Curs 2 Fizică

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Mişcarea de rotaţie

1.1 Mişcarea circulară uniformă

Este mişcarea care se efectuează pe o traiectorie circulară şi în care modulul vectorului viteză este constant în timp. În acest caz acceleraţia nu are decât componenta normală.

Putem defini T *perioada mişcării* care reprezintă timpul în care are loc o rotaţie completă şi *frecvenţa* ν care reprezintă numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp. Relaţia dintre cele două mărimi este:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1}$$

Deoarece mişcarea are loc pe un cerc (Fig. 1a), ea poate fi caracterizată prin variaţia unghiului θ făcut de vectorul de poziţie cu axa Ox, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Variaţia în unitatea de timp a unghiului θ, poartă numele de viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2}$$

care în cazul mişcării circulare uniforme este constantă.

Spaţiul parcurs poate fi exprimat în două moduri:

$$\Delta s = v\Delta t \quad ; \quad \Delta s = R\Delta\theta = R\omega\Delta t \tag{3}$$

Rezultă astfel relaţia dintre viteza liniară şi viteza unghiulară:

$$v = \omega R \tag{4}$$

Deoarece modulul vitezei este constantă acceleraţia are numai componenta normală. În acest caz ea poartă denumirea de acceleraţie centripetă (Fig. 1b). Astfel:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_n = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad ; \quad |\vec{a}_n| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Când $\Delta t \to 0$, $\Delta s \simeq \overline{A_1A_2}$. Se observă că triunghiul OA_1A_2 este asemenea cu triunghiul vitezelor. Rezultă:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{A_1A_2}{R} \tag{5}$$

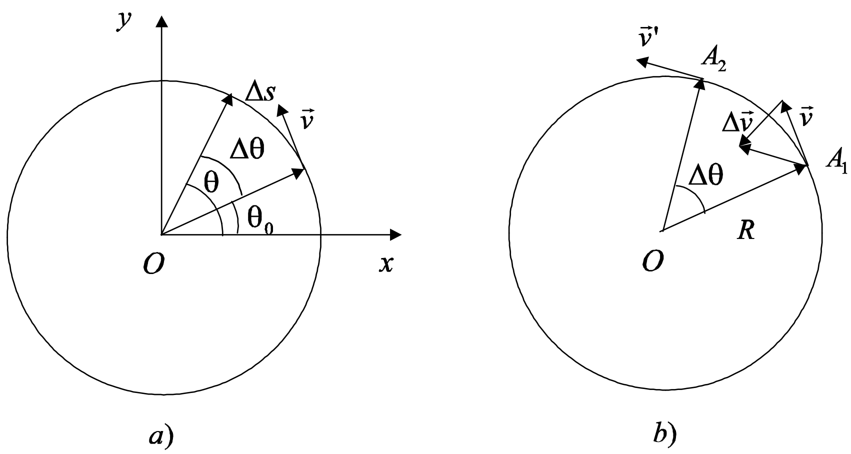

Figure 1: a) Mişcarea circulară uniformă. b) Deducerea acceleraţiei centripete.

Cum $A_1A_2 = \Delta s = v\Delta t$:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{R} \tag{6}$$

şi:

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{7}$$

1.2 Momentul forţei şi momentul cinetic.

Considerăm o forţă care acţionează asupra unui punct material. Definim momentul forţei în raport cu un punct (Fig. 2a):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8}$$

Aceeaşi definiţie se poate aplica şi în cazul unei forţe F aplicate într-un punct al unui corp care se poate roti în jurul unei axe (Fig.2b). Vectorul $\vec{r}$ este perpendicular pe axa considerată, şi pentru simplificare forţa $\vec{F}$ este situată într-un plan perpendicular pe axa considerată

Mărimea momentului este:

$$M = rF\sin\theta = rd \tag{9}$$

unde d poartă numele de braţul forţei.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Termenul $\vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ este nul deoarece $\vec{p}$ şi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sunt vectori paraleli. Atunci

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{10}$$

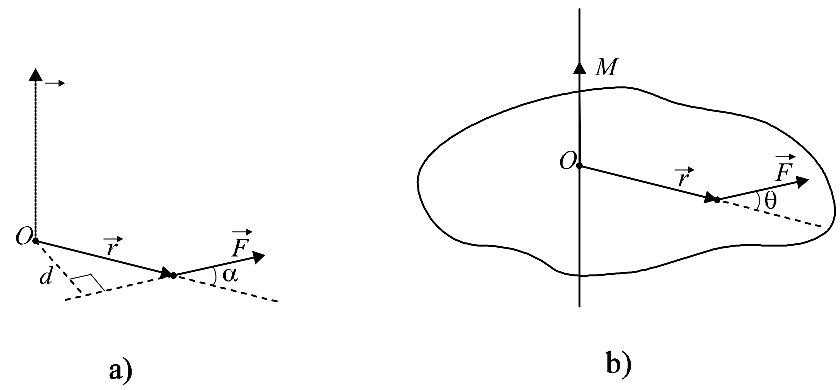

Figure 2: a) Momentul unei forţe faţă de un punct. b) Momentul forţei faţă de o axă

unde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ este momentul cinetic

Relaţia 10 reprezintă teorema de variaţie a momentului cinetic:

Momentul forţei este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

În cazul că momentul forţei este nul:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = ct \tag{11}$$

Dacă momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra unui corp este nul, momentul cinetic se conservă.

1.3 Dinamica mişcării de rotaţie

1.3.1 Energia cinetică de rotaţie

Să considerăm un corp rigid (Fig. 3) care se roteşte în jurul unei axe cu viteza unghiulară ω. Fiecare porţiune din corpul rigid considerat are o anumită energie cinetică O mică porţiune din corp cu masa m_i, aflată la distanţa r_i de axă de rotaţie se mişcă pe un cerc de rază r_i şi are viteza liniară $v_i = \omega r_i$.

Energia ei cinetică este:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \tag{12}$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale porţiunilor din care este constituit corpul.

$$E_R = \sum_i E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \tag{13}$$

Mărimea din paranteză poartă numele de moment de inerţie:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{14}$$

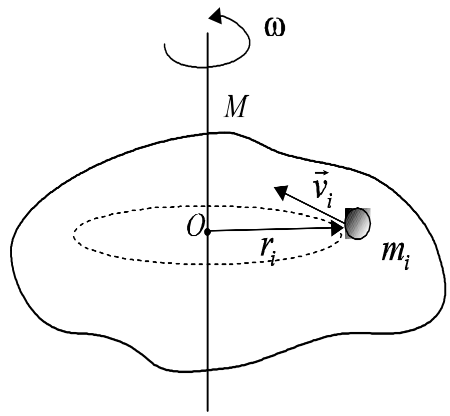

Figure 3: Mişcarea de rotaţie a unui corp solid rigir în jurul unei axe.

Cu această notaţie rezultă:

$$E_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{15}$$

Se observă că aceată relaţie este analoagă cu expresia energiei cinetice a unui corp $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Spre deosebire de masa unui corp, care nu depinde de poziţia sa, momentul de inerţie depinde de axa în jurul căreia corpul se roteşte.

Deaorece un corpul nu este compus din mase puctiforme discrete, ci prezintă o distribuţie continuuă a masei, sumarea din relaţia (14) devine o integrală

$$I = \int r^2 dm \tag{16}$$

unde integrarea se face pe întregul corp.

1.3.2 Dinanica rotaţiei unui corp solid

Considerăm o forţa care acţionează asupra unui corp rigid care se poate roti în jurul unei axe. Pentru simplificare forţa este aleasă într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie, astfel ca momentul forţei să fie după direcţia acestei axe A_1A_2. În timpul dt punctul P în care forţa este aplicată se va deplasa cu o distanţă infinitezimală ds de-a lungul unei traiectorii circulare în timp ce corpul se roteşte cu unghiul $d\theta$. Lucrul mecanic efectuat, notat aici cu δW pentru al deosebi de momentul cinetic notat cu L, de forţa F este

$$\delta W = \vec{F} d\vec{s} = (F \sin\phi) r d\theta \tag{17}$$

Deoarece $M = Fr\sin\phi$ rezultă:

$$\delta W = M d\theta \tag{18}$$

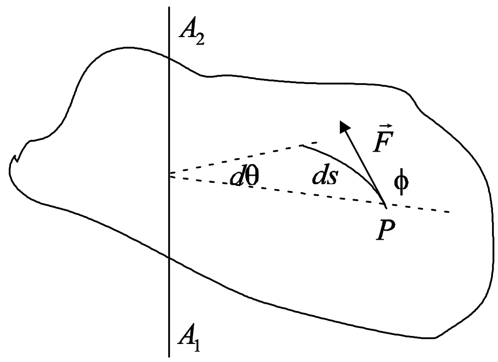

Figure 4: Forţă care acţioneaă asupra unui corp ce se poate roti în jurul unei axe.

Puterea implicată în acest proces este:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \tag{19}$$

Expresia (19) este analoagă formulei $P = Fv$ de la mişcarea de translaţie.

Aplicăm teorema variaţie energiei cinetice sub forma diferenţială (variaţia energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele externe):

$$\frac{dE_c}{dt} = dW \tag{20}$$

Ţinând cont de relaţiile (15) şi (18), relaţia (20) devine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = M\omega \tag{21}$$

Dar cum momentul cinetic este constant, deoarece corpul este rigid şi axa de rotaţie fixă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{1}{2}I\frac{d\omega^2}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt} = I\omega\varepsilon \tag{22}$$

unde ε poartă numele de acceleraţie unghiulară. Atunci din relaţia 21 se obţine:

$$M = I\varepsilon \tag{23}$$

Trebuie remarcat că şi mărimile unghiulare ω şi ε, pot fi tratate ca vectori. Ele au direcţia axei de rotaţie iar sensul lor este dat de regula burghiului. În cazul general ele au o direcţia perpendiculară pe planul de rotaţie.

1.3.3 Momentul cinetic şi viteza unghiulară

Considerăm situaţia prezentată în Fig. 3 în care corpul se mişcă în jurul unei axe. O mică porţiune din corp cu masa m_i, aflată la distanţa r_i de axă de rotaţie se mişcă pe un cerc de rază r_i şi are impulsul $p_i = m_i v_i = m_i \omega r_i$. Momentul ei cinetic este:

$$l_i = r_i p_i = m_i r_i v_i = \omega m_i r_i^2 \tag{24}$$

doarece impulsul este perpendicular pe raza r_i. Momenul cinetic este orientat după axa de rotaţie, iar sensul său este dat de regula burghiului. Momentul cinetic total este suma momentelor cinetice ale fiecări porţiuni:

$$L = \sum_i l_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 \tag{25}$$

Deoarece $\sum_i m_i r_i^2 = I$, momentul cinetic faţă de o axă se exprimă ca:

$$L = I\omega \tag{26}$$

Mărimile momentul forţei, momentul cinetic, viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară ăn cazul rotaţiei unui corp în jurul unei axe sunt dirijate de-a lungul acestia şi nu pot avea decât două sensuri. Luând unul din aceste sensuri pozitiv, celălat sens negativ, toţi cei patru vectori pot fi trataţi algebric şi se poate lucra doar cu mărimile lor considerate pozitive sau negative în funcţie de orientarea lor.

2 Mişcarea oscilatorie armonică

O mişcare care se repetă în mod regulat la intervale egale de timp se numeşte *mişcare periodică* Ca exemplu de mişcări periodice se pot da mişcarea Pământului în jurul Soarelui, mişcarea Lunii în jurul Pământului, mişcarea moleculelor într-un corp solid în jurul poziţiilor de echilibru, mişcarea unui pendul. Alte exemple de mărimi care variază periodic sunt: câmpurile electric şi magnetic ale undelor electromagnetice, curentul alternativ.

Dacă o particulă suferă o mişcare periodică astfel încât se mişcă înainte şi înapoi mişcare se numeşte *mişcare oscilatorie.* Cea mai simplă mişcare oscilatorie se petrece în cazul în care forţa care acţionează asupra unui corp este proporţională cu distanţa faţă de un punct fix, numit poziţie de echilibru, şi este orientată către acel punct. O astfel de forţă este forţă elastică, iar mişcarea determinată de aceasta poartă numele de *mişcare oscilatorie armonică.*

Un model pentru o astfel de mişcare este mişcarea unui corp legat de un resort care se poate deplasa pe o suprafaţă orizontală fără frecare. Originea axei pe care are loc mişcarea se alege în poziţia în care resortul este nedeformat. Pentru un corp asupra căruia acţionează o forţă elastică de-a lungul axei Ox legea a II -a mecanicii se exprimă astfel:

$$ma = -kx \tag{27}$$

sau:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{28}$$

Notând cu:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{29}$$

rezultă:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{30}$$

Relaţia (30) reprezintă o ecuaţie diferenţială de ordin doi. Soluţia acestei ecuaţii este:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{31}$$

unde A şi θ_0 reprezintă două constante. Mărimea $x\,(t)$ este elongaţia şi reprezintă depărtarea corpului de poziţia de echilibru la un moment dat, A este amplitudinea şi reprezintă elongaţia maximă, ω_0 este pulsaţia mişcării şi ea descrie caracterul periodic al mişcarii, $\omega_0 t + \theta_0$este faza mişcării, iar θ_0 reprezintă faza iniţială.

Din relaţia (31) rezultă viteza şi acceleraţia particulei care oscilează:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \tag{32a}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{33}$$

Ţinând cont de(31) şi (33) rezultă relaţia dintre acceleraţie şi elongaţie:

$$a = -\omega_0^2 x \tag{34}$$

Determinarea constantelor A şi θ_0 se face cunoscând poziţia şi viteza la momentul iniţial ($t = 0$):

$$x\,(0) = x_0; \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$$

Astfel

$$x_0 = A\cos\theta_0 \quad ; \quad v_0 = -\omega_0 A\sin\theta_0 \tag{35}$$

Astfel rezultă amplitudinea:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2}}$$

Determinarea fazei iniţiale se face din cunoaşterea funcţiilor trigonometrice sinus şi cosinus din al căror semn se determină cadranul în care este situat θ_0. Nu este indicat să se calculeze tangenta acestui unghi, deoarece funcţia tangentă este o funcţie periodică cu perioada egală cu π. Astfel θ_0 se determină considerând cele două relaţii de mai jos:

$$\sin\theta_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 A} \quad ; \quad \cos\theta_0 = \frac{x_0}{A}$$

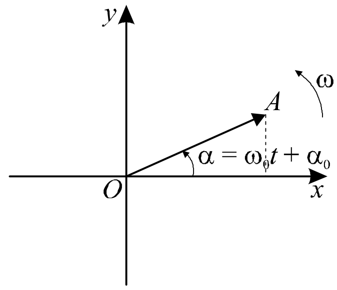

Figure 5: Reprezentarea fazorială a mişcarii oscilatorii.

Pentru determinarea perioadei T se ţine cont că funcţia cosinus este o funcţie periodică cu perioada principală egală cu 2π.

$$A\cos[\omega_0(t+T)+\theta_0] = A\cos[\omega_0 t+\theta_0+2\pi] \tag{36}$$

Rezultă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{37}$$

Se poate defini frecvenţa ν care reprezintă numărul de oscilaţii în unitatea de timp şi care este inversa perioadei;

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{38}$$

3 Reprezentările mişcării oscilatorii

3.1 Reprezentarea fazorială

Mişcarea este reprezentată printr-un vector rotator numit fazor. Elongaţia mişcării reprezintă proiecţia vârfului vectorului pe axa Ox (Fig. 5).

3.2 Reprezentarea complexă

Mişcarea poate fi reprezentată cu ajutorul unui număr complex

$$\widetilde{x} = A_0 \exp i(\omega_0 t+\theta_0) = A_0 \exp i\theta_0 \exp i\omega_0 t = A\exp i\omega_0 t \tag{39}$$

unde $A = A_0 \exp i\theta_0$ poartă numele de amplitudine complexă. Trecerea la reprezentarea sinusoidală (reală) se face foarte simplu: elongaţie este partea reală a lui $\widetilde{x}$, adică:

$$x = \mathrm{Re}\,\widetilde{x} \tag{40}$$

4 Probleme

1 Un resort orizontal este deformat sub acţiunea unei forţe $F = 8$ N cu $0,04$ m. De capătul resortului este legată o masă $m = 0,2$ kg şi apoi resortul este lăsat liber. Neglijând frecările să se determine:

a) constanta elastică a resortului;
b) frecvenţa de oscilaţie;
c) perioada de oscilaţie.

2 Un corp oscilează după legea:

$$x = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}$$

a) Să se determine amplitudinea, pulsaţia, perioada şi frecvenţa.
b) Să se determine viteza în funcţie de timp.

3 Un obiect legat de un resort oscilează cu perioada $T = 0,8$ s şi amplitudinea de 10 cm. La momentul $t = 0$ corpul se află la $x = 5$ cm la dreapta poziţiei de echilibru. Care este poziţia corpului la $t = 2$ s ?