Curs 12

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Legătura dintre momentul de dipol magnetic şi momentul cinetic al unui electron

Să considerăm un electron aflat pe o orbită circulară, perioada de rotaţie fiind T. Mişcarea electronului este echivalentă cu un curent

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} = -\frac{ev}{2\pi r} \tag{1}$$

Semnul minus apare deoarece sarcina electronului este negativă.

$$m = SI = -\pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = -\frac{evr}{2} = -\frac{evrm_e}{2m_e}$$

unde m_e este masa electronului. Cum momentul cinetic orbital este:

$$L = m_e vr$$

rezultă relaţia dintre momentul magnetic de dipol şi momentul cinetic

$$m = -\frac{e}{2m_e} L = -\gamma L \tag{2}$$

Vectorial relaţia (2) se scrie ca:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\gamma \vec{L} \tag{3}$$

Mărimea $\gamma = e/2m_e$ poartă numele de raport giromagnetic orbital al electronului.

2 Sursele câmpului magnetic. Legea Biot Savart.

La puţin timp după ce Öersted a descoperit că acul unei busole este deviat de un conductor prin care trece un curent, Jean Bapiste Biot (1774-1862) şi Felix Savart au realizat experimente cantitative pentru determinarea forţei exercitate de un curent asupra unui magnet. Pornind de la rezultatele experimentale

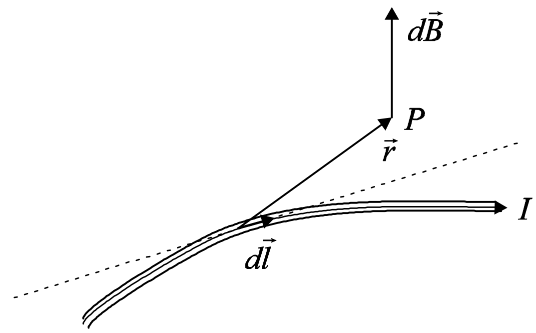

Figure 1: Câmpul magnetic creat de o porţiune de conductor de lungime dl prin care trece un curent cu intensitatea I.

obţinute, Biot şi Savart au ajuns la o expresie matematică pentru câmpul magnetic $d\vec{B}$ datorat unui element de lungime $d\vec{l}$ din conductor străbătut de curentul I într-un punct P situat la distanţa r de elementul considerat (Fig. 1).

Vectorul $d\vec{B}$ este perpendicular pe $d\vec{l}$ şi pe vectorul de poziţie $\vec{r}$. Experimental s-a constata că mărimea lui $d\vec{B}$ este invers proporţională cu r^2, proporţională cu lungimea segmentului $d\vec{l}$, cu intensitatea curentului I şi cu $\sin\theta$ unde θ este unghiul dintre $\vec{r}$ şi $d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{4}$$

unde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{Tm/A}$ este o constantă numită permeabilitatea vidului.

Pentru calculul câmpului magnetic total trebuie însumate toate contribuţiile elementare:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

Exemple:

1) Calculul câmpului magnetic produs de un curent liniar (Fig. 2a)

Din relaţia (4) rezultă:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\sin\theta}{r^2}$$

Pentru a calcula pe B vom nota:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

şi ţinem cont că φ variază de la $-\pi/2$ la $\pi/2$. Deoarece $l = R\mathrm{tg}\varphi$ rezultă:

$$dl = \frac{R}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

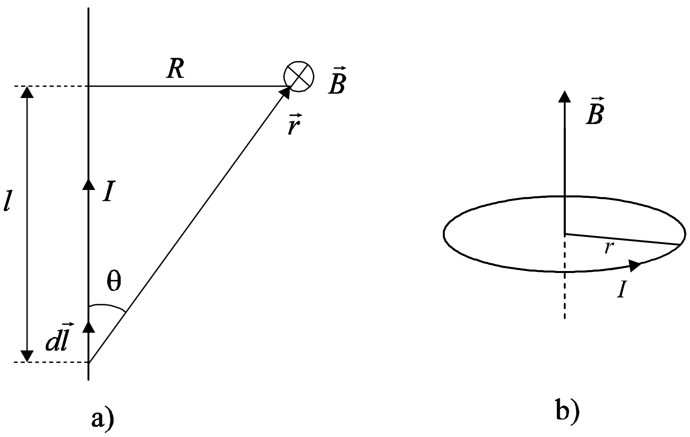

Figure 2: a) Câmpul magnetic produs de un curent liniar. b) Câmpul magnetic produs de un curent circular

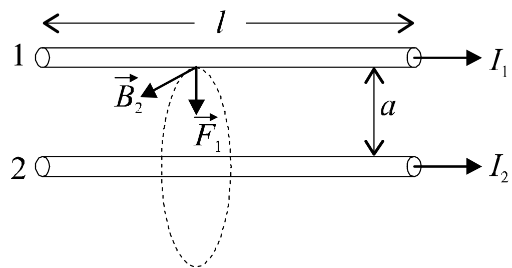

Figure 3: Conductoare paralele parcurse de curenţi electrici.

Cum:

$$r = \frac{R}{\cos\varphi}$$

atunci

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R d\varphi}{\cos^2\varphi} \times \frac{\cos^2\varphi}{R^2} \times \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\cos\varphi d\varphi}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{6}$$

Astfel rezultă că liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice în jurul conductorului.

2) Calculul câmpului magnetic produs pe o spiră circulară în centrul ei (Fig. 2b)

Folosind legea Biot Savart rezultă că o porţiune de lungime dl din spiră determină un câmp magnetic dB

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2} \tag{7}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

3 Forţa de interacţie dintre doi conductori paraleli

Să considerăm doi conductori, lungi, drepte paralele aflate la o distanţă a unul faţă de celălalt (Fig. 3).

Conductorul 2 prin care trece curentul I_2 creează câmpul magnetic $\vec{B}_2$ în locul unde se află primul conductor. Direcţia lui $\vec{B}_2$ este perpendiculară pe conductorul 1, aşa cum este prezentat în Fig. 3. Atunci forţa care acţionează asupra primului conductor este:

$$F_1 = I_1 l B_2$$

unde:

$$B_2 = \mu_0\frac{I_2}{2a\pi}$$

Rezultă:

$$F_1 = \mu_0\frac{I_1 I_2 l}{2a\pi} \tag{8}$$

Conform legii acţiunii şi reacţiunii forţa F_1 care acţionează asupra primului conductor este egală şi de sens contrar cu F_2 care acţionează asupra celui de-al doilea conductor.

Trebuie observat că dacă curenţii care trec prin cele două conductoare au acelaşi sens, conductoarele se atrag. Dacă curenţii sunt în sensuri contrare conductoarele se resping. Pornind de la relaţia 8 se poate exprima forţa pe unitatea de lungime:

$$\frac{F}{l} = \mu_0\frac{I_1 I_2}{2a\pi}$$

Pornind de la această expresie se poate defini Amperul

Amperul este intensitatea curentului care trece prin două conductoare paralele infinit de lungi aflate la distanţa de 1 m unul de altul care determină o forţă pe unitatea de lungime 2 $\times 10^{-7}$ N/m.

4 Legea lui Ampère pentru cureţi staţionari

Să considerăm un conductor rectiliniu infinit străbătut de curentul staţionar I. Considerăm o linie a câmpului magnetic, care pentru un curent rectilinu este un cerc de rază r într-un plan perpendicular pe planul conductorului. Centrul cercului este punctul în care conductorul intersectează planul considetat. Se evaluează integrala $\oint \vec{B}d\vec{l}$ numită circulaţia vectorului $\vec{B}$ de-a liniei de câmp magnetic. Pentru aceasta se ţine cont că inducţia câmpului magnetic produs de curentul I la distanţa r este dată de relaţia (6). Rezultă:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \oint Bdl = B\oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}2\pi r = \mu_0 I \tag{9}$$

Deşi rezultatul a fost determinat pentru cazul particular al unui conductor liniar, rezultatul este valabil pentru orice curbă închisă străbătută de un curent I. Relaţia a fost stabilită pentru cazul unui curent staţionar. Legea lui Ampère descrie apariţia câmpului magnetic datorită unui curent continuu.

Dacă se ţine cont că intensitatea I a curentului se poate exprima funcţie de densitatea de curent pe o suprafaţă S care se sprijină pe curba C pe care se calculează circulaţia vectorului $\vec{B}$ rezultă:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}d\vec{S} \tag{10}$$

Aplicaţie

Să se determine câmpul magnetic de unui solenoid care constă din n spire pe unitatea de lungime aflate pe un cilindru de rază R.

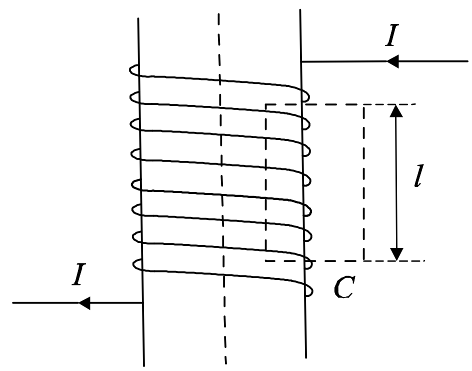

Figure 4: Solenoid străbătut de curent electric.

Soluţie

Presupunem solenoidul ca fiind ideal. Pentru acest tip de solenoid câmpul magnetic în exterior este nul. În interiorul solenoidului câmpul este unul uniform, liniile de câmp fiind paralele cu axa acestuia. Considerăm curba C aleasă ca în Fig. 4

Aplicăm pe această curbă legea lui Ampère.

$$\oint_{(1)} \vec{B} d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI$$

unde N reprezintă numărul de spire pe distanţa l. În general se consideră N numărul de spire al întregului solenoid şi l lungimea acestuia. Rezultă că interiorul solenoidului inducţia câmpului magnetic este:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

4.1 Fluxul câmpului magnetic

Fluxul câmpului magnetic este definit în acelaşi mod în care este definit ca şi fluxul câmpului electric. Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafaţă elementară dS se defineşte ca:

$$d\Phi = \vec{B}\vec{n}dS = \vec{B}d\vec{S}$$

Pentru întreaga suprafaţă :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\vec{n}dS \tag{11}$$

Dacă câmpul magnetic este uniform şi suprafaţa este plană:

$$\Phi = BS\cos\theta \tag{12}$$

unde θ este unghiul dintre normala la suprafaţă şi direcţia inducţiei magnetice. Unitatea de măsură a fluxului se numeşte Weber (Wb).

$$\mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{13}$$

4.2 Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

Când s-a stabilit Legea lui Gauss pentru un câmp electric a rezultat că fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă închisă este proporţional cu sarcina din interiorul ei. În cazul că sarcina totală este nulă rezultă că şi fluxul total este nul.

Deoarece în cazul câmpului magnetic nu există sarcini magnetice, prin analogie cu situaţia câmpului electric rezultă că fluxul câmpului magnetic prin orice suprafaţă închisă este nul.

$$\oint \vec{B}\vec{n}dS = 0 \tag{14}$$

5 Curent de deplasare şi forma generală a legii lui Ampère

Sarcinile electrice în mişcare produc câmpul magnetic. Pentru un curent continuu care este produs de un câmp electric constant în timp legea lui Ampère are forma $\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$ unde integrala este considerată se efectuează pe o curbă închisă C care înconjoară curentul, iar curentul I este curentul ce trece printr-o suprafaţă care se sprijină pe curba C

Trebuie remarcat că Legea lui Ampère scrisă în această formă este valabilă numai în cazul câmpului electric constant în timp. Maxwell a observat această limitare şi a modificat Legea lui Ampère pentru a include câmpurile electrice variabile în timp.

Putem înţelege acest lucru considerând un condensator care se încarcă cu sarcină electrică ca în Fig. 5. Când curentul de conducţie este prezent, sarcina armăturii pozitive se schimbă, dar între plăcile condensatorului nu există nici un fel de curent de conducţie.

Să considerăm două suprafeţe S_1 şi S_2 ca în Fig. 5 mărginite de aceeaşi curbă închisă P. Aplică legea lui Ampere sub forma dată de relaţia (10) în două situaţii:

Când curba P se consideră că înconjoară suprafaţa S_1, $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$, iar când curba P se consideră înconjoarată de suprafaţa S_2, $\oint \vec{B}d\vec{l} = 0$.

Rezultă o situaţie contradictorie datorată discontinuităţii curentului. Maxwell a rezolvat problema prin postularea unui nou termen care este adăugat în membrul drept al ecuaţiei 10 şi care poartă numele de curent de deplasare:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E}\vec{n}dS = \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \tag{15}$$

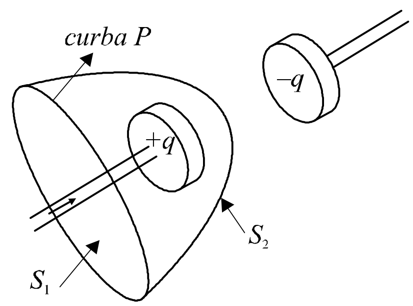

Figure 5: Determinarea legii lui Ampere în cazul general

unde integrala se face pe suprafaţa care se sprijină pe curba care încojoară curentul de conducţie considerat.

Când condensatorul se încarcă sau se descarcă câmpul electric variabil este echivalent cu un curent numit curent de deplasare. Cu acest nou termen forma generală a legii lui Ampere devine:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{16}$$

sau

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{n} dS = \mu_0 I + \mu_0 \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{n} dS \tag{17}$$

unde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ este inducţia câmpului electric.

6 Magnetism în medii materiale

6.1 Momentul magnetic al atomilor

Am arătat că pentru un electron care se deplasează pe o orbită circulară, momentul magnetic orbital al electronului poate fi scris sub forma:

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Comform mecanicii cuantice momentul cinetic orbital poate lua doar valorile discrete $\left|\vec{L}\right| = \hbar \sqrt{l\,(l+1)}$ unde $l = 0, 1, 2, ...$ poartă numele de număr cuantic orbital, iar $\hbar = h/2\pi$, unde $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js este constanta lui Planck. Rezultă că şi momentul magnetic asociat mişcării orbitale este cuantificat:

$$m_L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l\,(l+1)} \qquad l = 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

Deşi orice substanţă conţine electroni cele mai multe substanţe nu sunt magnetice deoarece momentul magnetic al unui electron este anulat de momentul magnetic al altui electron care se roteşte în direcţie opusă. Rezultă este că momentul magnetic produs de mişcarea orbitală este ori zero ori foarte mic.

În plus un electron (ca şi protonii şi alte particule) au un moment cinetic propriu numit spin. Într-o reprezentare clasică momentul propriu provine din mişcarea de rotaţie a particulei în jurul axei sale. Mărimea spinului unui electron este:

$$S = \hbar\sqrt{s\,(s+1)} \tag{19}$$

unde s poartă număr cuantic de spin şi pentru electroni are valoarea $1/2$. Momentul magnetic caracteristic asociat cu spinul electronului este:

$$m_S = 2\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{s\,(s+1)} \tag{20}$$

Se observă că momentul magnetic asociat mişcării orbitale şi momentul magnetic determinat de spinul electronului sunt exprimate cu ajutorul mărimii

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24}\mathrm{Am}^2 \tag{21}$$

care poartă numele de magneton Bohr.

În atomi care conţin mai mulţi electroni aceştia se împerechează doi câte doi cu spini opuşi; astfel momentul datorat spinului se anulează. Oricum atomii care conţin un număr impar de electroni au cel puţin un electron neîmperecheat şi există un moment magnetic de spin. Momentul magnetic total este suma dintre momentele magnetice de spin şi orbital.

În Tabelul 5.4 de mai jos sunt prezentate momentele magnetice ale câtorva atomi

Tabelul 5.4
Momente magnetice a unor atomi

Atomi	μ (A·m^2)
H	$9,27 \times 10^{-24}$
He	0
Ne	0
Ca^{3+}	$19,8 \times 10^{-24}$

Nucleul atomilor are de asemenea un moment magnetic asociat, determinat de constituenţii săi (protonii şi neutronii). Oricum momentele magnetice ale protonului şi neutronului sunt mult mai mici decât ale electronului astfel că într-o primă aproximaţie momentul magnetic asociat nucleului se neglijează.

6.2 Vectorul densitate de magnetizare şi vectorul intensitate câmp magnetic

Starea de magnetizare a unei substanţe este descrisă de vectorul densitate de magnetizare $\vec{M}$ care este definit ca momentul magnetic al unităţii de volum.

Aşa cum este de aşteptat inducţia totală a câmpului magnetic $\vec{B}$ într-un câmp dintr-o substanţă depinde de câmpul magnetic $\vec{B}_0$ produs de curenţii liberi (care trec prin conductor) şi de magnetizarea substanţei.

Se consideră o regiune umplută cu substanţă magnetică în care câmpul magnetic $\vec{B}_0$ este produs de curenţii care trec prin conductoare şi $\vec{B}_m$ este câmpul produs de substanţă magnetică:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

Vom încerca să determinăm o relaţie între $\vec{B}_m$ şi densitatea de magnetizare $\vec{M}$. Pentru aceasta considerăm că $\vec{B}_m$ este determinat mai degrabă de un solenoid decât de o substanţă magnetică.

$$B_m = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 \frac{NSI}{lS} \tag{22}$$

unde N este numărul de spire, l este lungimea iar S este secţiunea solenoidului. Observăm că la numărător $N\,(SI)$ reprezintă momentul magnetic $\vec{m}$ al solenoidului, iar numitorul $lS = V$ este volumul acestuia.

Atunci B_m poate fi exprimat ca:

$$B_m = \mu_0 \frac{m}{V} = \mu_0 M \tag{23}$$

Astfel când o substanţă este plasată în câmp magnetic, inducţia totală a câmpului magnetic în acea substanţă se exprimă ca:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \tag{24}$$

Când se analizează câmpurile magnetice datorate magnetizării este convenabil să se introducă o mărime numită intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ în interiorul substanţei. Ea este determinată doar de curenţi de conducţie şi este definită ca:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \tag{25}$$

deoarece inducţia magnetică $\vec{B}_0$ este produsă doar de curenţii de conducţie. Atunci relaţia (24) se scrie ca:

$$B = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \tag{26}$$

Unitatea de măsură a intensităţii câmpului magnetic H este A/m.

7 Probleme

1. Calculaţi valoarea câmpului magnetic la 100 cm de un fir conductor prin care trece un curent de 2A.

2. În modelul atomic propus de Niels Bohr în 1913, pentru atomul de hidrogen electronul se deplasează în jurul protonului pe o orbită circulară la distanţa de $5,29 \times 10^{-11}$ m cu o viteză de $2,19 \times 10^{6}$ m/s. Calculaţi valoarea câmpului magnetic produs de mişcarea electronului în locaţia protonului.

3. Un curent de 17 mA strabate o buclă cu circumferinţa de 2 m. Calculaţi câmpul magnetic indus de curentul în centrul buclei. Comparaţi această valoare cu cea indusă în intreriorul unui solenoid format din 100 de astfel de spire străbătute de acelaşi curent.