Curs 8

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Electrostatică

1.1 Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp. Există două tipuri de sarcină: una pozitivă (a protonilor) şi una negativă (a electronilor). Unitatea sarcinii electrice este Coulombul (C). Cea mai mică cantitate de sarcină este sarcina $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Sarcina $+e$ este sarcina protonilor iar sarcina $-e$ este sarcina electronilor.

1.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb este o lege experimentală care afirmă că: forţa de interacţie dintre două sarcini punctiforme este de atracţie dacă sarcinile sunt de semne contrare şi de respingere dacă sarcinile sunt de acelaşi fel; forţa acţionează de-a lungul dreptei ce uneşte cele două sarcini; mărimea forţei este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre sarcini şi este direct proporţională cu produsul sarcinilor. Forma matematică a legii lui Coulomb în sistemul de unităţi internaţional SI este:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{1}$$

unde $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2 este o constantă numită permitivitatea vidu-

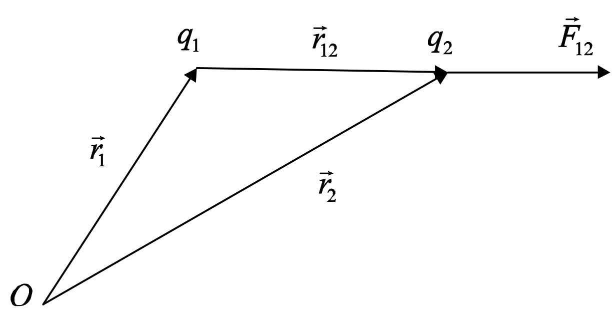

Figure 1: Forţa dintre două sarcini electrice punctiforme de acelaşi semn.

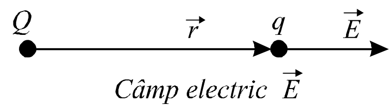

Figure 2: Vectorul intensitatea câmpului electric

lui. $\vec{r}_{12}$. Forţa $\vec{F}_{12}$ reprezintă forţa cu care sarcina q_1 acţionează asupra sarcinii q_2. În Fig. 1 este reprezentat cazul când cele două sarcini au acelaşi semna. Se observă că relaţia (1) pune în evidenţă caracterul atractiv sau repulsiv al forţei. Considerând că semnele sarcinilor sunt incluse în q_1 şi q_2, când $q_1 q_2 > 0$ (adică ambele sarcini au acelaşi semn) $\vec{F}_{12}$ are sensul vectorului $\vec{r}_{12}$ şi forţa este repulsivă, iar când $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne contrare) $\vec{F}_{12}$ are sens contrar lui $\vec{r}_{12}$ şi forţa este atractivă.

1.3 Câmp electric

Noţiunea de câmp se referă la cazul interacţiei când două corpuri nu sunt în contact. Astfel asupra unui corp lăsat liber deasupra pământului acţionează o forţă. Spunem că acel corp se află în câmpul gravitaţional al pământului. Dacă un corp cu o sarcină foarte mică şi de dimensiuni foarte mici, numit corp de probă, este adus în apropierea unor corpuri încărcate electric şi considerate fixe asupra lui acţionează o forţă. Spunem că în regiunea în care asupra corpului de probă acţionează o forţă există un câmp electric. Pentru a caracteriza câmpul electric se defineşte intensitatea câmpul electric într-un punct ca fiind:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{2}$$

unde $\vec{F}$ este forţa ce acţionează în punctul respectiv asupra corpului de probă încărcat cu sarcina$q$.

Un corp punctiform cu sarcina Q, crează un câmp electric a cărui intensitate este (Fig. 2):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{3}$$

şi

$$|\vec{E}| = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{4}$$

Pentru a obţine o reprezentare a câmpului electric, se pot defini liniile de câmp, ca fiind curbele la care în fiecare punct vectorul intensitate câmp electric este tangent. Sensul unei linii de câmp este sensul în care începe să se deplaseze o sarcină pozitivă pe linia de câmp când este lăsată liberă. Liniile de câmp electric pornesc de pe sarcinile încărcate pozitiv şi se termină pe sarcinile încărcate negativ (Fig. 3). Ele nu se intersectează deoarece câmpul este definit în mod univoc într-un punct dat.

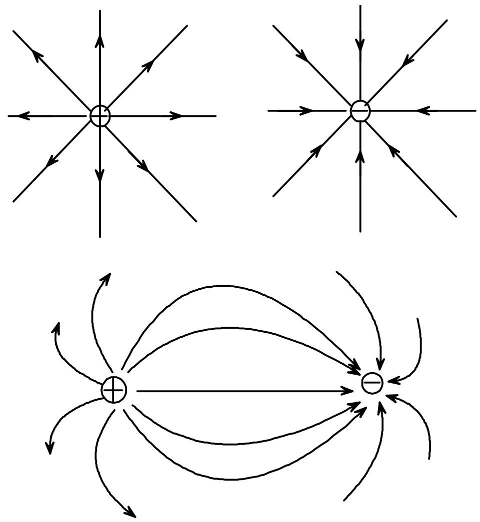

Figure 3: Linii de câmp electric.

1.4 Distribuţii continue de sarcini

Adesea distanţele dintre sarcinile unui grup de sarcini sunt mult mai mici decât distanţa de la grupul de sarcini la punctul în care trebuie calculată intensitatea câmpului electric. În acest caz sistemul poate fi modelat ca un sistem continuu de sarcină. Pentru a evalua câmpul electric creat de o distribuţie continuă de sarcină se utilizează următorul procedeu: se divizează distribuţia de sarcină în elemente mici fiecare conţinând sarcina dq. Câmpul produs în P de sarcina dintr-un element va fi:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{5}$$

Pentru a obţine intensitatea totală se însumează contribuţiile aduse de fiecare element. Pentru aceasta se integrează relaţia (5) pe tot volumul în care se află sarcinile electrice:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{6}$$

Dacă notăm cu ρ densitatea de sarcină şi se ţine cont că $q = \rho dv$ se obţine:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dv \tag{7}$$

1.5 Legea lui Gauss

Fluxul câmpului electric

Fie o suprafaţă S străbătută de un câmp electric uniform $\vec{E}$ (Fig 4a). Fluxul câmpului electric prin suprafaţa S se defineşte ca:

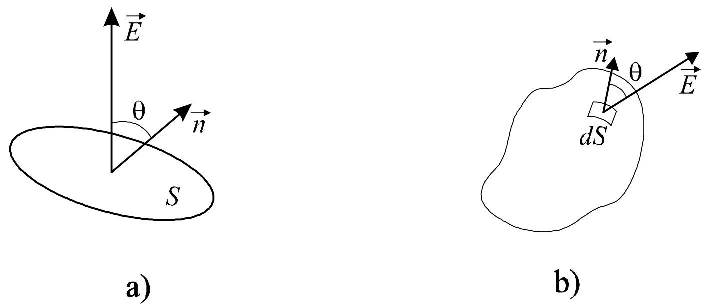

Figure 4: a) Fluxul cîmpului electric b) Fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă elementară dS

$$\phi = \left(\vec{E}\vec{n}\right) S = ES\cos\alpha \tag{8}$$

unde $\vec{n}$ este normala pe suprafaţa S.

În cazul unui cîmp neuniform se împarte această suprafaţă în elemente mici dS. Considerând unul din aceste elemente, normala pe acest element de $\vec{n}$, (Fig. 5b) şi $\vec{E}$ valoarea intensităţii câmpului electric pe acesta, fluxul electric elementar este:

$$d\phi = \vec{E}\vec{n}dS = (EdS)\cos\alpha \tag{9}$$

Fluxul total prin suprafaţa S se obţine prin adunarea fluxurilor prin toate elementele dS. Atunci:

$$\phi = \iint\limits_S \vec{E}\vec{n}dS = \iint\limits_S \vec{E}d\vec{S} \tag{10}$$

unde vectorul $d\vec{S}$ se defineşte ca $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Să considerăm un caz particular şi anume o sarcină în centrul unei sfere. În orice punct al sferei modulul intensităţii câmpului electric este:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Fluxul electric elementar printr-o suprafaţă dS este:

$$d\phi = EdS \tag{11}$$

şi:

$$\phi = \iint EdS = E\iint dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Rezultă că fluxul printr-o suprafaţă sferică produs de sarcina din centru este proporţional cu sarcina. Această proprietate se poate generaliza şi pentru o suprafaţă închisă oarecare anume:

$$\phi = \iint_S \vec{E}\vec{n}dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

unde q_{int} este sarcina din interiorul volumului închis de suprafaţa S.

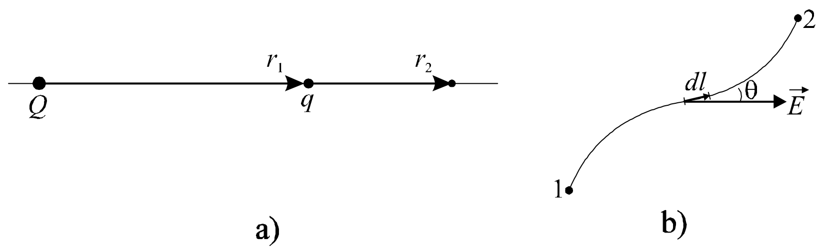

Figure 5: a) Lucrul mecanic efectuat de câmpul produs o sarcină Q asupra unei sarcini de probă q. b) Deplasarea unei sarcini de-a lungul unei curbe.

1.6 Potenţialul electric

1.6.1 Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric.

Pentru simplificare vom considera câmpul creat de o sarcină electrică Q în care se deplasează o sarcină q de-a lungul unei linii de câmp de la distanţa r_1 la distanţa $r_2 > r_1$. Presupunem în plus că cele două sarcini au acelaşi semn (Fig 5a). Lucrul mecanic elementar efectuat de câmp când sarcina este deplasată de la r la $r + dr$ este:

$$\delta L = F dr = F dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{13}$$

Atunci

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{14}$$

Relaţia (14) este valabilă şi în cazul în care deplasarea sarcinii se face pe un drum oarecare între două puncte aflate la distanţele r_1 şi r_2 faţă de sarcina Q. Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum, forţele electrostatice sunt forţe conservative.

Să considerăm deplasarea sarcinii q într-un câmp electric de-a lungul unei curbe între două puncte (Fig 5b). Deplasarea infinitezimală de-a lungul curbei o vom nota cu $d\vec{l}$. Lucrul mecanic elementar efectuat de câmpul electric este:

$$\delta L = q\vec{E}d\vec{l} = qE\cos\theta dl \tag{15}$$

Lucrul mecanic total este:

$$L_{12} = q\int_{1}^{2} \vec{E}d\vec{l} \tag{16}$$

Această integrală este o integrală curbilinie şi cum forţele electrostatice sunt conservative, valoarea ei nu depinde de drum. Din acest motiv se poate defini energia potenţială a sarcinii q în câmpul electric $\vec{E}$.

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -L_{12} = -q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{17}$$

Energia potenţială este definită până la o constantă aditivă astfel că semnificaţie fizică are doar diferenţa ei. Din acest motiv se poate alege o poziţie de referinţă în care energia potenţială este nulă. Dacă se consideră punctul 2 ca punct de referinţă (R) $E_{p2} = 0$. Atunci:

$$E_{p_1} = L_{1R} = q\int_1^R \vec{E}d\vec{l} \tag{18}$$

Se observă că mărimea

$$\frac{E_{p_1}}{q} = -\frac{L_{1R}}{q} = \int_1^R \vec{E}d\vec{l}$$

este independentă de sarcina q. Această mărime poartă numele de potenţial. Mai general:

$$V = \frac{E_p}{q} = \frac{L_R}{q} \tag{19}$$

unde $L_R = L_{1R}$ este lucrul mecanic efectuat de câmpul electric când sarcina q este deplasată din punctul considerat în punctul de referinţă. Relaţia de mai sus poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru potenţial. *Potenţialul unui punct al corpului este egal cu lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pentru deplasarea unităţii de sarcină pozitivă din punctul considerat în punctul de referinţă al cărui potenţial se consideră egal cu zero.*

Ca observaţie trebuie să remarcăm că potenţialul este o mărime cu care putem caracteriza câmpului electrostatic. Diferenţa de potenţial între două puncte 1 şi 2 se defineşte ca:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{L_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{20}$$

Atunci putem exprima lucrul mecanic efectuat de un câmp electric între două puncte în funcţie de diferenţa de potenţial

$$L_{12} = -q\Delta V = q\left(V_1 - V_2\right)$$

Ca şi în cazul energiei potenţiale, doar diferenţa de potenţial are semnificaţie fizică. Unitatea de măsură a potenţialului şi a diferenţei de potenţial este voltul:

$$1\mathrm{V} \equiv \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{C}}$$

În multe aplicaţii practice potenţialul Pământului se consideră egal cu zero.

Diferenţa de potenţial într-un câmp determinat de o sarcină punctiformă

Ţinând cont de expresia lucrului mecanic efectuat de câmpul electric al unei sarcini punctiforme asupra altei sarcini (14) rezultă că diferenţa de potenţial dintre două puncte este:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{21}$$

Alegând poziţia de referinţă la infinit se pune $r_1 \to \infty$ şi $V_1 = 0$. Atunci expresia potenţialului determinat de sarcina Q este (renunţând la indicele 2):

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{22}$$

1.7 Suprafeţe echipotenţiale

Numim suprafaţă echipotenţială locul geometric al punctelor cu potenţial constant. Rezultă că lucrul mecanic la deplasarea unei sarcini pe o suprafaţă echipotenţială este egal cu zero. Liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale.

Pentru a demonstra acest lucru se consideră o suprafaţă echipotenţială pe suprafaţa căreia se deplasează o sarcină q pe o distanţă egală cu dl. Dacă $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric pe această suprafaţă, forţa care acţionează asupra sarcinii q este $\vec{F} = q\vec{E}$ şi lucrul mecanic se exprimă ca:

$$\delta L = F dl \cos\alpha = qEdl\cos\alpha \tag{23}$$

unde $\alpha-$ este unghiul dintre direcţia lui $\overrightarrow{E}$ şi deplasarea dl. Pe de altă parte lucrul este egal cu zero, deoarece diferenţa de potenţial a celor două puncte de pe suprafaţa echipotenţială este nulă. Atunci

$$qEdl\cos\alpha = 0$$

Cum q, E, dl sunt diferite de zero, rezultă $\cos\alpha = 0$ adică $\alpha = \pi/2$. Astfel intensitatea câmpului electric este perpendiculară pe suprafaţa echipotenţială. Deoarece intensitatea câmpului electric este tangentă la liniile de câmp rezultă că şi liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafaţa echipotenţială.

1.8 Legătură dintre câmpul electric şi diferenţa de potenţial

Pentru a determina relaţia dintre intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ şi diferenţa de potenţial se consideră un corp de probă cu sarcina q care se deplasează în câmpul electric pe distanţa $d\vec{l}$. Atunci variaţia energiei potenţiale a sarcinii q este:

$$dE_p = -\delta L = -q\vec{E}d\vec{l} \tag{24}$$

Diferenţa de potenţial este:

$$dV = \frac{dE_p}{q} = -\vec{E}d\vec{l} \tag{25}$$

Vom considera cazul unui câmp electrostatic care are numai componenta după axa Ox: $dE = E_x\vec{e}_x$. Deoarece $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ rezultă:

$$dV = -E_x dx$$

şi

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Dacă câmpul este uniform $E_x = const.$ şi atunci

$$\Delta V = -E_x \Delta x \tag{26}$$

Relaţia (26) ia în considerare faptul că intenstatea câmpului electric este îndreptată de valori mari ale potenţialului la valori mici ale acestuia. Dacă nu se ţine cont de acest lucru şi se consideră difernţa de potenţia ΔV o cantitate pozitivă, iar $\Delta x = d$, rezultă că

$$\Delta V = Ed \tag{27}$$

unde E_x a fost notat cu E. În relaţia (27) d este considerat de-a lungul unei linii de câmp.

În cazul general vom considera că intensitatea câmpului electric are componente după toate cele trei axe de coordonate:

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_{zs}\vec{e}_z$$

Se exprimă lucrul mecanic efectuat de câmpul electric în două moduri:

$$\delta L = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l} = qE_x dx + qE_y dy + qE_z dz \tag{28}$$

şi

$$\delta L = -qdV = -q\left[V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x,y,z)\right]$$

$$\delta L = -q\left[V(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz - V(x,y,z)\right]$$

$$\delta L = -q\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] \tag{29}$$

Comparând expresiile 28 şi 30, şi ţinând cont că dx, dy, dz sunt arbitrare rezultă:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Astfel expresia intensităţii câmpului electric este:

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right] = -\operatorname{grad} V = -\nabla V \tag{30}$$

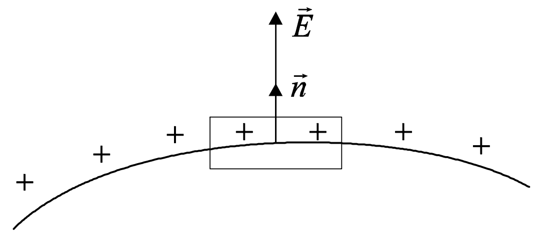

Figure 6: Câmpul electric la suprafaţa unui conductor

1.9 Conductori în echilibru electrostatic

Un conductor este un corp care posedă sarcini (de regulă electroni) care se pot mişca cvasiliber în interiorul său. El se află în echilibru electrostatic dacă sarcina cvasiliberă din interiorul său nu suferă o mişcare ordonată.

În cazul echilibrului electrostatic câmpul electric este egal cu zero în interiorul conductorului iar potenţialul este constant.

Pentru a demonstra prima parte a acestei afirmaţii se consideră că intensitatea câmpului electric în conductori este diferită de zero. Atunci electronii liberi vor fi puşi într-o mişcare ordonată în sens contrar câmpului, fapt ce ar însemna că nu ne găsim în condiţii de echilibru electrostatic aşa cum am presupus. Rezultă că în conductori câmpul este nul. Datorită acestui fapt conform ecuaţiei 30 rezultă că potenţialul este constant în toate punctele din interiorul conductorului.

Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafaţa conductorilor şi nu în interiorul lor.

Pentru a arăta acest lucru imaginăm o suprafaţă închisă S în interiorul unui conductor pentru care aplicăm legea lui Gauss. Deoarece în interiorul conductorului şi deci şi pe suprafaţa S intensitatea câmpul electric este nulă:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

De aici rezultă că sarcina Q_{int} din interiorul suprafeţei este nulă. Cum suprafaţa considerată poate lua orice formă, aceasta poate fi făcută să tindă spre suprafaţa conductorului care închide tot volumul său. Rezultă că sarcina din interiorul unui conductor va fi nulă. Sarcina se distribuie pe suprafaţa conductorului.

La suprafaţa unui conductor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat întotdeauna normal la suprafaţa acestuia, iar suprafaţa conductoriului este o suprafaţă echipotenţială.

Dacă intensitatea câmpului electric nu este normală la suprafaţa conductorului, atunci ar exista o componentă tangenţială a câmpului electric. Cum sarcina este dispusă pe suprafaţa conductorului rezultă că această sarcină ar fi pusă în mişcare şi conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Se va calcula în continuare valoarea câmpului electric la suprafaţa conductorilor cunoscând σ densitatea superficială de sarcină (sarcina de unitatea de suprafaţă). În Fig. 6 este reprezentată o porţiune din suprafaţa unui conductor pe care densitatea superficială de sarcină este $+\sigma$. Se consideră o suprafaţă foarte mică sub formă de cilindru cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o alta în afară. Bazele cilindrului se aleg astfel încât, pe cea exterioară conductorului, intensitatea câmpului electric să fie perpendiculară pe ea. Se aplică legea lui Gauss pentru această suprafaţă şi se observă că numai integrala prin baza situată în vid aduce o contribuţie diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$ iar pe feţele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \tag{31}$$

unde $\sigma\Delta S$ este sarcina totală din interiorul suprafeţei considerate. Din (31) rezultă câmpul la suprafaţa conductorului:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{32}$$

2 Probleme

1. Trei sarcini punctiforme pozitive sunt situate pe axa Ox. Sarcina $q_1 = 20$ μC este situată la coordonata $x_1 = 3$ m iar sarcina $q_2 = 10$ μC se află în origine. Unde trebuie situată o sarcină q_3 astfel încât asupra acesteia forţa care acţionează asupra ei să fie nulă.

2. Să se determine potenţialul unei sfere conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q.

3. Potenţialul într-o regiune a spaţiului este:

$$V(x, y, z) = 5x - 3x^2 + 2yz^2$$

Potenţialul este considerat în volţi iar x, y şi z în metri. Să se determine câmpul electric în punctul (1, 0, -2).