Curs 3 Fizica

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Energia oscilatorului armonic

Energia oscilatorului armonic este formată din suma energiei cinetice şi potenţiale:

$$E = E_c + E_p \tag{1}$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2}$$

Energia potenţială este:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \tag{3}$$

Rezultă:

$$E = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \tag{4}$$

Energia totală a oscilatorului este constantă în timp. Acest lucru este de aşteptat deoarece forţa elastică este una conservativă.

2 Pendulul matematic

Pendul matematic constă dintr-un fir inextensibil la capătul căruia se află un punct material de masa m (Fig. 1).

Forţele care acţionează asupra punctului material sunt greutatea şi tensiunea din fir $\vec{T}$. Componenta tangenţială a greutăţii determină mişcarea corpului către poziţia în care $\theta = 0$. Aplicăm legea a II-a a mecanicii pentru componenta tangenţială a greutăţii:

$$F_t = -mg \sin\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2} \tag{5}$$

Cum $s = l\theta$ rezultă:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{6}$$

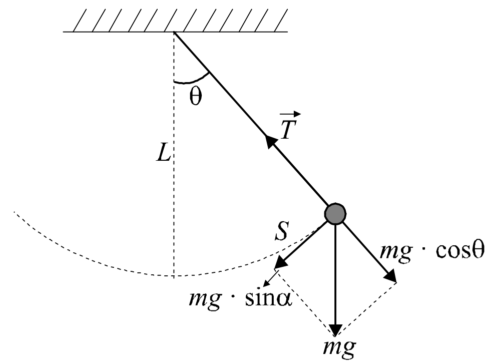

Figure 1: Pendulul matematic

Pentru cazul în care θ este foarte mic $\sin\theta \simeq \theta$, astfel că (6) devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{7}$$

Rezultă că ecuaţia de mişcare este similară cu ecuaţia (**??**). Soluţia ecuaţiei este (7):

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{8}$$

unde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{9}$$

Astfel perioada mişcării este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{10}$$

şi depinde doar de lungimea l a pendulului şi de acceleraţia gravitaţională.

3 Oscilaţii amortizate

Mişcarea oscilatorie armonică este o mişcare ideală, în care asupra corpului acţionează doar o forţă elastică. O astfel de mişcare poate avea loc un timp nedefinit. În realitate, însă, alături de forţa elastică acţionează şi forţe neconservative, cum ar fi forţele de rezistenţă la înaintare (frecare) care încetinesc mişcarea. În consecinţă, energia sistemului scade şi mişcarea este una amortizată. În continuare considerăm că forţa de rezistenţă este proporţională cu mărimea vitezei:

$$R = -\lambda v$$

Semnul minus arată că forţa are sens invers vitezei. În acest caz legea a doua se scrie astfel:

$$ma = -kx - \lambda v \tag{11}$$

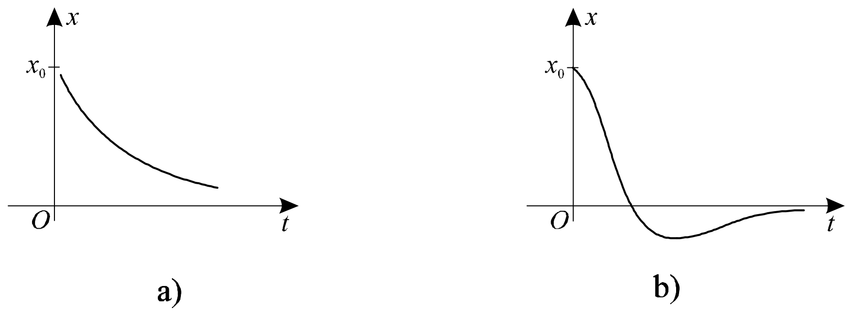

Figure 2: a) Mişcare anarmonică. b) Amortizare critică.

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} \tag{12}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{13}$$

unde $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ poartă numele de coeficient de amortizare iar $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ este pulsaţia mişcării neamortizate.

Pentru rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi omogene (13) se consideră ecuaţia caracteristică:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \tag{14}$$

care are soluţiile:

$$r_{1,\ 2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{15}$$

a) $\gamma > \omega_0$ şi r_1 şi r_2 sunt reale. Soluţia ecuaţiei în acest caz este:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{16}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante. Ele pot fi determinate din condiţiile iniţiale.

Deoarece $r_1 < 0$ şi $r_2 < 0$ rezultă că atunci când $t \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow 0$

O astfel de mişcare poartă numele de mişcare anarmonică (Fig. 2a).

b) $\gamma = \omega_0$. Atunci:

$$r_1 = r_2 = -\gamma \tag{17}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale este:

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\gamma t} \tag{18}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante care pot fi determinate din condiţiile iniţiale. O astfel de amortizare poartă numele de amortizare critică (Fig. 2b).

c) $\gamma < \omega_0$. Ecuaţia caracteristică are soluţii imaginare:

$$r_{1,\ 2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{19}$$

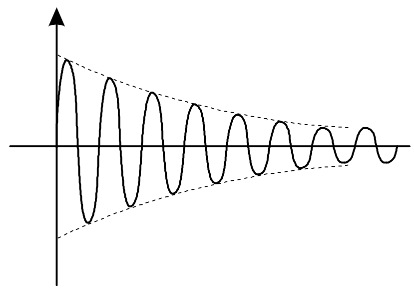

Figure 3: Mişcare oscilatorie amortizată.

Soluţia ecuaţiei se scrie:

$$x = e^{-\gamma t}[\big(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\big) \tag{20}$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Ţinând cont de faptul că $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm \sin\alpha$

$$x = e^{-\gamma t}[(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t] \tag{21}$$

Deoarece x elongaţia este o mărime reală alegem:

$$C_1 = a + ib \quad ; \quad C_2 = a - ib \tag{22}$$

unde a şi b sunt mărimi reale. Se obţine:

$$x = e^{-\gamma t}\left(2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t\right) = e^{-\gamma t}2a\left(\cos\omega t - \frac{b}{a}\sin\omega t\right) \tag{23}$$

Se notează:

$$\frac{b}{a} = tg\theta_0 \tag{24}$$

şi

$$x = \frac{2a}{\cos\theta_0}e^{-\gamma t}[\cos\omega t\cos\theta_0 - \sin\theta_0\sin\omega t] \tag{25}$$

Utilizând notaţia $A_0 = \frac{2a}{\cos\theta_0}$ relaţia (25) devine:

$$x = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \theta_0) \tag{26}$$

Dacă coeficientul de atenuare γ este mic, caracterul oscilatoriu al mişcării se păstrează. Mişcarea poartă numele de mişcare oscilatorie amortizată (Fig. 3). Amplitudinea acestei mişcării scade exponenţial în timp:

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \tag{27}$$

Mişcarea are loc cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \tag{28}$$

unde ω_0 poartă numele de pulsaţie naturală a mişcării oscilatorii.

Mişcarea este caracterizată de aşa numitul decrement logaritmic

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\gamma t} = \gamma T \tag{29}$$

Decrementul logaritmic este o mărime adimensională şi caracterizează de asemenea gradul de amortizare a oscilaţiilor. Cu ajutorul se poate compara gradul de amortizare a oscilaţiilor.

Deoarece mişcarea este amortizată sistemul pierde energie. Pierderea de energie este egală cu lucrul mecanic al forţei de rezistenţă.

$$dE = -\delta L = -\lambda v dx \tag{30}$$

Puterea disipată este:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\lambda v \frac{dx}{dt} = -\lambda v^2 = -2\gamma m v^2 \tag{31}$$

4 Oscilaţii forţate

În cazul mişcării oscilatorii amortizate, energia sistemului descreşte în timp. Este posibilă compensarea pierderii de energie prin aplicarea unei forţe externe care efectuează un lucru mecanic pozitiv. Astfel la orice moment de timp energia poate fi transferată sistemului prin aplicarea unei forţe în sensul mişcării. Amplitudinea, rămâne constantă dacă energia furnizată într-o perioada de timp este egală cu energia mecanică pierdută în aceeaşi perioadă datorită forţelor de rezistenţe sau frecare. Un exemplu este acela în care forţa exterioară variază periodic $F = F_0 \cos \omega t$ unde ω este pulsaţia forţei iar F_0 este o constantă.

Ecuaţia de mişcare pentru un corp asupra cărui acţionează o forţă elastică, o forţă de rezistenţă şi o forţă exterioară F este:

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = F - kx - \lambda \frac{dx}{dt} \tag{32}$$

Ecuaţia se scrie astfel:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \tag{33}$$

unde $2\gamma = \lambda/m$ şi $\omega_0^2 = k/m$. O astfel de ecuaţie este o ecuaţie de ordinul doi neomogenă şi are soluţii de forma:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \tag{34}$$

unde $x_0(t)$ este soluţia ecuaţie omogene dată de relaţia (26), care atunci când t este foarte mare tinde către 0 şi $x_1(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei omogene. Pentru a obţine o soluţie particulară vom considera o reprezentare complexă. Astfel;

$$F_0 \cos \omega t \rightarrow F_0 e^{i\omega t} \tag{35}$$

Alegând $x_i(t)$ de forma:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t - \theta) \tag{36}$$

el va fi reprezentat sub formă complexă astfel:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t - \theta) \rightarrow A e^{i(\omega t - \theta)} \tag{37}$$

Ecuaţia (33) se scrie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \tag{38}$$

Deoarece:Ł

$$\frac{dx_1}{dt} = iA\omega e^{i(\omega t - \theta)} \quad \text{şi} \quad \frac{dx_1^2}{dt^2} = -A\omega^2 e^{i(\omega t - \theta)} \tag{39}$$

din ecuaţia (38) rezultă:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i]A = \frac{F_0}{m} e^{i\theta} = \frac{F_0}{m}[\cos\theta + i\sin\theta] \tag{40}$$

Pentru ca cele două numere complexe să fie egale este necesar ca:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A = \frac{F_0}{m}\cos\theta \tag{41a}$$

$$2\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\sin\theta \tag{42}$$

Se ridică la pătrat relaţiile (41a) şi (42) şi se adună. Se obţine:

$$A^2[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = (F_0/m)^2 \tag{43}$$

Atstfel amplitudinea mişcării este:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{44}$$

Tangenta unghiului de defazaj dintre forţa perturbatoare şi elongaţie este:

$$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{45}$$

Dacă

$\omega \rightarrow 0$ $\tan\theta \rightarrow 0$ $\theta \rightarrow 0$. Aceasta înseamnă că la pulsaţii (frecvenţe) mici elongaţia este fază cu forţa.

$\omega \rightarrow \omega_0$ $\tan\theta \rightarrow \infty$ $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Aceasta înseamnă că elongaţia este defazată în urma forţei cu $\pi/2$.

$\omega \rightarrow \infty$ $\tan\theta < 0$ $\theta \rightarrow \pi$. Aceasta înseamnă că elongaţia şi forţa sunt în opoziţie de fază.

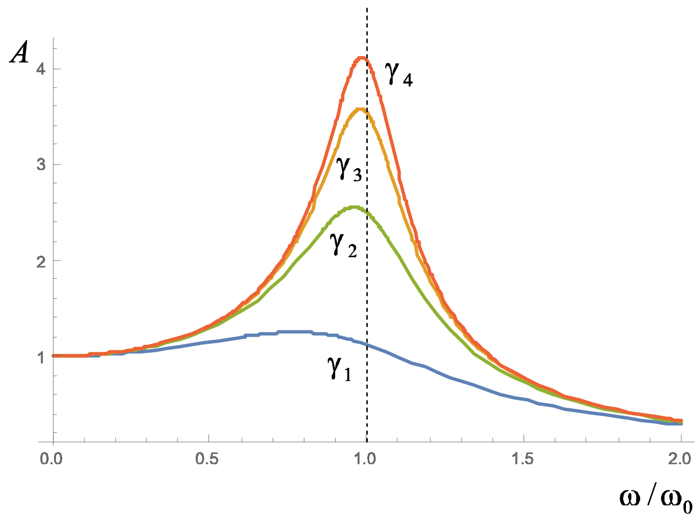

Figure 4: a) Amplitudinea unei oscilaţii forţate funcţie de pulsaţia forţei pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare: $\gamma_4 < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1$.

4.1 Rezonanţa

Rezonanţa reprezintă fenomenul de creştere a amplitudinii pentru anumite valori ale lui ω. Pentru determinarea frecvenţei la care amplitudinea este maximă se pune condiţia:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \tag{46}$$

de unde rezultă valoarea pulsaţiei de rezonanţă:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \tag{47}$$

La această valoare a pulsaţiei, amplitudinea mişcării la rezonanţă devine egală cu:

$$A(\omega_R) = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{48}$$

În Fig. 4 este reprezentată amplitudinea mişcării în funcţie de pulsaţia forţei externe pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare. Se observă că pe măsură ce valoarea coefientului de atenuare amplitudinea la rezonaţă creşte, iar pusaţia de rezozanţă se apropie de pulsaţia oscilaţiei în cazul că nu ar fi atenuare.

5 Tipuri de unde

Se numesc unde, perturbaţiile care se propagă din aproape în aproape printr-un mediu. De exemplu scoaterea din poziţia de echilibru a unei particule care este situată într-un mediu elastic determină ieşirea din poziţia de echilibru şi a particulelor vecine datorită forţelor elastice ce se exercită între particulele mediului. În acest mod mişcarea se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp de forţe elastice.

Prezenţa unei unde presupune existenţa unei surse care produce perturbaţia iniţială şi a unui mediu în care aceasta să se propage.

După natura perturbaţiei, putem avea diferite feluri de unde:

- unde elastice (undele acustice), care sunt produse de oscilaţii de natură mecanică de mică amplitudine care se propagă în medii elastice;

- unde termice, care apar datorită diferenţelor de temperatură şi caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;

- unde electromagnetice, care sunt produse de perturbaţii de natură electromagnetică.

Pentru primele două tipuri de unde este necesar un mediu material, în timp ce undele electromagnetice se pot propaga şi în vid.,

După caracterul perturbaţiei, undele pot fi:

- scalare, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime scalară;

- vectoriale, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime vectorială.

După modul în care apar perturbaţiile în raport cu direcţia de propagare, undele pot fi:

- transversale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în plane perpendiculare pe direcţia de propagare;

- longitudinale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în direcţia de propagare a undelor.(undele acustice).

Un exemplu de unde sunt undele seismice care sunt tridimensionale şi se propagă din punctul de producere de sub suprafaţa pământului de-a lungul unei fisuri. În acest caz întâlnim ambele tipuri de unde: undele transversale notate cu P (unde primare) care au viteza de propagare în intervalul 7 km/s şi undele longitudinale notate cu S (unde secundare) care se propagă cu 4 km/s. Prin înregistrarea intervalului de timp între momentele de sosire a celor două tipuri de unde la un seismograf, se poate calcula distanţa de la seismograf la punctul de origine al cutremurului. Practic, acest punct se află pe o sferă cu centrul în locul unde se află seismograful. Pentru a determina punctul de origine se utilizează mai multe seismografe. Punctul de origine al cutremurului se află în punctul de intersecţie al sferelor imaginare cu centrele în locurile unde se află seismografele.

6 Unde armonice

Undele armonice sunt produse de un sistem antrenat într-o mişcare de oscilaţie armonică. Starea de oscilaţie se transmite şi în celelalte puncte ale mediului pe care le pune într-o mişcare oscilatorie armonică simplă.

Trebuie remarcat că perturbaţiile armonice cu o frecvenţă fixă reprezintă un caz ideal. Studiul acestor cazuri ideale permite o extrapolare în cazurile reale,

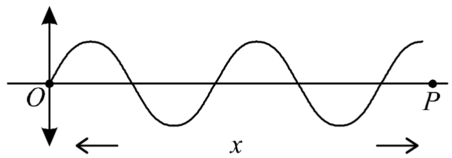

Figure 5: Unda armonica unidimensionala.

când pot să apară fenomene periodice nearmonice; acestea pot fi abordate prin aplicarea unor metode matematice cunoscute (serii sau integrale Fourier).

Să considerăm o undă tridimesnională. Se poate duce o suprafaţă prin punctele la care oscilaţia a ajuns la un moment dat. Această suprafaţă se mişcă aratând cum se propagă perturbaţia. Această suprafaţă poartă numele de front de undă. Dacă mediul este omogen şi izotrop, direcţia de propagare este întodeauna perpendiculară pe frontul de undă.

Fronturile de undă pot avea divese forme:

- plan în cazul undelor plane, care se propagă pe o singură direcţie perpendiculară pe frontul de undă;

- sferică în cazul undelor sferice care se propagă în toate direcţiile şi care provin de la o sursă punctiformă.

Departe de sursă, fronturile de undă sferică au o curbură foarte mică şi pe o regiune limitată aceste unde pot fi privite ca unde plane.

6.1 Unda armonică unidimensională

Ecuaţia unde armonice unidemensionale este valabilă şi în cazul undei armonice plane, deoarece aceasta se propagă într-o singură direcţie.

Considerăm (Fig. 5) că punctul O care este sursa undei oscilează după legea:

$$u = A\cos(\omega t + \theta) \tag{49}$$

Considerând că v este viteza de propagare a undei, un punct P aflat la distanţa x începe să oscileze după intervalul de timp:

$$t_0 = \frac{x}{v} \tag{50}$$

Atunci punctul P oscilează după legea:

$$u(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \theta\right] \tag{51}$$

Deoarece $\omega = 2\pi/T$

$$u(x,t) = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \theta\right] = A\left[\omega t - kx + \theta\right] \tag{52}$$

unde $\lambda = vT$ poartă numele de lungime de undă iar $k = \frac{\omega}{v}$poartă numele de număr de undă sau modulul vectorului de undă. Lungimea de undă reprezintă

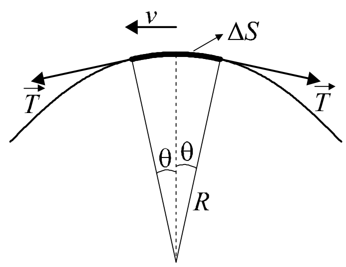

Figure 6: Calcularea vitezei de propagare în coardă

spaţiul străbătut de undă într-o perioadă, sau distanţa minimă dintre două puncte care oscilează în fază.

Unda armonică este un fenomen periodic în timp cu perioada T:

$$u(x,t) = u(x, t+T) \tag{53}$$

şi în spaţiu cu perioada λ:

$$u(x,t) = u(x+\lambda, t) \tag{54}$$

6.2 Viteza de propagare a undei într-o coardă

Pentru aceasta vom considera un element din coardă (Fig. 6) întinsă cu tensiunea T. Elementul de lungime Δs formează un arc de cerc cu raza R. Într–un sistem de referinţă care se mişcă cu viteza v a pulsului elementul de coardă considerat are acceleraţia:

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{55}$$

care este determinată de forţa rezultantă dintre tensiunile care acţionează la capetele elementului considerat din coardă. Aceasta este egală cu:

$$F = 2T\sin\theta \simeq 2T\theta \tag{56}$$

deoarece am considerat elementul Δs foarte mic, fapt ce face ca şi unghiul θ să fie foarte mic. Elementul Δs are masa:

$$\Delta m = \mu ds = 2\mu R\theta \tag{57}$$

unde μ este densitatea liniară a corzii. Ţinând cont de relaţiile (55) şi (57)

$$F = \Delta m a = 2\mu R\theta\frac{v^2}{R} \tag{58}$$

Comparând relaţiile (56) şi (58), rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{59}$$