Curs 1 - Fizică

Petrescu Emil
Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

1 Dinamica

1.1 Impulsul

1.1.1 Teorema impulsului pentru un punct material.

Din legea a II-a a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \qquad \vec{F}dt = d\vec{p} \tag{1}$$

se obţine:

$$\Delta\vec{p} = \int_1^2 d\vec{p} = \int_1^2 \vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{2}$$

unde cu 1 am indexat starea iniţială de la momentul t_1 iar cu 2 am notat starea finală de la momentul t_2.

Dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material este nulă:

$$\Delta\vec{p} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \vec{p} = const. \tag{3}$$

Aceasta este legea conservării impulsului:

Dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra unui punct material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant.

1.1.2 Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Pentru simplificare vom considera un sistem format doar din două puncte materiale, rezultatele obţinute fiind valabile şi pentru un sistem format din N puncte materiale.

În Fig. 1 sunt reprezentate cele două corpuri. Cu $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ am notat forţele externe care acţionează asupra celor două corpuri. Cu $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ s-a notat forţa cu care corpul 1 acţionează asupra corpului 2 iar cu $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ s-a notat forţa cu care corpul 2 acţionează asupra corpului 1. Conform legii acţiunii şi reacţiunii cele două forţe sunt egale şi acţionează în sensuri opuse, adică:

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}_{12} = -\overrightarrow{\mathcal{F}}_{21} \tag{4}$$

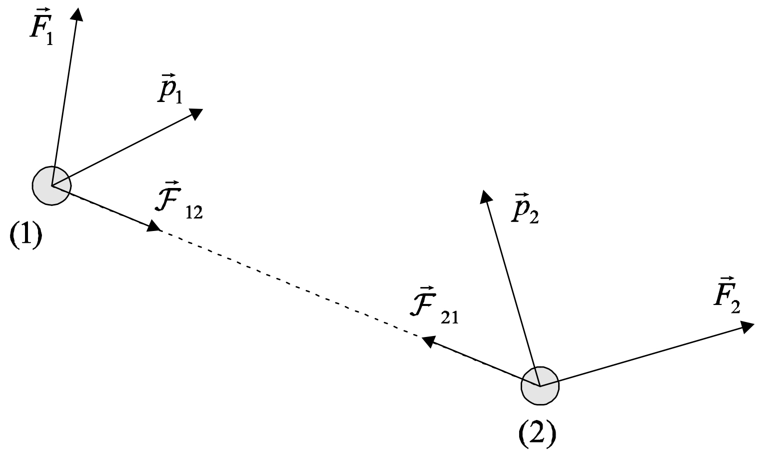

Figure 1: Teorema impulsului pentru un sistem de două puncte materiale.

Dacă $\vec{p}_1$ şi $\vec{p}_2$ sunt impulsurile celor două corpuri, se defineşte impulsul total al sistemului ca sumă a impulsurilor particulelor individuale:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{5}$$

Legea a doua pentru fiecare corp în parte se scrie astfel:

$$\vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \tag{6}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \tag{7}$$

Se adună relaţiile (6) şi (7), şi se ţine cont că $\vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0$. Atunci:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{8}$$

Notând cu $\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ rezultanta forţelor externe ce acţionează asupra sistemului rezultă:

$$\vec{F}_e = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{9}$$

Aceasta este legea impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egal cu rezultanta forţelor ce acţionează asupra sistemului.

Dacă rezultanta forţelor externe este nulă, $\vec{F}_e = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0; \quad \vec{P} = const. \tag{10}$$

Se obţine astfel legea conservării impulsului:

Impulsul unui sistem de puncte materiale se conservă când rezultanta forţelor externe este nulă.

1.2 Lucru mecanic

Fie o forţă $\vec{F}$ constantă, care acţionează asupra unui corp şi produce o deplasare a acestuia pe distanţa $\Delta\vec{r}$. Se consideră că $\vec{F}$ face cu vectorul deplasare un unghi α. Prin definiţie *lucrul mecanic* este egal cu produsul scalar dintre forţă şi deplasare:

$$L = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha \tag{11}$$

Se observă că dacă $\alpha = 0$ forţa şi deplasarea au aceeaşi direcţie şi:

$$L = F\Delta r \tag{12}$$

iar dacă $\alpha = \pi/2$ forţa este perpendiculară pe direcţia deplasării, astfel că:

$$L = F\Delta r\cos\pi/2 = 0 \tag{13}$$

Considerăm o particulă ce se deplasează de-a lungul axei Ox sub acţiunea unei forţe care nu mai este constantă şi care variază în funcţie de poziţia particulei. În acest caz se defineşte un lucru mecanic elementar, adică lucrul mecanic efectuat de forţă când particula suferă o delasare infinitezimală dx:

$$\delta L = F dx \tag{14}$$

Lucrul mecanic total se obţine prin sumarea lucrurilor mecanice elementare:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F dx \tag{15}$$

unde x_1 este poziţia iniţială, iar x_2 este poziţia finală.

1.2.1 Lucrul mecanic al forţei de greutate.

Forţa de greutate este forţa care acţionează asupra oricărui corp aflat în apropiere de suprafaţa pământului şi este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie gravitaţională $g = 9,8$ m/s^2.

$$\vec{G} = m\vec{g} \tag{16}$$

Considerăm că deplasarea corpului are loc între punctele A şi B. Pe traiectoria (1) (Fig. 2a)

$$L_1 = mg(h_1 - h_2) = -mg\,(h_2 - h_1) \tag{17}$$

Pe acest drum particula se deplasează liber, deoarece asupra ei acţionează doar forţa de greutate. Pe traiectoria (2) particula nu se poate deplasa liber. Ea este constrânsă să urmeze această traiectorie şi acest lucru nu se poate realiza decât dacă se acţionează din exterior cu alte forţe decât forţa de greutate. Totuşi aici interesează doar lucrul mecanic al forţei de greutate. El este egal în acest caz cu suma lucrurilor mecanice efectuate pe porţiunile AC şi CB.

$$\begin{aligned} L_2 &= L_{AC} + L_{CB} = mg(AC)\cos\alpha + mg(CB)\cos\frac{\pi}{2} \\ &= mg[AC\cos\alpha] = mg(h_2 - h_1) = -mg\,(h_2 - h_1) \end{aligned} \tag{18}$$

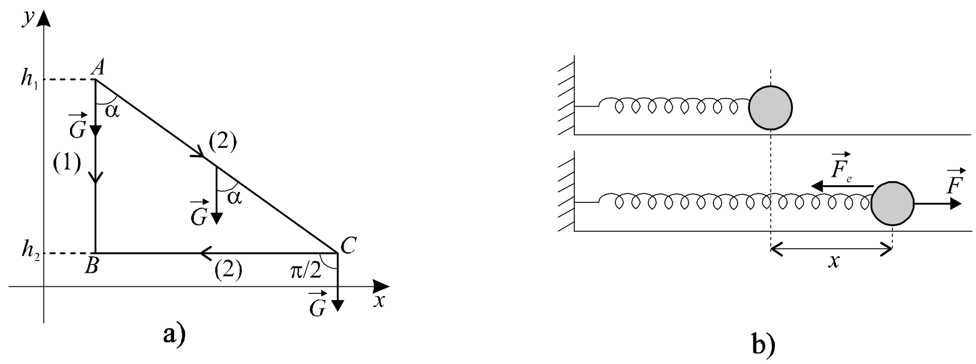

Figure 2: a) Lucrul mecanic al forţei de greutate. b) Lucrul mecanic al forţei elastice.

Se observă că valoarea lucrului mecanic efectuat de forţa de greutate nu depinde de drumul parcurs, ci doar de poziţia iniţială şi finală. *O forţă al cărei lucru mecanic depinde doar de poziţiile iniţială şi finală se numeşte forţă conservativă, iar regiunea din spaţiu în care acţionează astfel de forţe poartă numele de câmp conservativ.*

1.2.2 Lucrul mecanic al forţei elastice

O astfel de forţă apare când un resort este comprimat sau alungit sub acţiunea unei forţe externe (Fig. 2b)

Experimental se constată că dacă asupra unui resort, se acţionează cu forţa $\vec{F}$, alungirea maximă a resortului este proporţională cu deformarea acestuia. Constanta de proporţionalitate se notează cu k şi poartă numele de constantă elastică. Astfel:

$$F = kx \tag{19}$$

Deoarece resortul nu se mai poate deforma, înseamnă că în interiorul resortului acţionează o forţă egală cu externă şi de sens contrar cu aceasta. Această forţă poartă numele de forţă elastică:

$$F_e = -F = -kx \tag{20}$$

Lucrul mecanic efectuat de forţa elastică când deferomaţia resortului variază de la valoarea x_1 la valoarea x_2:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\left(\frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k}{2}x_1^2\right) \tag{21}$$

Ca şi în cazul forţei de greutate, lucrul mecanic depinde doar de poziţia iniţială şi finală. Rezultă că forţa elastică este o forţă conservativă.

1.2.3 Lucrul forţei de frecare

Când un corp este deplasat pe o suprafaţă plană, în sens invers deplasării acţionează forţe de frecare $F_f = \mu mg$, unde cu μ s-a notat coeficientul de frecare la alunecare. Lucrul mecanic este:

$$L = -\mu mgd \tag{22}$$

unde d este deplasarea. Semnul minus apare deoarece deplasarea se face în sens invers forţei. Forţele de frecare nu sunt conservative deoarece între două puncte există o infinitate de drumuri pe care *lucrul mecanic este diferit.*

1.3 Puterea

Puterea reprezintă lucrul mecanic efectuat de sistem în unitatea de timp. Putere şi instantanee

$$P = \frac{\delta L}{dt} \tag{23}$$

este raportul dintre lucrul mecanic efectuat de sistem δL în timpul dt. În cazul în care forţa şi deplasarea sunt pe direţia axei Ox, $\delta L = Fdx$ şi

$$P = \frac{\delta L}{dt} = F\frac{dx}{dt} = Fv \tag{24}$$

1.3.1 Puterea automobilelor

Automobilele sunt maşini destul de ineficiente. Chiar în condiţii ideale mai puţin de 15% din energia chimică a combustibilului se transformă în energie mecanică, situaţie care este şi mai proastă în cazul circulaţiei prin marile oraşe. Mai multe mecanisme contribuie la pierderea de energie în automobile:

În jur de 67% din energie este pierdută în motor, în sistemul de răcire al automobilului şi în sistemul de evacuare. Aproximativ 16% din energie se pierde prin frecările dintre mecanismele de transmisie interne ale automobilului, 4% din energie este utilizată pentru punerea în funcţiune a diverselor accesorii, ca pompa de benzină, sistemul de aer condiţionat, sistemul audio. Aşadar numai în jur de 13% din energie este utilizată pentru propulsia efectivă a automobilului, adică pentru a compensa pierderea de energie datorită frecării pneurilor şi frecării cu aerul.

Să examinăm puterea care furnizează forţa necesară deplasării unui automobilul. Considerăm pentru coeficientul de frecare dintre pneuri şi şosea valoarea $\mu = 0,016$. Pentru o maşină cu greutatea de 1450 kg forţa de frecare este aproximativ:

$$F_f = \mu N \approx \mu mg = 227 \text{ N}$$

Pe măsură ce viteza maşinii creşte, apare o micşorare a forţei de apăsare normală N, ca rezultat al descreşterii presiunii aerului ce curge deasupra maşinii.

Forţa de rezistenţă la înaintarea prin aer a automobilului este proporţională cu pătratul vitezei:

$$F_a = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

unde D este coeficientul de rezistenţă la înaintare, A este aria secţiunii maşinii, ρ este densitatea aerului. Pentru a realiza o estimare utilizăm valorile $D \simeq 0,5$, $\rho = 1,20$ kg/m^{3}şi $A \approx 2$ m^2. Mărimea forţei totale de rezistenţă este suma celor două forţe:

$$F_t = F_f + F_a$$

Puterea necesară pentru a menţine automobilul la viteză constantă v este:

$$P = F_t v$$

În Tabelul 1.1 sunt prezentate forţa de apăsare normală, forţa de frecare, forţa de rezistenţă la înaintare prin aer, forţa totală e rezistenţă şi puterea în funcţie de viteză.

Tabelul 1.1
Forţele de rezistenţă şi puterea unui automobil în funcţie de viteză.

v (m/s)	N (N)	F_f (N)	F_a (N)	F_t (N)	P (kW)
0	14200	0	0	0	0
8,9	14100	226	48	274	2,4
17,9	13900	222	192	414	7,4
26,8	13600	218	431	649	17,4
35,8	13200	211	767	978	35
44,7	12600	202	1199	1400	62,6

1.4 Energia cinetică

Să considerăm un corp asupra căruia acţionează mai multe forţe a căror rezultantă este F este orientată de-a lungul axei Ox. Lucrul mecanic efectuat când corpul este deplasat din poziţia x_1 în poziţia x_2 este:

$$L = \int_1^2 F dx \tag{25}$$

Dar:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

Atunci:

$$L = \int_1^2 m\frac{dv}{dt}dx = \int_1^2 m\frac{dv}{dt}vdt = \int_1^2 mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{26}$$

Mărimea:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{27}$$

este numită *energia cinetică*. Relaţia 26 reprezintă teorema variaţiei energiei cinetice pentru un punct material:

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor ce acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei cinetice a acestuia.

În cazul în care sistemul este format din mai multe puncte materiale energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale fiecărui punct material:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{28}$$

Şi în acest caz variaţia energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forţele ce acţionează asupra sistemului.

1.5 Energia potenţială

Pentru a înţelege acest concept vom porni de la exprimarea lucrului mecanic pentru diverse tipuri de forţe conservative. Astfel pentru forţa de greutate:

$$L = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1) \tag{29}$$

Pentru forţa elastică:

$$L = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) \tag{30}$$

Se observă că în ambele cazuri lucrul mecanic se poate exprima ca minus variaţia unei mărimi ce depinde doar de poziţie. Această mărime poartă numele de energie potenţială. Astfel putem spune că lucrul mecanic al unei forţe conservative este egal cu minus variaţia energiei potenţiale:

$$L = -\Delta E_p = -(E_{p_2} - E_{p_1}) \tag{31}$$

Relaţia de mai sus poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru energia potenţială. Ca o primă observaţie putem spune că energia potenţială este definită până la o constantă arbitrară C:

$$E'_p = E_p + C \tag{32}$$

Deoarece:

$$\Delta E'_p = E'_{p_2} - E'_{p_1} = E_{p2} + C - E_{p1} - C = E_{p2} - E_{p1} = -L \tag{33}$$

aceasta înseamnă că se poate alege orice valoare pentru constanta aditivă. În general, se alege o anumită poziţie, în care energia potenţială se consideră nulă. Această alegere determină constanta aditivă. Alegerea se face astfel încât forma energiei potenţiale să fie cât mai simplă.

Astfel pentru forţa de greutate

$$E_{pg} = mgh + C \tag{34}$$

se consideră că la suprafaţa pământului ($h = 0$) energia potenţială este nulă $E_p = 0$. Rezultă $C = 0$ şi energia potenţială gravitaţională ia forma:

$$E_{pg} = mgh \tag{35}$$

Pentru forţa elastică

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} + C \tag{a.86}$$

se consideră că energia potenţială este nulă atunci când resortul nu este deformat. Astfel pentru $x = 0$, $E_{pe} = 0$. Rezultă $C = 0$ şi:

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} \tag{36}$$

Relaţia (31) considerată ca relaţie de definiţie a enegiei potenţiale, se scrie sub formă diferenţială ca:

$$\delta L = -dE_p \tag{37}$$

Pentru simplificare vom considera că mişcarea este unidimensională şi se face de-a lungul axei Ox:

$$\delta L = Fdx \ = -dE_p \tag{38}$$

Rezultă:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \tag{39}$$

În cazul general:

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r}$$

Cum

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \quad \text{şi} \quad d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

rezultă:

$$\delta L = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Deoarece energia potenţială este o mărime care depinde de poziţia în care se află corpul $E_p = E_p(x,\ y,\ z)$:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \tag{40}$$

Astfel relaţia (38) se scrie:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

şi

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Atunci:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z = -\nabla E_p \quad (41)$$

În relaţia (41) sus simbolul ∇ reprezintă operatorul nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad (42)$$

1.6 Teorema variaţiei energiei mecanice

Se consideră un punct material asupra căruia acţionează alături de forţele conservative a căror rezultantă este F_C şi forţe neconservative a căror rezultantă este F_{NC}. Utilizând teorema variaţiei energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L = L_{F_C} + L_{F_{NC}} \quad (43)$$

unde s-a exprimat separat lucrul mecanic al forţelor conservative L_{F_C} şi lucrul mecanic al forţelor neconservative $L_{F_{NC}}$. Lucrul mecanic al forţelor conservative se exprimă ca minus variaţia energiei potenţiale:

$$L_{F_C} = -\Delta E_p \quad (44)$$

Rezultă că:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + L_{F_{NC}}$$

şi

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_P) = L_{F_{NC}} \quad (45)$$

Definim energia mecanică ca suma dintre energia cinetică şi potenţială

$$E_M = E_c + E_p \quad (46)$$

Atunci:

$$\Delta E_M = E_{M_2} - E_{M_1} = L_{F_{NC}} \quad (47)$$

Relaţia de mai sus reprezintă teorema variaţiei energiei mecanice:

Lucrul mecanic al forţelor neconservative care acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei mecanice a punctului material respectiv.

Dacă asupra punctului material acţionează numai forţe nconservative, $L_{F_{NC}} = 0$ şi:

$$E_{M2} = E_{M1}$$

Aceasta este legea conservării energiei mecanice.

Într-un câmp de forţe conservative energia mecanică a punctului material rămâne constantă în timpul mişcării, având loc o transformare a energiei cinetice în energie potenţială şi invers.

Teoremele variaţiei energiei cinetice şi conservării energiei mecanice sunt valabile şi în cazul sistemelor formate din mai multe puncte materiale în care forţele interne (dintre particule) sunt conservative.

2 Probleme

1. Un corp de masă $m = 2$ kg este ataşat la un resort cu o constantă elastică $k = 10^3$ N/m. Resortul este comprimat cu $x = 2$ cm. Apoi resortul este eliberat. Să se calculeze viteza corpului când resortul trece prin poziţia de echilibru (mişcarea are loc în plan orizontal, fără frecare).

2. Energia potenţială a unei particule este:

$$U(x) = -x^3 + 2x^2$$

Să se determine forţa care acţionează asupra particulei.

3* Un pendul balistic este un aparat pentru măsurarea vitezei unui proiectil (de exemplu un glonţ). Acesta constă dintr-un corp de lemn de masa m_2 suspendat de un fir. Un glonţ de masa m_1 întră în acest bloc şi-l ridică înălţimea h faţă de poziţia iniţială. Să se determine viteza glonţului în funcţie de h.