Curs 11

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Legea lui Ohm

Să considerăm un conductor de lungime l şi secţiune S la capătul căruia se aplică o diferenţă de potenţial egală cu U. Câmpul electric în interiorul conductorul este:

$$E = \frac{U}{l}$$

Acest câmp determimă apariţia unei densităţi de curent egală cu:

$$j = \sigma E \tag{1}$$

Deoarece $j = I/S$ şi $E = U/l$ relaţia (1) se poate scrie ca:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{l} \tag{2}$$

de unde:

$$U = \sigma \frac{l}{S} I = RI \tag{3}$$

Mărimea R poartă numele de rezistenţă:

$$R = \sigma \frac{l}{S} \tag{4}$$

Rezistenţa se măsoară în Ohmi (Ω).

$$1\Omega = \frac{1\mathrm{V}}{1\mathrm{A}}$$

Inversa conductivităţii σ poartă numele de rezistivitate:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{5}$$

Pentru metale rezistivitatea ρ depinde de temperatură după legea:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \tag{6}$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la 0 °C şi α este coeficientul de variaţie cu temperatura al rezistivităţii. În Tabelul 5.3 sunt prezentate o serie de valori ale lui ρ_0 şi α.

Tabelul 5.3
Valori ale rezistivităţii ρ şi a coeficientului de variaţie a rezistivităţii cu temperatura α

Material	ρ $[\Omega\text{m}]$	α $\left[{}^\circ\text{C}^{-1}\right]$
Argint	$1,59 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cupru	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Aur	$2,44 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-3}$
Aluminiu	$2,82 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Tungsten	$5,6 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Fier	10×10^{-8}	$5,0 \times 10^{-3}$
Platină	11×10^{-8}	$3,92 \times 10^{-3}$
Plumb	11×10^{-8}	$3,9 \times 10^{-3}$
Carbon	3500×10^{-8}	$-0,5 \times 10^{-3}$

2 Tensiunea electromotoare

Pentru menţinerea unui curent electric într-un circuit este necesar ca purtătorii de sarcină să fie acţionaţi de forţe care să le asigure deplasarea pe o durată de timp suficient de mare.

Sarcinile electrice transferă în mod continuu şi ireversibil energia lor atomilor din nodurile reţelei cristaline prin efect Joule. Aceasta înseamnă că pe lângă forţele de natură electrostatică asupra sarcinilor acţionează şi forţe de natură neelectrostatică numite forţe imprimate.

Ele iau naştere în anumite puncte ale circuitului în care se găsesc surse de tensiune electromotoare (pile electrice, acumulatoare care transformă energia liberă prin diferite reacţii chimice în energie electrică).

Forţele imprimate determină un câmp electric numit câmp electric imprimat

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \tag{7}$$

Câmpul electric total este suma dintre câmpul electric imprimat şi câmpul electrostatic. Lucrul mecanic efectuat asupra unei sarcini care se deplasează din punctul 1 în punctul 2 este:

$$L_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \tag{8}$$

$$L_{12} = q_0 \left(V_1 - V_2\right) + q_0 \mathcal{E}_{12}$$

unde cu $\mathcal{E}_{12}$ am notat tensiunea electromotoare

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \tag{9}$$

Definim căderea de tensiune între punctele 1 şi 2:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12} \tag{10}$$

Se observă că dacă tensiunea electromotoare este nulă, căderea de tensiune este egală cu diferenţa de potenţial. Pentru un circuit închis

$$L = q\oint \vec{E}d\vec{l} + q\oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{11}$$

Dar pentru un câmp electrostatic:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0 \tag{12}$$

Rezultă că tensiunea electromotoare pe un circuit reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa sarcina q prin circuit şi acea sarcină:

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{13}$$

Astfel tensiunea electromotoare ce acţionează într-un circuit este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de sarcină pe întregul circuit.

3 Magnetism

Constatarea proprietăţilor magnetice a fost făcută încă din antichitate, numele de magnet provenind de la numele unei regiuni din Asia Mică ”Magnesia” unde se găseau roci cu astfel de proprietăţi.

În 1269 un francez Piere de Maricourt a găsit că direcţiile unor ace lângă un magnet sferic natural formează linii care înconjoară sfera şi trec prin două puncte diametral opuse. Punctele respective au fost numite polii magnetului. Experienţele ulterioare au arătat că indiferent de forma lor magneţii au doi poli: nord (N) şi sud (S) care exercită forţe asupra polilor altui magnet. Astfel interacţiile N-N şi S-S sunt de respingere în timp ce interacţiile N-S sunt întotdeauna de atracţie. Polii au primit numele datorită modului în care un magnet (de exemplu o busolă) se comportă în prezenţa câmpului magnetic terestru. Dacă un ac magnetic este suspendat de centrul său şi se poate mişca liber în plan orizontal, el se va roti până ce polul său nord se va poziţiona către polul nord geografic şi polul sau sud se va poziţiona către sudul geografic. Trebuie remarcat că polul nord geografic din punct de vedere magnetic este un pol sud iar polul sud geografic este din punct de vedere magnetic un pol nord.

În 1600 William Gilbert a realizat o serie de experienţe noi cu o varietate de materiale. Utilizând faptul că magneţii se poziţionează într-o direcţie preferenţială, el a sugerat că Pământul este un magnet uriaş.

În 1750 experimentele realizate cu o balanţă de torsiune au arătat că forţele care se exercită între polii unor magneţi sunt invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre polii care interacţionează. Deşi forţele între aceşti poli sunt similare cu cele dintre sarcinile electrice cu privire la modul în care variază cu distanţa, un singur pol magnetic nu a putut fi izolat aşa cum sarcinile pozitive şi cele negative pot fi izolate. Astfel dacă se taie un magnet de-a lungul unui plan perpendicular pe axa ce uneşte cei doi poli se obţin doi magneţi.

În anul 1820 Hans Christian Öersted a găsit o legătură între electricitate şi magnetism. El a descoperit că dacă se aduce un ac magnetic în apropiera unui conductor prin care trece un curent electric, asupra acului magnetic se va exercita o forţă. La puţin timp de la descoperirea lui Öersted, Ampère a arătat că între doi conductori străbătuţi de curent electric se exercită forţe de atracţie sau de respingere în funcţie de sensul curenţilor. Ele nu au aceiaşi natură ca şi forţele care se exercită între sarcinile electrice. Dacă se introduce o placă metalică între cei doi conductori forţa de interacţie dintre ei nu se modifică. S-a presupus că o astfel de forţa are aceiaşi natură ca şi forţa care se exercită între un conductor parcurs de curent electric şi un ac magnetic.

Pentru a găsi o corespondenţă între un ac magnetic şi un conductor străbătut de un curent electric, Ampère a presupus că acul magnetic conţine un număr foarte mare de curenţi microscopici (care formează mici bucle de curent) pe care i-a denumit curenţi moleculari.

Ulterior Maxwell a afirmat că astfel de forţe se exercită între orice sarcini electrice în mişcare. Aceste forţe pot fi atribuite existenţei în jurul sarcinilor în mişcare a unui câmp numit câmp magnetic. În consecinţă putem afirma că sursele câmpului magnetic sunt sarcinile electrice în mişcare.

3.1 Forţa Lorentz. Inducţia câmpului magnetic.

Câmpul magnetic poate fi descris cu ajutorul unui vector $\vec{B}$ numit inducţie a câmpului magnetic. Direcţia lui $\vec{B}$ este direcţia în care se poziţionează un ac magnetic în punctul respectiv. Ca şi în cazul câmpului electric vom putea defini liniile de câmp magnetic ca fiind curbele la care vectorul $\vec{B}$ este tangent în fiecare punct. În Fig. 1a sunt reprezentate liniile de câmp ale unui magnet în formă de bară. Experimental ele se pot trasa cu ajutorul unei busole.

Pentru definirea inducţiei câmpului magnetic se utilizează forţa Lorentz $\vec{f_l}$ care este forţa care acţionează asupra unei particule ce se deplasează în câmp magnetic cu viteza $\vec{v}$ (Fig. 1b). Experimental s-a demonstrat că :

$$\vec{f_l} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{14}$$

Relaţia (14) poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru inducţia câmpului magnetic. În Fig (**??**b) sunt prezentate direcţia şi sensul forţei Lorentz pentru o sarcină pozitivă. Mărimea forţei Lorentz este:

$$f_l = qvB\sin\theta \tag{15}$$

Deoarece forţa Lorentz este perpendiculară pe viteză ea este perpendiculară şi pe deplasare. Astfel lucrul mecanic efectuat de forţa Lorentz este nul. Atunci conform teoremei variaţiei energiei cinetice rezultă că variaţia energiei cinetice

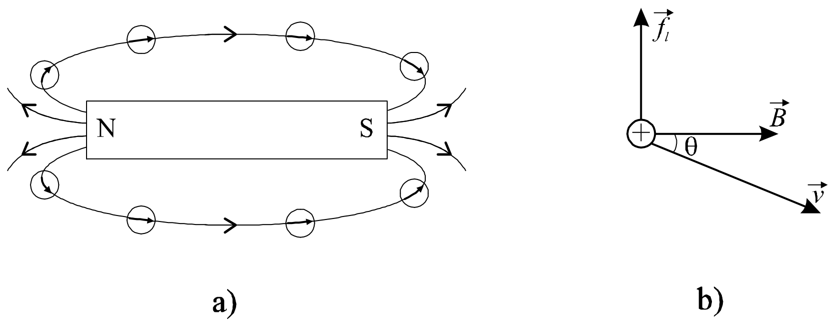

Figure 1: a) Liniile de câmp ale unui magnet. b) Direcţia forţei Lorentz faţă de direcţiile vitezei şi câmpului magnetic

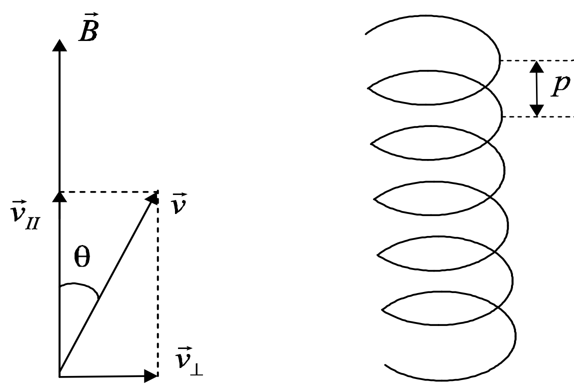

Figure 2: Mişcarea elicoidală a unei sarcini care intră sub un unghi diferit de $\pi/2$ într-un câmp magnetic.

a unei particule încărcate în câmp magnetic este nulă. În câmp magnetic poate varia doar direcţia vitezei unei particule încărcate nu şi mărimea sa.

Din relaţia 15 rezultă că unitatea de măsură pentru B care poartă numele de Tesla este

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m/s}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}$$

O unitate tolerată este gaussul (G):

$$1\mathrm{T} = 10^4\mathrm{G}$$

Aplicaţie

Să se determine ce fel de mişcare execută o particulă de masă m încărcată cu sarcina q care intră cu viteza $\vec{v}$ sub un unghi α într-un câmp magnetic uniform de inducţie $\vec{B}$.

Soluţie:

Se descompune viteza $\vec{v}$ în două componente astfel : $\vec{v}_\perp$ după o direcţie perpendiculară pe direcţia vectorului $\vec{B}$ şi $\vec{v}_\parallel$ după direcţia vectorului $\vec{B}$ (Fig. 2). Atunci $\vec{v}_\perp$ determină o mişcare circulară a particulei deoarece tot timpul forţa Lorentz este perpendiculară pe viteză. Deoarece $\vec{f_l} \perp \vec{B}$ şi $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$ forţa Lotentz şi viteza se află în acelaşi plan. Rezultă că forţa Lorentz este o forţă de tip centripet:

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$

Din această relaţie rezultă raza mişcării circulare:

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv \sin\alpha}{qB}$$

Componenta $\vec{v}_\parallel$ determină o mişcare uniformă a particulei în lungul direcţiei lui $\vec{B}$ deoarece această componentă nu determină apariţia unei forţe Lorentz:

$$\left|\vec{f_l}\right| = qv_\parallel B \sin 0 = 0$$

Prin suprapunerea mişcării uniforme şi a mişcării circulare se obţine în acest caz o mişcare elicoidală.

O caracteristică a acestei mişcări este pasul elicei care reprezintă deplasarea particulei în lungul direcţiei lui $\vec{B}$ în cursul unei perioade (în timpul când se execută o rotaţie completă).

$$p = v_\parallel T = v_\parallel \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi mv}{qB} \cos\alpha$$

3.2 Forţa electromagnetică

Dacă asupra unei particule se exercită o forţă atunci când aceasta se deplasează în câmp magnetic, este de aşteptat ca asupra unui conductor prin care trece un curent aflat în câmp magnetic să se exercite o forţă (Fig. 3). Să considerăm o porţiune de conductor prin care trece un curent $I = neSv$ aflată în câmp magnetic. Asupra fiecărei sarcini (în cazul nostru electroni) acţionează o forţă Lorentz.

$$\vec{f_l} = e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{16}$$

În porţiunea de conductor considerată numărul de purtători de sarcini este:

$$N = nSl$$

unde n este concentraţia de electroni liberi, S este secţiunea conductorului şi l lungimea conductorului. Atunci forţa totală care acţionează asupra porţiunii de conductor este

$$\vec{F} = N\vec{f_l} = nlSe\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{17}$$

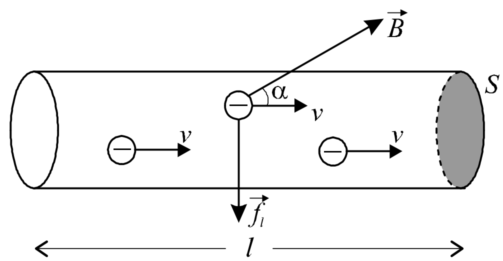

Figure 3: Modul în care apare forţa electromagnetică care acţionează asupra unui conductor plasat în câmp magnetic.

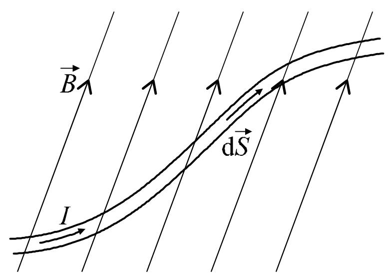

Figure 4: Conductor de formă oarecare în câmp magnetic uniform

Vom introduce în loc de $\vec{v}$ vectorul $\vec{l}$ care are modulul egal cu lungimea porţiuni de conductor şi sensul vitezei. Putem scrie $l\vec{v} = v\vec{l}$.

Atunci

$$\vec{F} = nvSe\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{18}$$

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{19}$$

Să considerăm un conductor având o formă oarecare într-un câmp magnetic uniform (Fig. 4).

Forţa care acţionează asupra porţiunii $d\vec{s}$ este

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{s} \times \vec{B}\right) \tag{20}$$

unde $d\vec{F}$ este perpendicular pe planul hârtiei, înspre cititor. Ecuaţia poate fi considerată ca o ecuaţie alternativă pentru definirea câmpului magnetic $\vec{B}$. Forţa totală care se exercită asupra conductorului este:

$$\vec{F} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \tag{21}$$

unde a şi b reprezintă capetele conductorului.

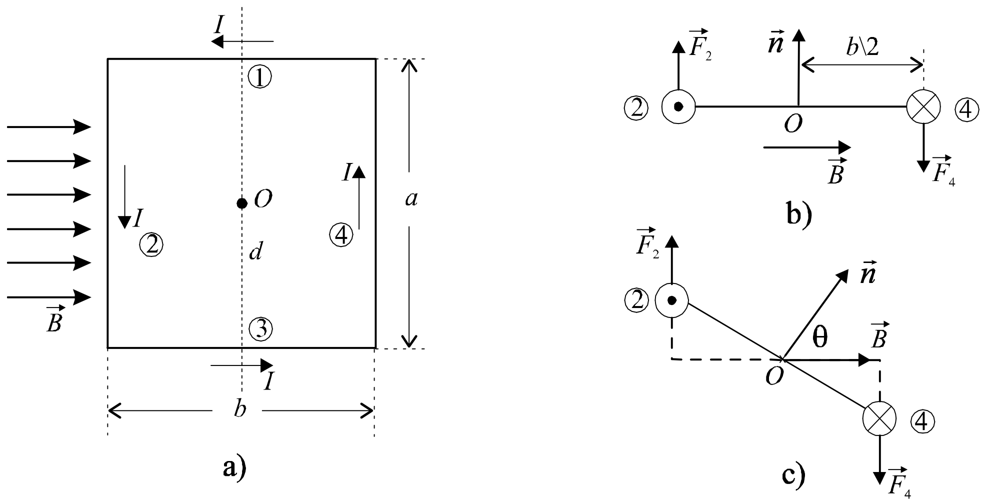

Figure 5: a) Buclă dreptunghiulară în câmp magnetic uniform. b) Forţe ce acţionează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcţia inducţiei câmpului magnetic este perpendiculară pe direcţia normalei la suprafaţa buclei. c) Forţe ce acţionează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcţia inducţie câmpului magnetic face un unghi oarecare cu direcţia normalei la suprafaţa buclei

Considerăm cazul când conductorul formează o curbă închisă şi este plasat într-un câmp magnetic uniform. Atunci

$$\overrightarrow{F} = I \oint d\vec{s} \times \vec{B} = I \left(\oint d\vec{s} \right) \times \vec{B} \tag{22}$$

Dar:

$$\oint d\vec{s} = 0 \tag{23}$$

Rezultă $\vec{F} = 0$. Putem concluziona că forţa electromagnetică care acţionează asupra oricărei bucle de curent aflată într-un câmp magnetic uniform este nulă.

3.3 Buclă de curent în câmp magnetic uniform

Să considerăm o buclă de curent de formă dreptunghiulară într-un câmp magnetic uniform ca în Fig. 5a.

Asupra laturilor 1 şi 3 nu acţionează nici o forţă deoarece conductorii respectiv sunt paraleli cu liniile câmpului magnetic.

Forţele electromagnetice acţionează asupra laturilor 2 şi 4 deoarece acestea sunt orientate perpendicular pe câmp. Valorile acestor forţe sunt:

$$F_2 = F_4 = IaB \tag{24}$$

Direcţiile lui F_2 şi F_4 sunt arătate în Fig. 5b. Forţele sunt egale paralele şi actionează în sensuri contrare. Ele formează un cuplu de forţe care are tendinţa să rotească bucla în jurul axei d. Momentul cuplului faţă de această axă este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = IaB \frac{b}{2} + IaB \frac{b}{2} = IaB = ISB \tag{25}$$

Când bucla este rotită câmpul magnetic şi normala fac un unghi de $\theta < 90^{o}$ ca în Fig 5c. Forţele F_2 şi F_4 acţionează pe aceiaşi direcţie în sensuri opuse şi rezultanta lor este nulă. Momentul cuplului care acţionează asupra buclei este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} \sin\theta + F_4 \frac{b}{2} \sin\theta = IaB \frac{b}{2} \sin\theta + IaB \frac{b}{2} \sin\theta = ISB \sin\theta \tag{26}$$

unde $S = ab$. Generalizând, momentul care acţionează asupra unei bucle de curent este:

$$M = IS\left(\vec{n} \times \vec{B}\right) = I\left(\vec{S} \times \vec{B}\right) = \left(I\vec{S}\right) \times \vec{B} \tag{27}$$

unde $\vec{S} = S\vec{n}$, iar $\vec{n}$ este normală pe suprafaţa buclei. Putem scrie

Mărimea $I\vec{S}$ poartă numele de moment magnetic de dipol:

$$\vec{m} = I\vec{S} \tag{28}$$

Atunci momentul forţei care acţionează asupra buclei se poate scrie ca:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{29}$$

Acest moment tinde să alinieze bucla perpendicular pe câmpul magnetic

Putem defini o energie potenţială a buclei de curent în câmpul magnetic extern. Pentru aceasta trebuie calculat lucrul mecanic pe care îl efectuează câmpul asupra buclei când o roteşte cu un unghi.

$$L = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} mB \sin\theta d\theta = mB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \tag{30}$$

S-a ales $-d\theta$ deoarece în cursul rotirii unghiul θ scade şi $d\theta < 0$. Deoarece

$$\Delta E_p = -L = mB\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) \tag{31}$$

Rezultă:

$$E_p = -ISB\cos\theta + const. \tag{32}$$

Considerăm că atunci când $\theta = \pi/2$, $E_p = 0$, rezultă:

$$E_p = -mB\cos\theta = - - \vec{m}\vec{B} \tag{33}$$

4 Probleme

1. Un fir lung de 2,8 m strabătut de un curent de 5 A se află într-un câmp magnetic de 0,390 T. Calculaţi forţa magnetică ce acţionează a asupra firului dacă unghiul dintre fir şi câmpul magnetic este de $60°$, $90°$ respectiv $120°$.

2. Un proton se deplasează cu viteza $v = (2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)\ m/s$. Într-o regiune în care câmpul magnetic este $B = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)T$. Cu ce forţă va acţiona câmpul asupra acestei sarcini?

3. Un proton dintr-un fascicul de raze cosmice în spaţiul interstelar are energia de 10 MeV şi o orbită circulară egală cu cea a planetei Mercur (6×10^{10} m) în jurul Soarelui. Calculaţi valoarea câmpului magnetic în acea regiune a spaţiului.

4. Un ion pozitiv cu sarcina $q = 2e$ se deplasează cu viteza de $4,6 \times 10^6$ m/s şi lasă o urmă în formă de cerc cu raza de 7,94 mm într-un câmp perpendicular de 1,8T al unei camere cu ceaţă. Calculaţi masa acestui ion în unităţi atomice de masă şi identificaţi ionul.