o sferă uniform încărcată, calculul lui $\vec{E}^*$ este legat de teorema lui Gauss.

$$r < R,\ \vec{E}^{*} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\ ;$$

$$r > R,\ \vec{E}^{*} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{l}_n$$

de unde şi potenţialele corespunzătoare

$$r < R,\ \varphi_i = \frac{\vec{P}\vec{r}}{3\varepsilon_0};$$

$$r > R,\ \varphi_e = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{P}\cdot\vec{r}\right).$$

Se regăsesc rezultatele problemei precedente $\vec{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

În exterior câmpul şi potenţialul sunt cele create de un dipol de moment $\vec{p} = \frac{4\pi}{3}R^3 \cdot \vec{P}$