Curs 4 Fizică

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Ecuaţia undelor

Ecuaţia unei unde unidinesionale este

$$u(x,t) == A\left[\omega t - kx + \theta\right] \tag{1}$$

Considerăm $\theta = 0$ şi ţinând cont de relaţia (1) se calculează derivatele elongaţiei $u\,(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx) \tag{3}$$

Rezultă prin combinarea relaţiilor (2) şi (3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

Aceasta este ecuaţia generală a undei unidimensionale pe care o considerăm adevărată nu numai în cazul undelor armonice. Soluţia generală a ecuaţiei (4) este de forma:

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

unde $f(x - vt)$ este unda progresivă adică unda care se propagă în sensul axei Ox şi $g(x + vt)$ este unda regresivă, adică unda care se propagă în sens invers

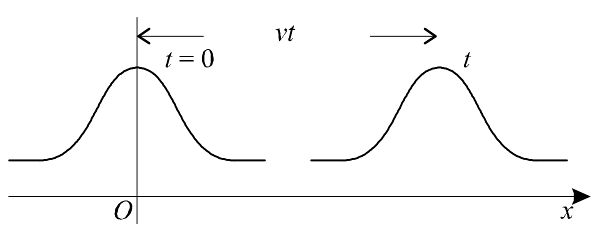

Figure 1: Puls care se propagă în lungul axei *Ox.*

axei Ox. Pentru a arăta că $f(x-vt)$ este undă progresivă vom considera un puls care se propagă de-a lungul unei coarde (Fig. 1).

El are forma $y=f(x)$ la momentul $t=0$. La momentul t vârful pulsului a ajuns la coordonata vt. Dacă punem condiţia ca forma pulsului să rămână neschimbată atunci $y(x,t)=f(x-vt)$. În acest mod am arătat că $f(x-vt)$ reprezintă o perturbaţie care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox.

2 Unde tridimensionale

Ecuaţia undelor tridimensionale se obţine prin generalizarea ecuaţiei (4). În acest caz vom nota elongaţia mişcării oscilaţiilor executate de particule în mediu u (din cazul undelor unidimensionale) cu ψ (în cazul unei unde tridimensionale)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{5}$$

2.1 Unde plane

Considerând o undă armonică $\psi(x,y,z,t)=\psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)e^{i\omega t}$, relaţia 5 devine:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\psi_2\psi_3+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\psi_1\psi_3+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\psi_1\psi_2=-\frac{\omega^2}{v^2}\psi_1\psi_2\psi_3 \tag{6}$$

Se împarte cu $\psi_1\psi_2\psi_3$ şi ţinem cont că:

$$\frac{\omega^2}{v^2}=k^2 \tag{7}$$

Se obţine:

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}=-k^2 \tag{8}$$

Pentru ca această egalitate să fie adevărată este necesar ca:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=-k_1^2 & \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2=0\\
\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}=-k_2^2 & \frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+k_2^2=0\\
\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}=-k_3^2 & \frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}+k_3^2=0
\end{array}$$

Soluţii particulare ale ecuaţiilor anterioare sunt:

$$\psi_1=A_1e^{\pm ik_1x};\quad \psi_2=A_2e^{\pm ik_2x};\quad \psi_3=A_3e^{\pm ik_3x}$$

Alegem numai cazul în care apare semnul minus $(-)$, astfel că:

$$\psi=Ae^{i[\omega t-(k_1x+k_2x+k_3x)]} \tag{9}$$

Am ales cazul cu minus pentru a obţine o undă progresivă. Frontul de undă la un moment dat de timp este definit astfel:

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=const.\quad \text{sau}\quad \vec{k}\vec{r}=const. \tag{10}$$

$$k_1x + k_2x + k_3x = const.$$

Aceasta este ecuaţia unui plan pe care este perpendicular vectorul de propagare $\vec{k}$. Astfel în acest caz unda este una plană. Frontul de undă se deplasează perpendicular pe $\vec{k}$. Se poate defini pentru unda plană armonică vectorul de propagare:

$$\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k} \tag{11}$$

2.2 Unde sferice

Undele sferice sunt determinate de surse punctiforme de perturbaţie aflate în medii omogene şi izotrope. În acest caz elongaţia ψ a unui punct aflat la distanţa A de sursă depinde doar de r, adică $\psi = \psi(r,t)$.În acest caz este util să se scrie ecuaţia (5) în coordonate sferice.

$$\nabla = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{12}$$

Deaorece $\psi = \psi(r,t)$ relaţia 12 devine:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{13}$$

Se face substituţia:

$$\psi(r,t) = \frac{f(r,t)}{r} \tag{14}$$

şi rezultă $f(r,t)$ satisface ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} \tag{15}$$

O soluţie este unda armonică progresivă:

$$f(r,t) = Ce^{i\omega(t-\frac{r}{v})} \tag{16}$$

astfel că:

$$\psi(r,t) = \frac{C}{r}e^{i\omega(t-\frac{r}{v})} \tag{17}$$

Se observă că pentru undele sferice amplitudinea $A = \frac{C}{r}$ scade cu r, deoarece energia emisă se distribuie pe suprafeţe din ce în ce mai mari.

3 Energia asociată unei unde

Ne vom limita la energia undei care se propagă printr-o coardă. Undele transportă energie când se propagă printr-un mediu. Să considerăm o undă sinusoidală care se propagă printr-o coardă. Considerăm un element de masă dm şi lungime dx. Deaorece fiecare element execută o mişcare oscilatorie armonică, energia acestui element este:

$$dE = \frac{\omega^2 A^2}{2} dm \tag{18}$$

unde $dm = \mu dx$, μ fiind densitatea liniară de masă. Astfel:

$$dE = \frac{\mu\omega^2 A^2}{2} dx \tag{19}$$

Energia unei porţiuni de de lungime λ din coardă este:

$$E = \int_0^\lambda \frac{\mu\omega^2 A^2}{2} dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \tag{20}$$

Când are loc propagarea undei, într-o perioadă, printr-o secţiune a corzii se trece energia E exprimată prin relaţia (20). Atunci rata medie a transferului de energie este:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \tag{21}$$

Expresia ratei transferului de energie poate fi folosită şi în cazul undelor sonore. Expresia 21 trebuie exprimată în alt mod. Pentru aceasta se ţine cont că densitatea liniară de masă se exprimă ca;

$$\mu = \rho S$$

unde ρ este densitatea, iar S este secţiunea porţiunii considerate. Amplitudinea undei sonore o vom nota cu $s_{\max}$. Ea reprezintă în acest caz depărtarea maximă la care poate ajunge un mic element din aer faţă de poziţia sa de echilibru. Astfel:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho S v (\omega s_{\max})^2 \tag{22}$$

Definim intensitatea I a undei ca energia care trece prin unitatea de arie în unitatea de timp:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{1}{2}\rho v (\omega s_{\max})^2 \tag{23}$$

Să considerăm o sursă punctiformă care emite unde în toate direcţiile şi o sferă cu raza r centrată pe sursă. Puterea medie $\mathcal{P}$ emisă de sursă trebuie să fie uniform distribuită pe această sferă. Atunci intensitatea undei la distanţa r faţă de sursă va fi:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2} \tag{24}$$

Astfel pentru undele sferice intensitatea descreşte proporţional cu pătratul distanţei de la sursă.

În cazul sunetelor, este convenabil să se utilizeze o scală logaritmică, astfel că în locul intensităţii undei, se defineşte nivelul sonor:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \tag{25}$$

unde I_0 este intensitatea de referinţă şi este considerată ca pragul de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, iar I este intensitatea undei sonore care se măsoară. Nivelul sonor β se măsoară în dB (decibeli). În Tabelul 2.1 de mai jos sunt prezentate câteva exemple pentru diverse sunete.

Tabel 2.1
Nivelul sonor pentru diverse surse de sunete

Sursa de sunet	β(**dB**)
Avion cu reacţie	150
Sirenă; concerte rock	120
Motoare puternice	100
Trafic intens	80
Aspirator	70
Conversaţie normală	50
Şoapte	30
Frunze	10
Pragul de audibilitate	0

Există şi un prag dureros cu intensitatea $I = 1$ W/m^2. Acest prag sonor corespunde unui nivel sonor $\beta = 120$ dB. Expunerea prelungită la astfel de sunete determină apariţia unei leziuni la nivelul urechii. Este recomandat să nu se realizeze expuneri la sunete al căror nivel sonor este mai mare decât 90 dB

4 Termodinamica

4.1 Noţiuni fundamentale

1. ***Sistemul termodinamic*** *reprezintă o porţiune din univers care cuprinde corpuri şi câmpuri şi care este delimitată de restul universului printr-o barieră fizică sau imaginară. Restul universului poartă numele de mediu extern.*

Interacţiunea dintre sistemul termodinamic şi mediul extern se realizează prin schimb de energie şi schimb de masă.

Pornind de la aceasta, sistemele se pot clasifica în *sisteme deschise* care pot schimba masă şi energie cu mediul extern şi *sisteme închise* care nu schimbă masă cu mediul extern. Sistemele închise se împart în *sisteme izolate*, care nu schimbă nici energie cu mediul extern şi *sisteme neizolate,* care pot schimba energie cu mediul extern.

2. ***Parametrii de stare*** *sunt mărimi ce caracterizează starea sistemului. Relaţiile dintre parametrii poartă numele de ecuaţii de stare.*

Din acest motiv o parte din parametri sunt independenţi iar ceilalţi sunt dependenţi. Altă clasificare a parametrilor de stare îi împarte în parametrii intensivi şi extensivi.

Parametrii intensivi sunt parametrii care nu depind de extinderea spaţială a sistemului. Ei caracterizează proprietăţile locale ale sistemului. Ca exemplu putem da presiunea şi temperatura.

Parametrii extensivi sunt parametrii care depind de extinderea spaţială a sistemului. Ca exemple putem da volumul şi masa.

Referitor la stările sistemului putem defini *stări staţionare* în care parametri sistemului sunt constanţi în timp şi *stări nestaţionare* în care parametri sistemului se modifică în timp. *Stările de echilibru* sunt stările staţionare, în care nu există schimb de masă sau energie cu mediul extern.

Principiul fundamental al termodinamicii

Un sistem izolat ajunge întotdeauna după un timp într-o stare de echilibru termodinamic şi nu poate ieşi de la sine din această stare.

3. Transformări de stare

După natura stărilor intermediare transformările sunt *cvasistatice* (stările intermediare sunt stări de echilibru iar procesele sunt lente) şi transformări *necvasistatice* (stările intermediare nu sunt stări de echilibru).

După posibilitatea de a se realiza procesul invers prin aceeleaşi stări de echilibru prin care s-a realizat procesul direct, transformările pot fi *reversibile* şi *ireversibile.*

4.2 Energia internă

Energia internă a unui sistem termodinamic este formată din suma energiilor cinetice ale particulelor constituente ale sistemului, suma energiilor potenţiale de interacţie dintre particulele sistemului şi suma energiilor potenţiale ale particulelelor în câmpuri externe.

Energia internă este o mărime de stare. Din punct de vedere matematic ea este o diferenţială totală exactă.

4.3 Forme ale schimbului de energie

4.3.1 Lucrul mecanic

Există două convenţii cu privire la lucrul mecanic. Într-una, se consideră pozitiv lucrul mecanic efectuat de mediul extern iar forţele considerate sunt cele cu care mediul extern acţionează asupra sistemului. În cealaltă convenţie, lucrul mecanic considerat pozitiv este cel efectuat de sistem asupra mediului extern, iar forţele sunt cele cu care sistemul acţionează asupra mediului extern. În continuare vom folosi a doua convenţie.

Lucrul meanic efectuat de forţele de presiune

Se consideră un gaz închis într-un recipient cu ajutorul unui piston mobil. Asupra pistonului mobil acţionează din interior o forţă de presiune egală cu $F_p = pS$, unde S este secţiunea pisotonului. Considerând că transformarea este una cvasistatică, atunci din exterior trebuie să acţioneze o forţă egală şi de sens contrar cu forţa de presiune

Lucrul elemntar efectuat de un sistem se scrie ca:

$$\delta L = F_p dx = pSdx = pdV \tag{26}$$

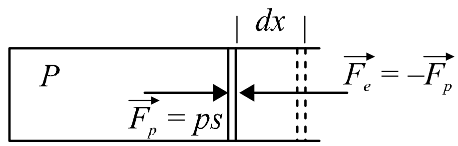

Figure 2: Lucrul mecanic al presiunii.

Faptul că se utilizează notaţia δL arată că lucrul mecanic elementar este o formă diferenţială, dar nu o diferenţială totală exactă. Cu alte cuvinte lucrul mecanic nu depinde doar de starea iniţială şi finală, ci şi de stările intermediare prin care trece sistemul. Lucrul mecanic este o mărime care depinde de transformare. Când volumul variază de la valoarea V_1 la valoarea V_2 lucrul mecanic se exprimă ca:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{27}$$

Lucrul mecanic efectuat la modificarea suprafeţei libere a unui ichid

$$\delta L = -\sigma dA \tag{28}$$

unde σ este coeficientul de trensiune superficială a lichidului, iar dA este variaţia suprafeţei libere a lichidului.

Generalizând putem spune că:

$$\delta L = \sum_i A_i da_i \tag{e.5}$$

unde A_i sunt parametrii de forţă, iar a_i sunt parametrii de poziţie (coordonate generalizate).

4.4 Căldura

Sistem izolat adiabatic. *Este sistemul care schimbă energie cu mediul extern doar prin efectuarea de lucru mecanic. În acest caz variaţia de energie este egală cu -L.*

$$\Delta U = -L \tag{29}$$

Astfel, dacă sistemul efetuează lucru mecanic asupra mediului ($L > 0$) energia internă a sistemului scade, iar dacă mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului ($L < 0$) energia sistemului creşte.

În cazul unor transformări oarecare, relaţia $\Delta U = -L$ nu mai este satisfăcută. Pentru ca legea conservării energiei să fie satisfăcută, este necesar să se introducă o nouă mărime, care să caracterizeze schimbul de căldură cu mediul, numită căldură. Atunci când se efectuează lucrul mecanic are loc o modificare a parametrilor de poziţie ai sistemului (coordonate generalizate). În cazul schimbului de căldură variaţia energiei sistemului se poate face fără modificări ale parametrilor de poziţie ai sistemului. Cantitatea de căldură se notează cu Q.

5 Probleme

1 O undă armonică care se propagă de-a lungul axei Ox, are amplitudinea de $A = 10$ cm, lungimea de undă $\lambda = 30$ cm şi frecvenţa $\nu = 15$ Hz. Mişcarea oscilatorie are loc de-a lungul axei Oy. La $x = 0$ şi $t = 0$, $y = 5$ cm.

a) Să se determine numărul de undă, perioada, pulsaţia şi viteza de propagare a undei.

b) Să se scrie expresia undei.

2 Să se arate că funcţia

$$y(x,t) = A \sin kx \cos \omega t$$

satisface ecuaţiilor undelor.

3. Nivelul zgomotului produs de un aspirator este estimat la aproximativ 70 dB. Care este intensitatea acestui sunet exprimată în W/m^2?

4. Nivelul zgomotului la distanţa de 3 m faţă de o sursă sonoră este de 120dB. La ce distanţă nivelul sonor va fi de 100 dB, dar 10dB?