

Curs 9

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Densitatea de energie a câmpului electric

Pentru aceasta vom considera un caz particular și anume energia înmagazinată într-un condensator plan.

Un condensator constă din două conductoare încărcate cu sarcini electrice egale și de sens contrar. Definim capacitatea unui condensator ca raportul dintre sarcina de pe armături și diferența de potențial dintre ele.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (1)$$

Unitatea de măsură a capacității este faradul

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

Condensatorul plan este format din două armături plane egale, paralele aflate la o distanță d una de alta.

Pentru a se calcula diferența de potențial dintre cele două armături este necesar să se calculeze câmpul electric creat de un conductor plan infinit încărcat astfel încât σ densitatea de sarcină are aceeași valoare în orice punct al suprafeței.

Din motive de simetrie, câmpul electric $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafață. Alegem o suprafață cilindrică astfel încât cele două baze ale sale să fie simetrice

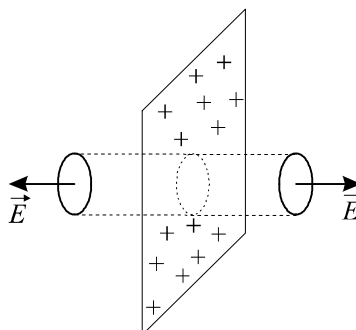


Figure 1: Câmpul creat de o distribuție plană de sarcini electrice.

față de suprafața încărcată. Fluxul prin suprafața respectivă este:

$$\Phi = \Phi_{baze} + \Phi_{lateral} = 2ES$$

deoarece fluxul pe suprafața laterală $\Phi_{lateral} = 0$, $\vec{E}$ fiind paralel cu aceasta adică perpendicular pe normala la suprafață, iar $\Phi_{baze} = 2ES$.

Dar $\Phi = q/\epsilon_0$ unde $q = \sigma S$ este sarcina din interiorul cilindrului. Rezultă:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2)$$

Revenind la cazul condensatorului plan se observă că în interior câmpul este suma câmpurilor create de sarcinile pozitivă și cea negativă de pe cele două armături (se neglijează efectele de margine):

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

deoarece cele două câmpuri sunt orientate în același sens. Cum $\Delta V = Ed$:

$$C = \frac{Q}{Ed} = \epsilon_0 \frac{\sigma S}{\sigma d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (3)$$

Presupunem că la un moment dat condensatorul este încărcat cu sarcina q . Pentru a mări sarcina de pe condensator cu cantitatea dq trebuie să se transfere sarcina dq de pe placa încărcată negativ pe cea încărcată pozitiv. Lucrul mecanic efectuat (din exterior) este:

$$\delta L = (\Delta V) dq = \frac{q}{C} dq$$

Dar W energia înmagazinată în condensator este egală cu lucrul mecanic efectuat la încărcarea condensatorului:

$$L = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Cum $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$, $\Delta V = Ed$ rezultă:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (dS)$$

Cum volumul în care se află câmpul electric este $V = Sd$, densitatea de energie a câmpului electric va fi:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4)$$

Această relație, deși a fost dedusă pentru un caz particular este valabilă pentru orice câmp electric.

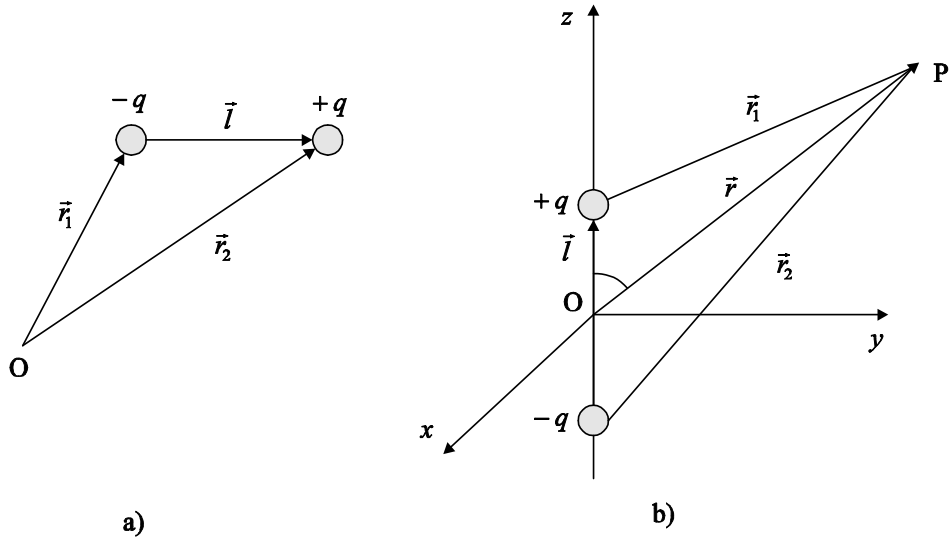


Figure 2: a) Dipol electric b) Calculul potențialului creat de un dipol. Originea se află la mijlocul distanței dintre cele două sarcini.

2 Dielectrice

2.1 Dipol electric

Dipolul electric este un sistem de două sarcini de mărimi egale și de semne contrare aflate la o distanță l una față de cealaltă (Fig 2a).

Definim momentul de dipol

$$\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l} \quad (5)$$

Potențialul creat de un dipolul electric este egal cu suma potențialelor create de fiecare sarcină în parte. Se va considera cazul în care punctul în care se calculează potențialul se află la o distanță mult mai mare decât distanța dintre sarcinile dipolului. Se presupune că sarcinile sunt situate pe axa Oz. Potențialul în punctul P va fi (Fig. Fig 2b):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (6)$$

unde:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 - lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 + lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

Deoarece s-a presupus că $r \gg l$ atunci:

$$\frac{1}{r_2} = (r_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_1} = (r_1^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

Rezultă:

$$V = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7)$$

Se observă că $\vec{p}\vec{r} = p r \cos \theta = qlr \cos \theta$. Relația (7) se poate scrie:

$$V = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (8)$$

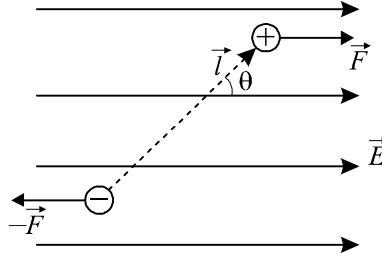


Figure 3: Efectul câmpului electric asupra unui dipol electric.

Dipol plasat în câmp electric extern

Presupunem dipolul ca fiind plasat într-un câmp electric extern $\vec{E}$ (Fig. 3). Câmpul electric extern este determinat de o altă distribuție de sarcină. Forțele care acționează asupra fiecărei sarcini sunt $\vec{F} = q\vec{E}$ și $-\vec{F} = -q\vec{E}$. Cele două forțe formează un cuplu care are tendința să alinieze dipolul paralel cu direcția câmpului electric în care se află. Momentul cuplului care acționează asupra dipolului este:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times q\vec{E} = q (\vec{l} \times \vec{E}) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (9)$$

Modulul acestui moment este

$$M = pE \sin \theta \quad (10)$$

Se poate determina energia potențială a dipolului în câmpul electric. Pentru aceasta se observă că lucrul mecanic efectuat de câmpul electric este egal cu minus variația energiei potențiale a dipolului.

$$dE_p = -\delta L = M d\theta = pE \sin \theta d\theta$$

deoarece momentul cuplului tinde să micșoreze unghiul θ și $d\theta < 0$. Atunci

$$E_{pf} - E_{pi} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sin \theta d\theta = pE (\cos \theta_i - \cos \theta_f) \quad (11)$$

Termenul care conține pe θ_i este o constantă care depinde de orientarea inițială a dipolului. Este convenabil să utilizăm ca poziție de referință poziția în care $\theta_i = 90^\circ$ în care alegem $E_{pi} = 0$. Energia potențială este:

$$E_p = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

expresie în care am neglijat indicele f .

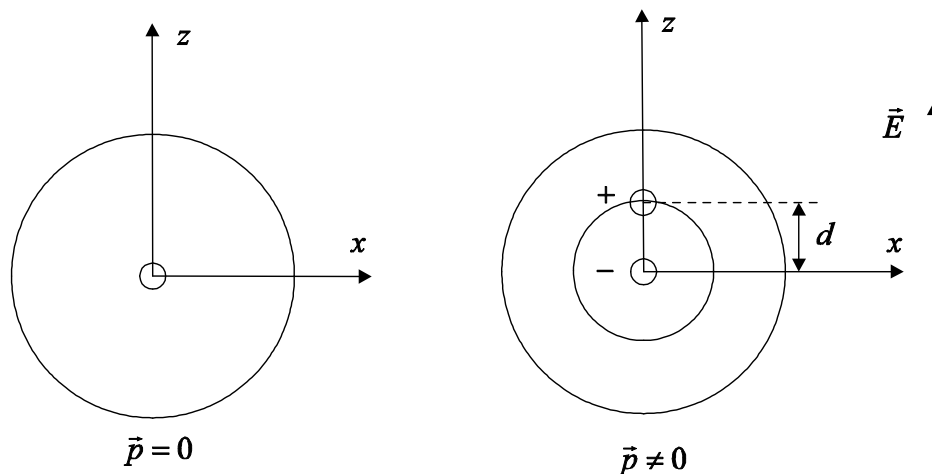


Figure 4: Atomul de hidrogen în câmp electric.

2.2 Dipoli electrici la nivel atomic și molecular

2.2.1 Dipoli electrici induși în atomi

Atomul este un sistem format dintr-un nucleu în jurul căruia se rotesc electronii cu viteze de 10^6 m/s. Deoarece raza atomică este de aproximativ $10^{-9} - 10^{-10}$ m, la scară macroscopică nu poate fi observată decât media acestor mișcări. Astfel imaginea fizică a unui atom dintr-un dielectric, se apropie de imaginea dată de mecanica cuantică care consideră că nucleul pozitiv este înconjurat de un nor de sarcină negativă. În general norul este uniform distribuit în jurul nucleului și centrul sarcinilor negative (determinate de electroni) coincide cel al sarcinilor pozitive (nucleul), astfel că momentul de dipol al moleculelor este nul.

Dacă atomul este introdus într-un câmp electric atunci nucleul este deplasat în sensul câmpului în timp ce norul electronic este deplasat în sens contrar până se ajunge din nou într-o stare de echilibru stabil. Un astfel de atom prezintă un moment electric de dipol. Spunem că atomul este polarizat iar dipolul astfel format poartă numele de dipol indus. Se demonstrează că momentul de dipol indus este proporțional cu intensitatea câmpului electric:

$$p = \alpha E$$

unde α poartă numele de polarizabilitate.

Aplicație

Un model simplu al atomului de hidrogen este acela în care acesta constă dintr-un nucleu cu sarcina $+e$, înconjurat de un nor electronic cu sarcina $-e$ cu raza $a = 0,529$ Å. Să se calculeze polarizabilitatea acestui atom.

Soluție:

În prezența unui câmp electric, nucleul se va deplasa în sensul câmpului electric iar norul electronic în sens invers. Distanța dintre nucleu și centrul

sarcinilor negative devine d , astfel că apare dipolul indus $p = ed$. Asupra nucleului acționează forța datorată câmpului electric eE și, în sens contrar, forța determinată de norul electronic eE_e . La echilibru cele două forțe sunt egale. Atunci:

$$E = E_e$$

Calculul câmpului electric datorat norului electronic E_e se face cu legea lui Gauss. Se consideră o sferă de rază d , cu centrul în centrul sarcinilor negative. Atunci:

$$4\pi d^2 E_e = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{3e}{4\pi a^3} \frac{4\pi d^3}{3} \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ed}{a^3}$$

Astfel:

$$p = ed = (4\pi\varepsilon_0 a^3) E$$

Rezultă polarizabilitatea $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$.

În Tabelul 5.1 sunt date polarizabilitățile câtorva atomi

Tabel 5.1
Polarizabilități

Atom	α [F·m ²]
H	$7,34 \times 10^{-41}$
He	$2,34 \times 10^{-41}$
Ne	$4,45 \times 10^{-41}$
C	$6,68 \times 10^{-41}$
Li	$14,48 \times 10^{-41}$
Na	$304,40 \times 10^{-41}$
K	$378,40 \times 10^{-41}$

Se observă că pentru gazele nobile He, Ne, Ar unde atomii sunt puternic legați de nucleu polarizabilitatea este mică. În cazul elementelor alcaline unde electronii de valență sunt slab legați de nucleu polarizabilitatea este mai mare.

2.2.2 Dipoli induși în molecule nepolare

Există molecule unde centrul sarcinilor negative coincide cu centrul sarcinilor pozitive. Astfel de molecule poartă numele de molecule nepolare. Există două tipuri de astfel de molecule unele cu simetrie sferică și altele cu simetrie mai joasă.

Moleculele cu simetrie sferică precum CH₄ sau BCl₃ au un moment de dipol $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Trebuie remarcat că polarizabilitatea lor moleculară nu este suma polarizabilităților atomilor constituenți.

În cazul moleculelor care nu au simetrie sferică precum CO₂ (Fig. 5) polarizabilitatea moleculelor depinde de direcția câmpului extern. Pentru această moleculă $\alpha_{||} > \alpha_{\perp}$ unde $||$ și $\perp$ se referă la orientarea câmpului față de axa lungă

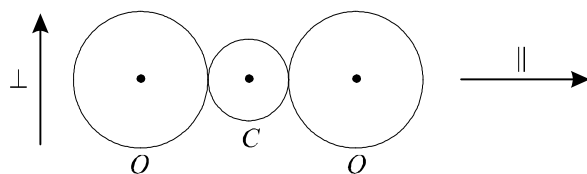


Figure 5: Molecula CO_2

a moleculei. Astfel când câmpul este aplicat de-a lungul moleculei va induce un moment de dipol mai mare decât atunci când câmpul este aplicat perpendicular pe aceasta. Acest lucru rezultă din faptul că molecula este mai ușor deformabilă în lungul axei propri decât într-o direcție perpendiculară.

2.2.3 Dipolii moleculelor polare

Există molecule care datorită structurii lor chiar în absența unui câmp electric exterior posedă un moment electric dipolar, deoarece centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Orice moleculă biatomică formată din atomi de natură diferită posedă momente de dipol permanente. Această proprietate se datorează faptului că la formarea unor astfel de molecule, ca de exemplu HCl , HBr sau HI , o parte din norul electronic al atomului de hidrogen se transferă ionilor de clor, brom sau iod. Rămâne astfel un exces de sarcini de sarcină pozitivă la extremitatea moleculei ce conține ionul de hidrogen și un exces de sarcină negativă la cealaltă extremitate. În Tabelul 5.2 sunt prezentate diverse valori pentru dipoli electrici.

Tabelul 5.2
Valori ale dipolilor pentru diverse molecule

Moleculă	p [Cm]
CO	$7,34 \times 10^{-30}$
HI	$2,34 \times 10^{-30}$
HB_2	$4,45 \times 10^{-30}$
HCl	$17,8 \times 10^{-30}$
NH_2	$6,68 \times 10^{-30}$
H_2S	$14,48 \times 10^{-30}$

Un alt exemplu de moleculă care posedă moment electric permanent este molecula de apă care are centrul sarcinilor negative în apropierea oxigenului (6). Practic momentul de dipol electric este determinat prin compunerea celor două momente de dipol $\text{O}-\text{H}$. El are valoarea

$$p = 6,2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Aplicații

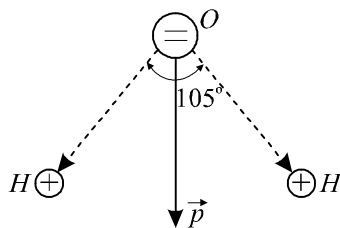


Figure 6: Molecula de apă

a) Încălzirea apei în cuptoarele cu microunde.

Când funcționează, cuptoarele cu microunde generează câmpuri electrice care variază extrem de rapid și fac ca moleculele de apă să intre într-o puternică mișcare de oscilație datorită interacției câmpului electric și momentul de dipol al moleculei de apă. Datorită ciocnirilor dintre molecule energia absorbită de la câmpul electric se transformă în energie termică și apa se încălzește.

b) Spălatul cu apă și săpun.

Grăsimile și uleiurile sunt formate din molecule nepolare care nu sunt atrase de apă. Apa simplă nu poate îndepărta aceste molecule. Săpunul conține molecule lungi numite surfactanți. Unul din capetele moleculei este nepolar și celălalt capăt acționează ca o moleculă polară. Capătul polar al surfactantului se leagă de molecula de apă iar capătul nepolar se poate atasa moleculelor de grăsime. Astfel de molecule servesc ca legături între moleculele grăsimilor și moleculele de apă.

Prin introducerea în câmp electric a unui material în care există molecule cu momente dipolare permanente sau în care se pot induce momente dipolare, dipolii vor tinde să se alinieze paralel cu câmpul electric. Alinierea însă nu va fi una perfectă din două motive:

- agitația termică se opune alinierii;
- dipolii însăși vor determina un câmp electric astfel că asupra fiecărui dipol va acționa un câmp electric extern și unul determinat de dipolii vecini.

Totuși pentru dielectricii omogeni și izotropi putem considera că dipolii sunt aliniați paralel cu câmpul electric.

Ca exemple de dielectrici se pot da: sticla, hârtia, ceramica, materialele plastice. Ele sunt materiale care nu posedă sarcini electrice libere adică nu sunt conductoare. Proprietatea fundamentală a unui dielectric este aceea că în câmpuri electrice materialul se polarizează, adică are loc alinierea dipolilor paralel cu direcția intensității câmpului electric aplicat.

3 Probleme

1. Moleculele de apă momentul de dipol $p = 6,3 \times 10^{-30}$ Cm. O probă de apă ce conține $N = 10^{21}$ molecule care au dipoli orientați în sensul unui câmp de intensitate $E = 2,5 \times 10^5$ N/C (V/m). Care este lucrul mecanic pentru a

orienta dipoli perpendicular pe câmp.

2. Când o diferență de 100 V este aplicată armăturilor unui plan paralel, acestea se încarcă cu o sarcină superficială cu densitatea egală cu 30 nC/cm^2 . Să se determine distanța dintre armături. Se cunoaște $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

3. Un condensator plan constă din două armături $S = 10 \text{ cm}^2$, separate la distanța de 2 mm în aer. Cele două armături se află la o diferență de potențial $U = 10 \text{ V}$.

- a) Să se calculeze câmpul electric dintre armături.
- b) Să se determine densitatea superficială de sarcină.
- c) Să se calculeze capacitatea condensatorului.
- d) Să se afle sarcina de pe fiecare armătură.

4. Un condensator cu capacitate de $3 \text{ }\mu\text{F}$ este conectat la o diferență de potențial de 12 V. Care este energia stocată în condensator.

5. Armăturile unui condensator plan paralel aflate în aer sunt separate prin distanța $d = 1,00 \text{ mm}$. Care este densitatea de energie a câmpului electric dintre armăturile condensatorului, dacă acesta este încărcat la o diferență de potențial $U = 500 \text{ V}$.