Curs 10

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Densitate de polarizare

Polarizarea unui material dielectric este caracterizată de mărimea numită densitate de polarizare care reprezintă momentul de dipol al unităţii de volum:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} \tag{1}$$

unde $\sum \vec{p}_i$ reprezintă suma momentelor de dipol care există în volumul ΔV.

În cazul unui dielectric omogen format dintr-un singur tip de molecule polare cu momentul de dipol $\vec{p}$ care se orientează paralel cu câmpul extern, densitatea de polarizare are expresia:

$$\vec{P} = n\vec{p} \tag{2}$$

unde n este concentraţia de dipoli din unitatea de volum.

1.0.1 Densitatea de polarizare a unui material omogen

Fie un dielectric omogen aflat în câmp electric în care datorită orientării dipolilor electrici apare o densitate de polarizare P.

Considerăm din acest dielectric o porţiune de grosime d având suprafaţa $dxdy$ (Fig. 1). Deoarece dielectricul este omogen şi izotrop direcţia vectorului

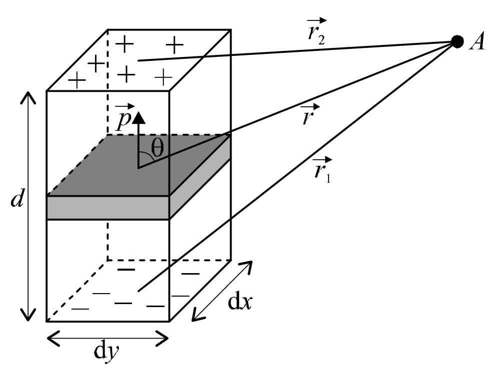

Figure 1: Material dielectric uniform polarizat.

de polarizare coincide cu direcţia câmpului electric. Un element de volum a cărui înălţime este dz i se poate asocia un moment de dipol egal cu:

$$Pdv = Pdxdydz \tag{3}$$

Potenţialul creat de acest element de volum

$$dV = \frac{Pdxdydz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Deoarece $dr = -dz\cos\theta$, $dS = dxdy$ rezultă:

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} \tag{4}$$

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Pd\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Pd\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \tag{5}$$

Relaţia este echivalentă cu expresia potenţialului creat de două sarcini punctiforme egale şi de sens contrar având valoarea PdS. Rezultă că o placă dielectrică introdusă într-un câmp electric care determină apariţia unei polarizări, poate fi înlocuită cu două distribuţii de sarcini cu densităţile superficiale $\sigma_1 = +P$ şi $\sigma_2 = -P$ pe cele două feţe ale plăcii.

Observaţie: Dacă vectorul $\vec{P}$ nu este normal pe suprafaţa dielectricului densitatea de sarcină de pe suprafaţa dielectricului este egală cu componenta normală a polarizării

1.1 Modalităţi de polarizare a unui dielectric

1.1.1 Polarizare electronică

Se manifestă la dielectrici formaţi din molecule sau atomi simetrici în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. Aşa cum am spus în prezenţa unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative faţă de nucleu, astfel încât întreg ansamblul atomic se manifestă ca un dipol. Această deplasare nu depinde de agitaţie termică, deoarece în acest caz avem de-a face cu procese la nivel atomic. Astfel densitatea de polarizare este:

$$P = n\alpha_e E \tag{6}$$

unde α_e este polarizabilitatea electronică iar n este concentraţia de atomi.

1.1.2 Polarizarea orientaţională

Este prezentă în dielectricii constituiţi din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Astfel de molecule prezintă un moment dipolar permanent datorită separării sarcinilor de semn contrar. În prezenţa unui câmp electric dipolii tind să se

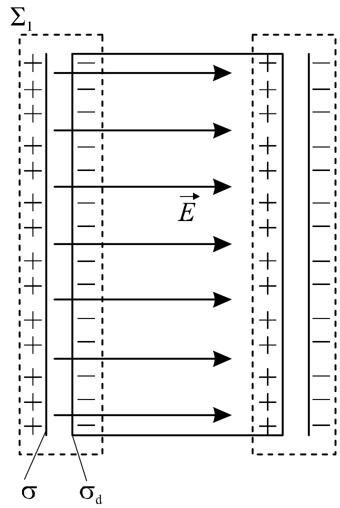

Figure 2: Placă de dielectric introdusă în interiorul unui condensator plan

orienteze în direcţia acestuia. În acest caz energia potenţială a unui dipol de moment $\vec{p}$ în câmpul electric $\vec{E}$ este:

$$E_p = -\vec{p}\vec{E} = -pE\cos\theta \tag{7}$$

unde α este unghiul făcut de dipol cu câmpul electric. În urma unor calcule rezultă desitatea de polarizare devine:

$$P = np\frac{pE}{3k_BT} = n\frac{p^2}{3k_BT}E \tag{8}$$

Dacă exprimăm densitatea de polarizare sub forma $P = n\alpha E$ polarizabilitatea (orientaţională) este:

$$\alpha = \frac{p^2}{3k_BT} \tag{9}$$

1.2 Permeabilitatea şi susceptibilitatea

Considerăm un condensator plan a cărui capacitate este C_0 (Fig. 2). Dacă în interiorul consensatorului se introduce un dielectric capacitatea acestuia se modifică la valoarea C. Raportul dintre C şi C_0 poartă numele de permitivitate relativă a dielectricului:

$$\varepsilon_r = C/C_0 \tag{10}$$

Permitivitatea relativă este o mărime specifică materialului dielectric respectiv.

Introducerea materialului dielectric în câmpul electric îl polarizează şi apare o sarcină superficială la suprafaţa dielectricului cu densitatea superficială σ_p.

Considerăm o suprafaţă Σ pe care aplicăm legea lui Gauss:

$$ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sigma - \sigma_p\right) S \tag{11}$$

unde σ este densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului. Deoarece densitatea de sarcină care apare pe suprafaţa dielectricului este egală cu densitatea de polarizare din (11) rezultă;

$$\sigma = \varepsilon_0 E + \sigma_p = \varepsilon_0 E + P \tag{12}$$

Atunci

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\left(\varepsilon_0 E + P\right) S}{Ed} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) C_0 \tag{13}$$

Rezultă că:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \tag{14}$$

De aici:

$$P = \left(\varepsilon_r - 1\right)\varepsilon_0 E \tag{15}$$

Definim susceptibilitatea electrică ca:

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \tag{16}$$

Astfel densitatea de polarizare se poate scrie ca:

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E \tag{17}$$

1.3 Inducţia câmpului electric

Sarcina de pe armăturile consensatorului este:

$$Q = \sigma S = \left(\varepsilon_0 E + P\right) S \tag{18}$$

Atunci:

$$\frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E + P \tag{19}$$

Mărimea din partea dreaptă poartă numele de inducţie a câmpului electric:

$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{20}$$

Deoarece $\vec{E}$ şi $\vec{P}$ sunt vectori şi $\vec{D}$ este un vector:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{21}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \left(\varepsilon_r - 1\right)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \tag{22}$$

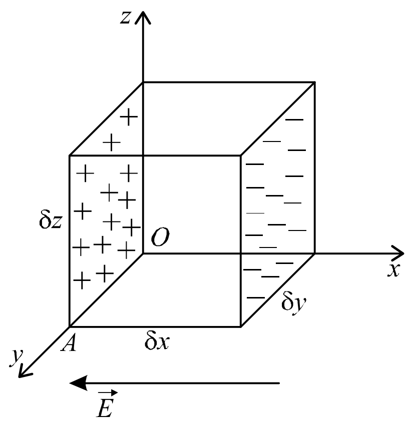

Figure 3: Porţiune dintr-un dielectric neomogen aflată în câmp electric

1.4 Densitatea de polarizare în cazul materialelor neomogene

Alături de consideraţiile făcute până acum asupra polarizării uniforme este important să se considere şi cazul în care polarizarea nu este uniformă. Acest lucru se datorează neuniformităţii dielectricului sau a variaţiei intensităţii câmpului electric în funcţie de poziţia din interiorul dielectricului. Pentru a putea determina polarizarea trebuie să ţinem cont că în afara sarcinilor induse la suprafaţa dielectricului apar sarcini induse în interiorul acestuia.

Fie un cub în interiorul unui dielectric neutru cu volumul $\delta x \delta y \delta z$ (Fig. 3). Cubul este mic la scară macroscopică dar suficient de mare la scară microscopică pentru a conţine suficient de mulţi atomi. Dacă aplicăm un câmp electric acesta se polarizează.

Presupunem pentru simplificare că polarizarea în interiorul cubului este diferită de zero pe direcţia Ox, că este dependentă de x şi independentă de y şi z. O consecinţă a polarizării este deplasarea sarcinilor câmpul electric. Atunci sarcinile de pe feţele cubului perpendiculare pe axa Ox sunt $\sigma(x)\,\delta y \delta z = P(x)\delta z \delta y$ şi $-\sigma(x+\delta x)\,\delta z \delta y = -P(z+\delta z)\delta z \delta y$, deoarece densităţile superficiale de sarcină sunt egale cu densităţile de polarizare. Aceste sarcini determină o sarcină netă:

$$\delta q_p = -\left[P(x+\delta x) - P_x(x)\right]\delta y \delta z = -\frac{\partial P_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

Generalizând în cazul că direcţia câmpului $\vec{E}$ este arbitrară, putem afirma că există contribuţii similare pentru toate componentele lui $\vec{P}$ pe direcţiile Oy şi Oz astfel că sarcina totală δq a cubului este:

$$\delta q_p = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right]\delta x \delta y \delta z$$

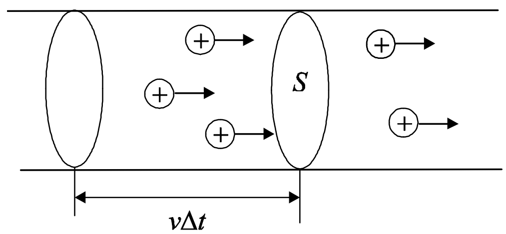

Figure 4: Deplasarea sarcinilor electrice prin suprafaţa S

Atunci densitatea sarcinilor de polarizare este:

$$\rho_p = \frac{\delta q}{\delta x \delta y \delta z} = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] = -\operatorname{div}\vec{P} = -\nabla\vec{P} \tag{23}$$

2 Curentul electric

Prin curent electric se înţelege deplasarea dirijată a sarcinilor electrice sub acţiunea unui câmp electric. De exemplu în cazul unui metal aflat la o temperatură diferită de 0 K, electronii de conducţie sunt într-o continuă stare de agitaţie termică. Prin aplicarea unui câmp electric, peste mişcarea de agitaţie termică se suprapune o mişcare dirijată în sens invers câmpului electric.

Un mediu care conţine purtători cvasiliberi capabili să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric poartă numele de conductor.

Un mediu fără purtători de sarcini capabile să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric poartă numele de izolator.

2.1 Mărimi ce caracterizează curentul electric

Pentru a defini curentul mai precis presupunem că sarcinile se mişcă perpendicular pe o suprafaţă de arie S (Fig. 4).

Curentul reprezintă sarcina netă care traversează aria S în unitatea de timp. Dacă în intervalul de timp Δt prin suprafaţa S trece sarcina ΔQ intensitatea medie a curentului care trece este:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{24}$$

Dacă în intervale de timp egale prin suprafaţa S trec cantităţi diferite de sarcini, este necesar să se definească intensitatea instantanee a curentului. Pentru aceasta se face ca intervalul de timp Δt să tindă la zero:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \tag{25}$$

În sistemul internaţional de unităţi (SI) intensitatea curentului este o mărime fizică fundamentală iar unitatea sa de măsură este Amperul (A)

$$1\text{A} = 1\text{C}/1\text{s} \tag{26}$$

Relaţia (26) nu este o relaţie de definiţie pentru Amper. Relaţia de mai sus poate fi utilizată mai degrabă pentru definirea unităţii de sarcină care este coulombul.

Sarcinile care pot trece prin suprafaţa S pot fi pozitive sau negative. În mod convenţional se consideră că sensul de curgere al curentului este acelaşi cu sensul în care s-ar deplasa sarcinile electrice pozitive în interiorul conductorului. Astfel când se discută despre curent într-un metal (de exemplu cupru) direcţia de deplasare a curentului este opusă direcţiei de deplasare a electronilor.

Densitatea de curent

Considerăm un conductor omogen şi izotrop în care concentraţia purtătorilor de sarcină q este n şi care se deplasează cu viteza medie $\vec{v}$ pe direcţia câmpului, numită viteză de drift. Dacă sarcinile sunt pozitive viteza de drift este orientată în sensul intensităţii câmpului, iar dacă sarcinile sunt negative viteza este orientată în sens contrar. În intervalul de timp Δt, toţi purtătorii de sarcină din cilindrul cu aria bazei S şi înălţime $v\Delta t$ vor trece prin secţiunea S din dreapta (Fig. 4). Deoarece numărul de purtători de sarcină din cilindru este:

$$N = nSv\Delta t \tag{27}$$

sarcina care trece prin aria bazei este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$. Atunci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS \tag{28}$$

Densitatea de curent se defineşte ca fiind sarcina ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă:

$$j = \frac{I}{S} = nqv \tag{29}$$

Deoarece viteza este o mărime vectorială, rezultă că şi densitatea de curent este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Acest rezultat poate fi generalizat, în cazul că în materialul respectiv există mai multe tipuri de purtători de sarcină cu concentraţiile n_i, viteze de drift $\vec{v}_i$ şi sarcinile q_i:

$$\vec{j} = \sum \vec{j}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \tag{30}$$

Dacă conductorul este neomogen concentraţia purtătorilor de sarcină depinde de poziţie $n = n(x, y, z)$ astfel că şi densitatea de curent este diferită de la punct la punct. Rezultă că densitatea de curent $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ este o mărime care caracterizează local curentul electric. În acest caz pentru a determina intensitatea curentului printr-o suprafaţă S, împărţim suprafaţa S într-o mulţime de suprafeţe elementare dS. Dacă direcţia densităţii de curent nu este perpendiculară pe suprafaţa dS, la intensitatea curentului contribuie doar componenta normală pe suprafaţa dS a densităţi de curent. Atunci curentul dI care trece prin suprafaţa elementară dS este:

$$dI = \vec{j}\vec{n}dS = \vec{j}d\vec{S} \tag{31}$$

Pentru determinarea curentului total ce trece prin suprafaţa S se integreză relaţia (31) pe întreaga suprafaţă considerată:

$$I = \iint_S dI = \iint_S \vec{j} d\vec{S} \tag{32}$$

2.2 Ecuaţia de continuitate

Fie o suprafaţă închisă S în interiorul unui conductor care cuprinde volumul V. Normala la suprafaţa închisă fiind îndreptată întotdeauna înspre exteriorul acesteia, integrala $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$ reprezintă sarcina care iese în unitatea de timp din volumul V prin S. Conform legii conservării sarcinii, sarcina electrică care iese din volumul V în unitatea de timp este egală cu minus variaţia sarcinii în unitatea de timp d din acest volum. Rezultă:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \tag{33}$$

Dacă se exprimă Q în funcţie de densitatea de sarcină din volumul V

$$Q = \iiint_V \rho dv \tag{34}$$

atunci

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0 \tag{35}$$

Relaţia poartă numele de ecuaţia de continuitate şi reprezintă legea de conservare a sarcinii electrice.

2.3 Teoria clasică a conducţiei în metale

Teoria a fost elaborată în anul 1900 de Drude şi a fost perfecţionată de Lorentz în anul 1910. Teoria se bazează pe ipoteza existenţei gazului electronic în metale adică a existenţei unor electroni cvasiliberi în interiorul acestora. Prin electroni cvasiliberi, se înţeleg electronii de valenţă care nu sunt legaţi de nici un atom al reţelei cristaline şi care se pot deplasa în interiorul metalului pe distanţe relativ mari.

Conform acestei teorii în absenţa câmpului electric electronii se mişcă haotic în toate direcţiile care este analoagă cu mişcarea de agitaţie termică a moleculelor unui gaz. Când se aplică un câmp electric electronii sunt supuşi unei forţe care le imprimă o mişcare direcţionată pe direcţia câmpului, mişcare care sse suprapune peste mişcarea lor haotică. În mişcarea lor electronii suferă ciocniri cu ionii reţelei cristaline care la rândul lor execută mişcări oscilatorii. După fiecare ciocnire electronii îşi pierd "memoria", adică viteza căpătată prin accelerare în câmp electric revine la zero. Astfel dacă timpul mediu dintre două ciocniri este τ, viteza căpătată de electron înainte de ciocnire este:

$$v = a\tau = \frac{eE}{m_e}\tau \tag{36}$$

unde cu m_e se notează aşa numita masă efectivă a electronului. Noţiunea de masă efectivă este introdusă deoarece electronul sub acţiunea câmpului electric E se mişcă nu în spaţiu liber, ci în câmpul reţelei cristaline a metalului. Astfel electronii se mişcă în interiorul metalelor cu o de viteză de drift egală cu viteza medie pe care o capătă între două ciocniri cu ionii reţelei cristaline:

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau \tag{37}$$

Atunci densitatea de curent se exprimă ca:

$$j = nev_d = \frac{ne^2\tau}{2m_e}E \tag{38}$$

Rezultă că densitatea de curent este proporţională cu E. O astfel de dependenţă se numeşte ohmică:

$$j = \sigma E \tag{39}$$

Relaţia (39) se poate scrie vetorial:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{40}$$

unde $\sigma-$ poartă numele de conductivitate. Comparând relaţiile (38) şi (40) rezultă:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m_e}$$

Relaţia $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ este valabilă pentru un mare număr de materiale inclusiv semiconductori. Dacă în cazul metalelor variaţia lui σ este foarte mică în funcţie de temperatură, în cazul semiconductorilor această variaţie este importantă, datorită variaţiei concentraţiei purtătorilor de sarcini în funcţie de temperatură.

2.4 Probleme

1. O sarcină Q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere de rază R. Să se determine câmpul electric în interiorul sferei. Să se exprime rezultatul şi în funcţie de densitatea volumică de sarcină ρ.

2. Un conductor de cupru are secţiunea $S = 3\times10^{-6}$ m^2. Dacă prin conductor trece un curent de 10 A, care este viteza de drift a electronilor? Densitatea cuprului este $\rho = 8950$ kg/m^3. Se consideră că fiecare atom contribuie cu un electron la electonii de conducţie. Masa molară a cuprului este $\mu = 29$ kg/kmol.

3. O sârmă de cupru are diametru $d = 1$ mm. Prin acest conductor trece un curent $I = 1,8$ A. Densitatea de electroni liberi este $n = 8,5 \times 10^{28}$ electroni/m^3. Să se găsească:

a) densitatea de curent;

b) viteza de drift.