

Fenomene de transport

Scopul acestor note de curs este acela de a analiza legile după care se produc fenomenele de transport cele mai cunoscute, cum sunt difuzia și convecția. Difuzia termică are aplicații la evacuarea căldurii. Toate dispozitivele reale din industrie sunt sisteme disipative, care au nevoie de răcire pentru a evita supraîncălzirea. Fenomenele de convecție explică formarea curenților atmosferici și oceanici, încălzirea locuințelor sau răcirea în mașinile frigorifice.

Noțiunea de “transport” se poate extinde de la mărimile uzuale cum sunt substanța, energia, sarcina electrică, la mărimi mai puțin obișnuite, cum sunt cele caracteristice fenomenelor economico-sociale: transport de bani, de informație, sau de cunoștințe.

Cuprins

I. Transportul în interpretare microscopică

Mărimi fizice caracteristice

II. Legile proceselor de transport

Caracterizarea macroscopică a fenomenelor de transport

Fenomene de difuzie

Fenomene de convecție (drift)

I. Transportul în interpretare microscopică

Mărimi fizice caracteristice

Transportul este un fenomen care se produce în spațiu și necesită un interval de timp pentru a se finaliza.

Cauzele fenomenelor de transport

Cauzele fenomenelor de transport sunt dezechilibrele dintre sisteme sau dintre părți ale sistemelor. Evoluția naturală este către uniformizarea proprietăților, caracterizate de mărimi fizice constante în timp și spațiu.

Orice sistem fizic izolat tinde să evolueze către stări caracterizate de proprietăți constante.

Enunțul de mai exprimă o realitate constatată în toate studiile efectuate, necontrazisă de niciun experiment, prin urmare afirmația a fost ridicată la rang de *principiu*¹.

Reamintim că *stările* unui sistem sunt acele situații în care *s-ar putea găsi* sistemul, *în lipsa oricărei perturbații*. Condiția de absență a oricărei influențe externe este esențială, adică sistemul să fie un sistem izolat, neperturbat. Stările neperturbate se mai numesc stări de echilibru, sau stări de echilibru intern. Un alt enunț al principiului de mai sus este cel din termodinamică:

Un sistem fizic izolat ajunge, după un timp caracteristic sistemului, într-o stare (de echilibru intern), pe care o păstrează indefinit.

Deoarece sistemul fizic ocupă un domeniu spațial, *stările* (de echilibru, neperturbate) presupun, implicit, și faptul că proprietățile trebuie să fie *uniforme spațial*, adică sistemul să fie *omogen* din punct de vedere al proprietății (proprietăților) aflate în studiu. Procesul de omogenizare spațială are loc prin *transportul* unei entități fizice în interiorul sistemului. Fenomenele de transport sunt explicabile pe baza structurii microscopice și sub-microscopice a sistemului (structură moleculară, electronică etc.).

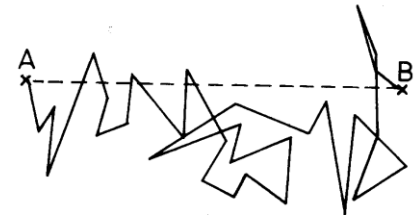
Prin proces de transport se înțelege procesul microscopic de modificare spațială a proprietăților unui sistem izolat, în tendința de a atinge starea de echilibru.

Mărimi microscopice caracteristice

Fie următorul experiment. Într-un colț al camerei se află un flacon cu parfum. La un moment dat, se înlătură capacul și se cronometrează timpul după care mirosul de parfum este perceput de un observator aflat în partea opusă a camerei. Se constată că acest timp este de ordinul zecilor de secunde. Totuși, imediat după procesul de evaporare, moleculele substanței aromate ajung în stare de echilibru termic cu moleculele de aer din cameră, deci vor fi caracterizate de aceleași valori ale energiei cinetice medii. Moleculele fiind comparabile ca mase, înseamnă că vor avea

¹ Cunoscut sub numele de *principiul fundamental al termodinamicii*.

viteze de același ordin de mărime, adică de ordinul sutelor de metri pe secundă. Cei câțiva metri ai camerei ar trebui să fie parcurși de molecule în timpi de ordinul sutimilor de secundă. Evident, în acest raționament există o eroare, pentru că rezultatul nu concordă cu constatările experimentale.

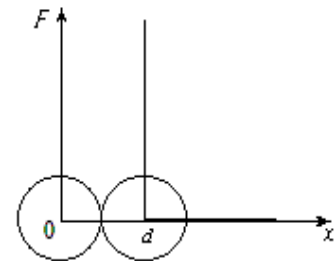


Drumul real parcurs de molecule

Singurul fapt luat în considerare este *ciocnirea* moleculelor, în mișcarea lor de agitație termică (v. fig.), drumul real parcurs de molecule între punctele A și B fiind mult mai lung decât cel în linie dreaptă. Numărul de molecule dintr-un volum macroscopic de gaz, la presiune normală, fiind de ordinul numărului lui Avogadro ($\sim 10^{23}$ molecule/mol), ne dăm seama că numărul de ciocniri pe care le suferă fiecare moleculă trebuie să fie imens, chiar într-un interval scurt de timp. Fiecare moleculă este deviată de nenumărate ori de la traiectoria rectilinie. Aceasta explică de ce moleculele unui gaz își manifestă prezența după un timp mult mai lung decât cel calculat pe baza distanței dintre cele două puncte și a vitezei medii a moleculelor. Modificarea traiectoriei rectilinii a moleculelor este rezultatul ciocnirilor dintre acestea, în cursul mișcării de agitație termică.

Secțiunea de ciocnire și frecvența ciocnirilor

În ipoteza *gazului ideal*, două molecule interacționează între ele ca două *sferice rigide*², dependența forței de distanța x dintre centrele moleculelor fiind cea din figură. Forța este nulă pentru distanțe care depășesc diametrul d al moleculelor și crește brusc când distanța devine egală cu d .

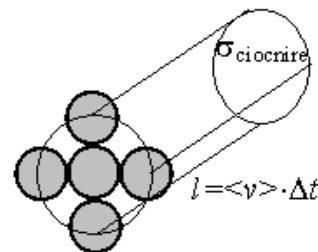


Modelul sferelor rigide

Secțiunea de ciocnire este aria cercului în interiorul căruia molecula de referință își poate atinge vecinii (ilustrată în figura alăturată). În ipoteza că molecula este o sferă rigidă cu raza r , secțiunea este

$$\sigma_{\text{ciocnire}} = \pi(2r)^2.$$

Se poate evalua *frecvența ciocnirilor - numărul de ciocniri pe secundă* - suferite de o moleculă de azot din aerul aflat în condiții standard ($p_{\text{res}0} = 101325 \text{ N/m}^2$, $T_0 = 273,15 \text{ K}$). Pentru aceasta, se consideră că ea este o sferă rigidă, cu raza $r \approx 10^{-9} \text{ m}$, care se va ciocni de *toate* moleculele aflate în interiorul volumului cu secțiunea $\sigma_{\text{ciocnire}} = \pi(2r)^2$, și generatoarea $l = \langle v \rangle \cdot \Delta t$:



Secțiunea de ciocnire

$$N_{\text{ciocniri}} = n \cdot \pi(2r)^2 \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t,$$

unde densitatea volumică de molecule n și viteza medie de agitație termică $\langle v \rangle$ au fost deja calculate³ pentru condițiile standard:

² A se vedea fascicula *Structura materiei*, Cap. „Interacția dintre molecule”.

³ Idem.

$$n = \frac{pres_0}{k_B T_0} \cong 2,65 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}} \cong 468 \text{ m/s.}$$

Rezultă că frecvența ciocnirilor este

$$\frac{N_{\text{ciocniri}}}{\Delta t} = n \cdot \pi(2r)^2 \cdot \langle v \rangle \Rightarrow \frac{N_{\text{ciocniri}}}{\Delta t} = 2,65 \cdot 10^{25} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-18} \cdot 468 \cong 1,5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}.$$

Inversul acestei mărimi reprezintă *intervalul de timp mediu* dintre două ciocniri consecutive, care este de ordinul a 7 picosecunde.

Concluzia este aproximativ adevărată pentru orice specie moleculară din aer, în sensul că oricare dintre acestea suferă circa o sută de miliarde de ciocniri în fiecare secundă! Acest lucru explică lentoarea proceselor de transport.

Drumul liber mijlociu

Prin *drum liber mijlociu*, notat l_{med} , se înțelege distanța medie parcursă de o moleculă între două ciocniri consecutive: acesta va fi dat de viteza medie, multiplicată cu timpul mediu dintre două ciocniri consecutive.

Pentru datele din cazul precedent, se obține

$$l_{\text{med}} = \langle v \rangle \cdot \frac{\Delta t}{N_{\text{ciocniri}}} \cong 3,1 \cdot 10^{-9} \text{ m, sau } l_{\text{med}} \cong 3,1 \text{ nm.}$$

Fenomenele de transport sunt, în esență, de două tipuri⁴:

1. Fenomene de *difuzie*, unde transportul se realizează prin mișcarea *dezordonată* de agitație termică; aceste fenomene sunt *lente*.
2. Fenomene de *drift*, sau de *convecție*, unde transportul se datorează unei mișcări *ordonate*, care *se suprapune* peste mișcarea de agitație termică.

Exemple

1. Transferul de căldură, dinspre zona mai caldă înspre zona mai rece a unei bare de fier cu un capăt încălzit în foc, este un fenomen de difuzie (sau conducție) termică. Dintre fenomenele de drift amintim curentul electric în circuitele electrice (datorat unei tensiuni electrice), sau curenții atmosferici (datorați diferențelor locale de presiune).
2. În exemplul cu parfumul, raspândirea moleculelor arome este un fenomen combinat, de difuzie și de convecție a moleculelor; din aceleași motive, părțile inferioare ale atmosferei sunt amestecuri omogene de azot (N_2), oxigen (O_2), vapori de apă (H_2O), dioxid de carbon (CO_2), precum și de urme de hidrogen (H_2) și gaze inerte: argon (Ar), heliu (He) etc. Dacă nu ar exista difuzia, câmpul gravitațional ar diviza atmosfera în straturi distincte. Stratul cel mai

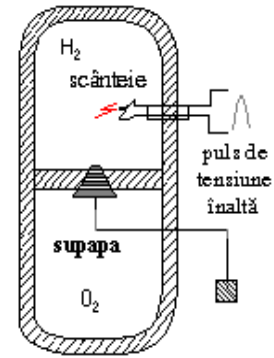
⁴ Într-o teorie mai largă, ambele tipuri de transport se pot explica în mod unitar http://en.wikipedia.org/wiki/Smoluchowski_equation.

de jos ar fi din CO_2 , stratul următor ar fi de O_2 , următorul de N_2 , apoi vaporii de H_2O s.a.m.d., cel mai sus ar trebui să fie He și H_2 .

Entropia și starea de dezordine.

Fenomenele de transport nu pot fi explicate, exclusiv, doar prin parametrii de stare considerați până acum, anume presiune, volum, temperatură, cantitate (totală) de substanță, ci trebuie luate în considerație informații suplimentare, ca de exemplu natura moleculelor (pentru specii distincte, trebuie considerate, separat, fiecare tip de substanță), eventual sarcina electrică, momentul magnetic etc.

Experimentul următor demonstrează acest lucru. Un cilindru gros de oțel este divizat în două compartimente, dintre care cel de sus conține hidrogen, iar cel de jos oxigen (v. fig.), la aceeași presiune și la aceeași temperatură. În peretele părții superioare montăm o bujie, care poate genera o scânteie electrică. Peretele care separă gazele are o supapă care poate fi deschisă sau închisă, după dorință. Dacă s-ar produce o scânteie electrică în gaz (hidrogen, H_2) înainte de deschiderea supapei, atunci hidrogenul nu s-ar aprinde, deoarece nu există suficient oxigen (O_2) pentru ardere. Dacă însă scânteia se produce la un timp oarecare după deschiderea supapei, atunci rezultatul va fi “explozia” amestecului de hidrogen și oxigen, cu producerea de apă (H_2O), sub formă de vapori. Aceasta demonstrează că moleculele de oxigen, deși mai grele, s-au ridicat, trecând în compartimentul superior, în timp ce moleculele mai ușoare de hidrogen au coborât în compartimentul inferior. Mișcarea gazelor s-a produs în sens contrar acțiunii câmpului gravitațional.



Calitativ, fenomenul este ușor de explicat pe baza teoriei cinetico-moleculare a agitației termice. În mișcarea lor haotică, moleculele celor două gaze se vor ciocni între ele, schimbându-și permanent traiectoriile, astfel încât moleculele unui gaz vor pătrunde în domeniul în care se află moleculele celuilalt gaz, până când amestecarea este completă. Fenomenul de difuzie durează atâta timp cât concentrațiile gazelor în diferite părți ale vasului sunt diferite.

Situația descrisă este compatibilă atât cu ecuațiile termice de stare, scrise separat pentru hidrogen și oxigen, înainte de amestecare, cât și cu ecuația termică de stare a amestecului.

Înainte de amestecare (presiunile și temperaturile sunt egale):

$$pres = \frac{N_{\text{H}_2}}{V_{\text{H}_2}} k_B T, \quad pres = \frac{N_{\text{O}_2}}{V_{\text{O}_2}} k_B T,$$

de unde

$$\frac{pres}{k_B T} = \frac{N_{\text{H}_2}}{V_{\text{H}_2}} = \frac{N_{\text{O}_2}}{V_{\text{O}_2}} = \frac{N_{\text{H}_2} + N_{\text{O}_2}}{V_{\text{H}_2} + V_{\text{O}_2}}.$$

Reținând extremele, se obține

$$\frac{pres}{k_B T} = \frac{N_{\text{H}_2} + N_{\text{O}_2}}{V_{\text{H}_2} + V_{\text{O}_2}}, \quad \text{sau} \quad pres = \frac{N_{\text{H}_2} + N_{\text{O}_2}}{V_{\text{H}_2} + V_{\text{O}_2}} \cdot k_B T$$

adică exact ecuația termică de stare a gazului ideal după amestecare și încetarea difuziei.

Prin urmare, ecuația termică de stare, singură, nu poate explica difuzia. Este nevoie de ceva suplimentar, care să caracterizeze cantitativ starea de dezordine din sistem pentru fiecare specie de molecule. Această mărime este *entropia*.

Se pot face următoarele remarci despre concentrațiile celor două specii.

Înainte de amestecare, în volumul superior:

- concentrația moleculelor de hidrogen: $n_{\text{H}_2 \text{ initial}} = \frac{N_{\text{H}_2}}{V_{\text{H}_2}}$;
- concentrația moleculelor de oxigen: zero.

Înainte de amestecare, în volumul inferior:

- concentrația moleculelor de hidrogen: zero;
- concentrația moleculelor de oxigen: $n_{\text{O}_2 \text{ initial}} = \frac{N_{\text{O}_2}}{V_{\text{O}_2}}$.

După deschiderea supapei, în volumul total, comun pentru amestecul de hidrogen și oxigen:

- concentrația moleculelor de hidrogen: $n_{\text{H}_2 \text{ final}} = \frac{N_{\text{H}_2}}{V}$;
- concentrația moleculelor de oxigen: $n_{\text{O}_2 \text{ final}} = \frac{N_{\text{O}_2}}{V}$.

Dezordinea poate fi măsurată prin inversul concentrației, adică prin *volumul accesibil unei molecule din fiecare specie*. Acesta este mai mare în starea finală:

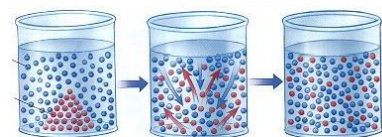
$$\frac{V}{N_{\text{H}_2}} > \frac{V_{\text{H}_2}}{N_{\text{H}_2}}, \quad \frac{V}{N_{\text{O}_2}} > \frac{V_{\text{O}_2}}{N_{\text{O}_2}}.$$

Evoluția naturală a sistemelor este de la ordine spre dezordine. Starea de dezordine este mai mare după încetarea difuziei. Ca și disipația, difuzia caracterizează evoluția către dezordine. Ambele fenomene sunt consecințe ale agitației termice.

II. Legile proceselor de transport

Caracterizarea macroscopică a proceselor de transport

Un sistem fizic izolat tinde să evolueze liber (de la sine) către o stare de echilibru, caracterizată de omogenitate spațială a proprietăților sale. Spre exemplu, dizolvarea zahărului în apă este un proces de omogenizare, sub influența agitației termice (vezi figura alăturată). La scară macroscopică, această tendință se exprimă prin ecuații care descriu cantitativ variația mărimilor de stare asociate proprietăților aflate în studiu. Astfel de mărimi de stare pot fi densitatea volumică de particule, concentrația molară, densitatea masică, temperatura etc.



Ilustrarea unui proces de difuzie

Ținând cont că proprietatea este analizată în tot volumul ocupat de sistemul fizic, mărimea de stare trebuie să fie funcție de coordonatele spațiale (x,y,z) ; ținând cont că proprietatea este

analizată în evoluția temporală, mărimea de stare trebuie să fie și funcție de timp. În concluzie, mărimile fizice de stare sunt *funcții* de spațiu și de timp, adică de (t,x,y,z) . Dacă se notează, generic, o astfel de mărime de stare cu ρ , atunci avem $\rho(t,x,y,z)$. Dacă ne referim doar la neomogenități unidimensionale, fie aceasta x , atunci dependența se reduce la două variabile $\rho(t,x)$.

Gradienți

Neomogenitățile spațiale locale sunt caracterizate de *gradientul* mărimii fizice de stare asociată proprietății în discuție.

Formal, gradientul se exprimă prin *derivata spațială*. Deoarece trebuie făcută distincție între dependențele în raport cu fiecare variabilă, este necesară utilizarea *derivatelor parțiale*. În caz unidimensional (o singură variabilă spațială, în afară de variabila timp), gradientul se scrie:

$$\text{gradient} \stackrel{\text{notat}}{=} \text{Grad} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Gradientul se aplică mărimii fizice de stare și indică variația acesteia cu distanța:

$$\text{Grad } \rho(t, x) = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}.$$

Exemplu

Într-o cameră se măsoară temperatura în două locuri: lângă calorifer, unde se găsește $T_1=29^\circ\text{C}$, și lângă fereastră, unde termometrul indică $T_2=21^\circ\text{C}$. Dacă distanța calorifer-fereastră este de 4m (poziția caloriferului este la $x_1=0$, poziția ferestrei este la $x_2=4\text{m}$), atunci gradientul de temperatură este

$$\text{Grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \text{Grad } T = \frac{-8\text{K}}{4\text{m}} = -2 \text{ K/m}.$$

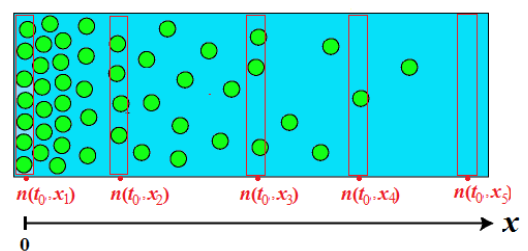
Semnul negativ indică faptul că temperatura scade la creșterea coordonatei spațiale. În acest caz, originea referențialului a fost aleasă în locul unde se găsește caloriferul. Mărimea fizică de stare este temperatura $\rho(t, x) = T(t, x)$, iar variabila timp nu a mai fost scrisă în mod explicit, pentru a nu complica inutil scrierea.

Un sistem omogen din punct de vedere al concentrației are gradientul nul.

Exemplu

În situația ilustrată în figura alăturată, la momentul de timp t_0 se fac, simultan, cinci măsurători ale numărului de particule existente în cinci volume egale, la coordonatele $x_1=0\text{cm}$, $x_2=1,5\text{cm}$, $x_3=3,5\text{cm}$, $x_4=5\text{cm}$, $x_5=6,5\text{cm}$.

Valorile măsurate sunt $N(t_0, x_1=0)=7$ particule, $N(t_0, x_2=1,5\text{cm})=4$ particule, $N(t_0, x_3=3,5\text{cm})=3$ particule, $N(t_0, x_4=5\text{cm})=1$ particulă, $N(t_0, x_5=6,5\text{cm})=0$ particule. Aici mărimea de stare care caracterizează



neomogitatea este densitatea volumică a moleculelor (concentrația) $n(t,x)$, exprimată în m^{-3} , iar gradientul densității volumice a moleculelor are unitatea de măsură $\left[\frac{\partial n}{\partial x}\right]_{SI} = m^{-4}$.

Măsurătorile reale operează cu cantități finite, motiv pentru care „infiniții mici” din matematică, notați prin simbolurile „d” sau „∂”, se notează acum cu „Δ”, cu sensul de *diferență finită, măsurabilă*. Consecința este aceea că gradientii calculați sunt valori medii pe intervalele finite considerate. Se poate calcula „gradientul” (sau variația) numărului de particule, între coordonatele succesive x_1, x_2, \dots, x_5 :

- $\text{Grad } N(t_0, x_1) = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{x=x_1} \cong \left.\frac{\Delta N}{\Delta x}\right|_{x=x_1} = \frac{N(t_0, x_2) - N(t_0, x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4-7}{1,5} = -2 \text{ particule/cm};$
- $\text{Grad } N(t_0, x_2) = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{x=x_2} \cong \left.\frac{\Delta N}{\Delta x}\right|_{x=x_2} = \frac{N(t_0, x_3) - N(t_0, x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{3-4}{3,5-1,5} = -0,5 \text{ particule/cm}.$
- $\text{Grad } N(t_0, x_3) = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{x=x_3} \cong \left.\frac{\Delta N}{\Delta x}\right|_{x=x_3} = \frac{N(t_0, x_4) - N(t_0, x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{1-3}{5-3,5} = -1,3 \text{ particule/cm}.$
- $\text{Grad } N(t_0, x_4) = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{x=x_4} \cong \left.\frac{\Delta N}{\Delta x}\right|_{x=x_4} = \frac{N(t_0, x_5) - N(t_0, x_4)}{x_5 - x_4} = \frac{0-1}{6,5-5} = -0,7 \text{ particule/cm}.$

Se poate calcula și variația medie pe tot intervalulul (x_1, x_5):

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{N(t_0, x_5) - N(t_0, x_1)}{x_5 - x_1} = \frac{0-7}{6,5-0} \cong -1,08 \text{ particule/cm}.$$

Formula “de medie”. A se observa că ultima valoare medie nu este altceva decât **media valorilor anterioare, ponderată cu lungimea intervalelor**. Acest lucru este normal, deoarece expresia este consecința *formulei de medie*, calculată din măsurătorile disponibile:

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{1}{x_5 - x_1} \int_{x_1}^{x_5} \text{Grad}(N(t_0, x)) \cdot dx = \frac{1}{x_5 - x_1} \int_{x_1}^{x_5} \frac{\partial N(t_0, x)}{\partial x} \cdot dx \cong \frac{1}{x_5 - x_1} \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta N(t_0, x_i)}{\Delta x_i} (x_{i+1} - x_i),$$

sau, explicitând termenii

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} \cong \frac{1}{x_5 - x_1} \left(\frac{N(t_0, x_2) - N(t_0, x_1)}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1) + \frac{N(t_0, x_3) - N(t_0, x_2)}{x_3 - x_2} (x_3 - x_2) + \frac{N(t_0, x_4) - N(t_0, x_3)}{x_4 - x_3} (x_4 - x_3) + \frac{N(t_0, x_5) - N(t_0, x_4)}{x_5 - x_4} (x_5 - x_4) \right)$$

de unde se regăsește expresia căutată

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{N(t_0, x_5) - N(t_0, x_1)}{x_5 - x_1} = \frac{0-7}{6,5-0} \cong -1,08 \text{ particule/cm}.$$

Mărimi fizice caracteristice

Notăm cu F mărimea care se transportă sub influența gradientului proprietății caracterizate de mărimea fizică ρ . Mărimea care se transportă poate fi cantitate de substanță, energie, sarcină electrică etc. Transportul lui F printr-o suprafață fixă are loc sub forma unui *flux* al mărimii respective Φ_F care conduce la variația acesteia cu o cantitate ΔF într-un timp Δt :

$$\underbrace{\Delta F}_{\text{variația lui } F} = \Phi_F \cdot \Delta t.$$

Fluxul Φ_F al unei mărimii F printr-o suprafață se definește ca variația lui F în unitatea de timp:

$$\Phi_F = \frac{dF}{dt}.$$

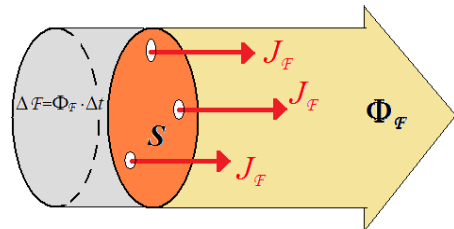
Exemplu

Volumul de apă (mărimea fizică F) dintr-un lac de acumulare scade cu $10\text{m}^3/\text{s}$ din cauza unui flux (debit volumic) de $\Phi_F = -10\text{m}^3/\text{s}$. În 10 minute, variația volumului de apă din lac va fi $\Delta F = \Phi_F \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta F = -10\text{m}^3/\text{s} \cdot 60\text{s} \Rightarrow \Delta F = -600\text{m}^3$, adică volumul de apă scade cu 600m^3 .

Densitatea de flux J_F a mărimii F prin suprafața fixă S este fluxul lui F pe unitatea de suprafață, orientată perpendicular pe direcția de transport:

$$J_F = \frac{1}{S} \cdot \underbrace{\Phi_F}_{\substack{\text{fluxul mărimii } F \\ \text{densitatea de flux a mărimii } F}} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dF}{dt},$$

Dacă mărimea F este, de exemplu, cantitatea de substanță, măsurată în moli, atunci unitățile de măsura sunt: pentru flux $[\Phi_F] = \text{mol}/\text{s}$, iar pentru densitatea de flux $[J_F] = \text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.



Observație

Mărimile generice *flux* și *densitate de flux* trebuie înțelese în sens larg, deoarece, pentru anumite mărimi fizice, se regăsesc denumiri cunoscute, cu notații consacrate istoric, care exprimă mai bine sensul fizic:

- Dacă mărimea F este un *volum* de fluid $F=V$, măsurat în metri cubi, atunci fluxul de volum este *debitul volumic* $\Phi_V \sim Q_V$ (m^3/s), iar densitatea de flux este *viteza de curgere* $J_V \sim v$ (m/s).
- Dacă mărimea F este *energia* unei unde $F=E$, măsurată în Joule, atunci se regăsesc mărimi cunoscute: fluxul de energie este *puterea unde* $\Phi_E \sim P$ (W), iar densitatea de flux este *intensitatea energetică a unde* $J_E \sim I_E$ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$).
- Dacă mărimea F este *sarcina electrică* $F=q$, măsurată în Coulombi, atunci fluxul de sarcină este *intensitatea curentului electric* $\Phi_q \sim I_q$ (A), iar densitatea de flux este *densitatea de curent electric* J_q ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$).

Exemplu

Presupunand că golirea apei din lacul de acumulare din exemplul anterior se face printr-o conductă cu aria secțiunii $S=1\text{m}^2$, densitatea de flux este

$$J_{\mathcal{F}} = \frac{1}{S} \cdot \Phi_{\mathcal{F}} \quad \Rightarrow \quad J_{\mathcal{F}} = \frac{1}{1\text{m}^2} \cdot 10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad J_{\mathcal{F}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Așadar, viteza apei prin conductă este de 10m/s.

În realitate, viteza de curgere este mai mare de 10m/s spre centrul conductei, și mai mică de 10m/s spre pereți, din cauza vâscozității lichidului. Viteza de 10m/s este o viteză medie pe suprafața secțiunii transversale a conductei.

Ecuația generală de transport

Cauza care determină transportul este neomogenitatea proprietății sistemului, exprimată, formal, prin gradient. Transportul are loc până când gradientul mărimii de stare, asociată proprietății aflate în studiu, se anulează.

Densitatea de flux a mărimii transportate $J_{\mathcal{F}}$ este proporțională cu gradientul mărimii de stare $\rho_{\mathcal{F}}$ care caracterizează neomogenitatea:

$$\underbrace{J_{\mathcal{F}}}_{\text{densitate de flux}} = -D_{\mathcal{F}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \rho_{\mathcal{F}}}{\partial x}}_{\text{gradientul mărimii de stare}} \quad (\text{Tr})$$

Coeficientul de proportionalitate $D_{\mathcal{F}}$ depinde de proprietățile entității transportate, de proprietățile mediului în care are loc transportul, precum și de temperatură. La scară microscopică, $D_{\mathcal{F}}$ este funcție de secțiunile de ciocnire și de vitezele de agitație termică.

Observație

Iată câteva corespondențe dintre mărimea de stare $\rho_{\mathcal{F}}$, care exprimă neomogenitatea, și mărimea de proces $\Phi_{\mathcal{F}}$, care caracterizează transportul:

Mărimea care se transporta \mathcal{F}	Mărimea de stare $\rho_{\mathcal{F}}$	Mărimea de proces $\Phi_{\mathcal{F}}$
Număr de particule, N [N] _{SI} =adim.	Densitate volumică de particule, n [n] _{SI} = m^{-3}	Flux de particule, Φ_n [Φ_n] _{SI} = s^{-1}
Cantitate de substanță, v [v] _{SI} =mol	Concentrație molară, c_v [c_v] _{SI} = $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$	Flux molar, Φ_v [Φ_v] _{SI} = $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$
Masă de substanță, m [m] _{SI} =kg	Densitate masică (concentrație masică), ρ_m [ρ_m] _{SI} = $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Flux (debit) masic, Φ_m [Φ_m] _{SI} = $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
Energie cinetică medie de agitație termică $\langle \varepsilon_C \rangle$ [ε_C] _{SI} =J	Temperatură, T [T] _{SI} =K	Putere (flux termic), P_Q [P_Q] _{SI} =W
Sarcină electrică, q [q] _{SI} =C	Potențial electric, \mathcal{V} [\mathcal{V}] _{SI} =V	Curent electric, I_q [I_q] _{SI} =A

Deși au legătură între ele, deoarece se referă la proprietatea \mathcal{F} , mărimile $J_{\mathcal{F}}$ și $\rho_{\mathcal{F}}$ sunt *diferite*: cea dintâi este o mărime de stare, care exprimă neomogenitatea, iar cea de-a doua este o mărime de proces, care caracterizează transportul. Spre exemplu, neomogenitatea temperaturii determină un transport de energie, sub formă de flux de căldură. Temperatura este mărimea de stare, iar căldura este mărimea de proces. Sau, o neomogenitate a concentrației determină un transport de substanță, sub formă de flux de particule. Concentrația este mărimea de stare, iar fluxul de substanță este mărimea de proces.

În continuare, ecuația generală de transport (Tr) va fi aplicată pentru procese particulare de difuzie și de drift.

Fenomene de difuzie

Difuzia este cazul cel mai reprezentativ al fenomenelor de transport. Difuzia nu are sens fără existența agitației termice, și poate fi explicată exclusiv prin mișcarea dezordonată de agitație termică. În plus, se subînțelege faptul că substanța în studiu difuzează printre moleculele altei substanțe, majoritare, cu care se află în amestec. Difuzia nu are sens fără existența acestei substanțe majoritare.

Exemplu

Dacă în interiorul unei camere există o sursă de dioxid de carbon (o persoană care produce CO_2 prin respirație), atunci acest gaz va difuza printre moleculele de oxigen, azot etc., tinzând să uniformizeze concentrația de CO_2 din cameră. Dacă am presupune că în cameră ar fi vid, iar într-un colț al ei s-ar sparge o fiolă cu CO_2 , răspândirea imediată a gazului în cameră este tot un fenomen de egalizare a concentrației, dar nu mai vorbim de difuzie, ci de *detentă*. Detenta este un proces de transport extrem de rapid, de tip convecție (drift).

Difuzia substanței

Difuzia substanței este fenomenul de uniformizare (egalizare) spațială a *concentrației* unei substanțe, aflată în amestec cu altă substanță.

Difuzia este observată atât în gaze și lichide, cât și în solide⁵. Fluxurile care intervin sunt fluxuri de particule, fluxuri molare, sau fluxuri masice. Difuzia substanței se poate exprima în trei moduri asemanatoare, în care diferențele sunt formale, fiind date de modul în care este exprimată densitatea volumică de substanță (concentrația): difuzia de particule, difuzia molară, și difuzia masică.

- Difuzia particulelor

Densitatea fluxului de difuzie a particulelor J_N este proporțională cu gradientul densității de particule n :

⁵ A se vedea http://en.wikipedia.org/wiki/File:Chemical_surface_diffusion_slow.gif

$$J_N = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (\text{Dif})$$

Unitățile de măsură sunt: $[J_N]_{SI} = \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $[n]_{SI} = \text{m}^{-3}$, iar pentru coeficientul de difuzie $[D]_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$.

Semnul minus indică faptul că fluxul de difuzie este orientat în sensul descreșterii concentrației particulelor. Așa cum arată experimentul descris, difuzia constă din transferul unui component al unui amestec din zona de concentrație mare spre zona unde de concentrație mică, adică transportul – densitatea de flux – are direcția și sensul în care se *reduce* concentrația. Cu cât diferența de concentrație este mai mare (gradient mai mare), cu atât fluxul de difuzie este mai mare (în valori absolute).

Dacă densitatea de flux este constantă pe suprafață, atunci ecuația difuziei este mai ușor utilizabilă sub forma următoare:

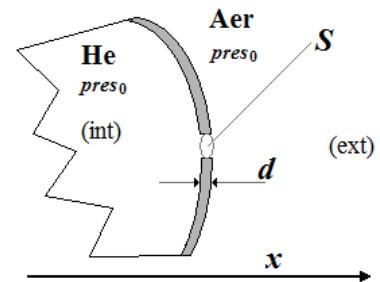
$$\Phi_N = -SD \frac{\partial n}{\partial x} \quad (\text{Dif}')$$

În programele de calculator, în locul formelor diferențiale infinitezimale, care sunt teoretizări ale situațiilor reale, se folosesc diferențele finite:

$$\Phi_N = -SD \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

Exemplu

În cazul difuziei la presiune atmosferică, procesul este lent. Vom exemplifica acest lucru, presupunând că un balon cu volumul $V=10\text{m}^3$, confecționat din aluminiu cu grosimea de $d=2\text{mm}$, plin cu heliu (He), la presiunea de o atmosfera și temperatura de $273,15\text{K}$, are un por cu secțiunea de $S=0,5\text{mm}^2$, astfel că heliul difuzează în atmosferă (și, reciproc, amestecul de specii moleculare din aer difuzează în sens invers, spre interiorul balonului, astfel că presiunea din interior rămâne egală, în permanență, cu cea din exterior $pres_{int}=pres_{ext}=pres_0$). Coeficientul de difuzie a heliului în aer este $D=5,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.



Fluxul de molecule de heliu este $\Phi_N = -SD \frac{n_{ext} - n_{int}}{x_{ext} - x_{int}}$, unde “ext” și “int” se referă la exteriorul, respectiv interiorul balonului. Densitatea de molecule de heliu din exterior este nulă $n_{ext}=0$, iar cea din interior a mai fost calculată, pentru condițiile standard $n_{int}=2,65 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$; prin urmare fluxul de heliu din interior spre exterior este

$$\Phi_N = -SD \frac{0 - n_{int}}{d} = 5 \cdot 10^{-7} \times 5,4 \cdot 10^{-5} \times \frac{2,65 \cdot 10^{25}}{2 \cdot 10^{-3}} \cong 3,58 \cdot 10^{16} \text{ molecule/s.}$$

În timp, concentrația de heliu din interior va scădea; totuși, *cât timp variațiile rămân mici*, de exemplu, în limita de 1%, se poate face aproximația că n_{int} rămâne constant. Se poate calcula timpul după care iese o fracțiune de 1% din numărul inițial de molecule de heliu din balon $\Delta N=0,01N$, sau $\Delta N=0,01 \cdot V \cdot n_{int}$. Așadar:

$$\Delta t = \frac{0,01 \cdot V \cdot n_{\text{int}}}{\Phi_N} = \frac{10^{-2} \times 10 \times 2,65 \cdot 10^{25}}{3,58 \cdot 10^{16}} \cong 7,4 \cdot 10^7 \text{ s, adică circa } 20\,000 \text{ de ore!}$$

Moleculele de heliu din balon sunt înlocuite de componentele aerului. Desigur, dacă ar exista 10000 de pori, timpul ar scădea la 2 ore, dar această estimare ar fi afectată de erori mari, deoarece relațiile de mai sus sunt valabile doar dacă variațiile de concentrație rămân mici (<1%). În caz contrar, trebuie utilizate *ecuațiile cu derivate parțiale*, care țin cont de *variația în timp* a mărimilor fizice.

Ecuații cu derivate parțiale. În general, în regim nestaționar, modificarea în timp a densității de particule poate avea două cauze: modificarea numărului de particule (spre exemplu, din cauza unor surse care produc particule noi, prin reacții care produc particule din specia respectivă), sau fluxuri de intrare-ieșire din volumul inițial (care pot fi asimilate volumului ocupat de particule, eventual prin comprimarea-dilatarea volumului inițial):

$$\Delta N = \Delta(n \cdot V) = V \cdot \Delta n + n \cdot \Delta V = V \cdot \Delta n + nS \cdot \Delta x = V \cdot \Delta n + nS \cdot v \Delta t = V \cdot \Delta n + SJ_N \cdot \Delta t,$$

sau

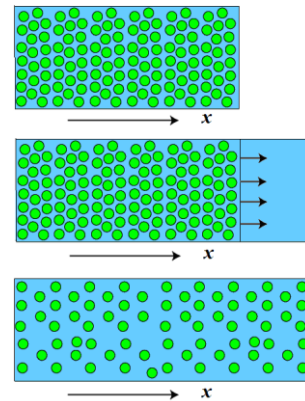
$$\underbrace{\frac{\Delta N}{\Delta t}}_{\substack{\text{variația numărului de particule} \\ \text{datorată apariției de particule noi sau} \\ \text{dispariției celor existente}}} = \underbrace{V \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t}}_{\text{variația densității}} + \underbrace{S \cdot J_N}_{\substack{\text{variația datorată fluxurilor} \\ \text{de intrare-ieșire}}}.$$

Formal, relația de mai sus se poate rescrie punând în evidență *derivata totală* și *derivata parțială*:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + S \cdot J_N.$$

Dacă variația totală a numărului de particule este nulă, $dN=0$, atunci modificarea densității n se datorează exclusiv fluxului de molecule (orientat pe direcția x), așadar:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}_{\text{variația densității de particule}} + \underbrace{S \cdot J_N}_{\substack{\text{variația datorată fluxurilor} \\ \text{de intrare-ieșire}}}.$$



Combinând relația precedentă cu ecuația difuziei (Dif²) $SJ_N = -SD \frac{\partial n}{\partial x}$, se obține:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - DS \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Această ecuație are, încă, o formă mai utilă, dacă se ține cont că $V=Sx$, deci

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 (Sxn)}{\partial x^2} = 0,$$

sau

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{EDP})$$

Aceasta este *ecuația cu derivate parțiale pentru numărul de particule N*. Rezolvarea ei, cunoscând condițiile inițiale $N(0,x)=\eta(x)$ și condițiile la limită $N(t,0)=\theta(t)$ și $N(t,L)=\Theta(t)$,

permite aflarea soluției $N(t,x)$, adică a distribuției numărului de particule după coordonata x , la orice moment de timp t .

- Difuzia molară

Divizând ambii membri ai relației (Dif) cu numărul lui Avogadro N_A , se obține relația pentru difuzia molară.

Densitatea fluxului de difuzie molară J_v este proporțională cu gradientul concentrației molare c_v :

$$J_v = -D_v \frac{\partial c_v}{\partial x}. \quad (\text{Difm})$$

În acest caz, mărimea de stare este concentrația molară a substanței c_v , mărimea de transportat este cantitatea de substanță exprimată în număr de moli v , iar D_v este coeficientul de difuzie molară, $D_v \equiv D$. Unitățile de măsură sunt următoarele: $[J_v]_{SI} = \text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $[c_v]_{SI} = \text{mol}/\text{m}^3$, $[D_v]_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$.

Pentru probleme unidimensionale, ecuația difuziei molare se poate scrie sub formele alternative:

$$\Phi_v = -SD_v \frac{\partial c_v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -SD_v \frac{\partial c_v}{\partial x}.$$

Analog, ecuația cu derivate parțiale corespunzătoare este:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

- Difuzia masică

Ținând cont că moleculele au masă, și multiplicând relația precedentă cu masa molară, se obține relația difuziei masice, cunoscută și sub numele de legea lui Fick.

Densitatea fluxului de difuzie masică J_m este proporțională cu gradientul densității de masă ρ_m :

$$J_m = -D_m \frac{\partial \rho_m}{\partial x}.$$

J_m este fluxul masic, ρ_m este densitatea masică, iar coeficientul $D_m \equiv D_v \equiv D$ este același. Unitățile de măsură sunt $[J_m]_{SI} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $[\rho_m]_{SI} = \text{kg}/\text{m}^3$, $[D_m]_{SI} = \text{m}^2/\text{s}$.

Pentru probleme unidimensionale, ecuația difuziei masice se poate scrie și sub formele:

$$\Phi_m = -SD_m \frac{\partial \rho_m}{\partial x}; \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -SD_m \frac{\partial \rho_m}{\partial x}.$$

Ecuația cu derivate parțiale asociată este:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0.$$

Difuzia termică

Difuzia (conducția) termică este fenomenul de uniformizare (egalizare) spațială a temperaturii unui sistem prin apariția unui flux de căldură între părțile sale, aflate la temperaturi diferite.

Așadar, un gradient de temperatură dă naștere unui flux de căldură. Fluxul de căldură apare în condițiile unei neomogenități a temperaturii. În acest caz, procesul de transport este descris de relația (cunoscută și sub denumirea de *legea lui Fourier*):

$$J_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Densitatea fluxului de căldură J_Q este proporțională cu gradientul temperaturii T .

J_Q este căldura transferată în unitatea de timp prin unitatea de arie a suprafeței S , orientată perpendicular pe direcția de difuzie, iar κ este *coeficientul de conductibilitate termică*. Unitățile de măsură sunt: $[J_Q]_{SI} = W \cdot m^{-2}$, $\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{SI} = K \cdot m^{-1}$; pentru coeficientul de conductibilitate termică se obține $[\kappa]_{SI} = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Semnul minus arată că fluxul de căldură J_Q este orientat în sens invers variației de temperatură, adică transportul de căldură se face dinspre zonele cu temperatura mai ridicată spre zonele cu temperatură mai redusă. Fluxul de căldură conduce la uniformizarea temperaturii în cadrul sistemului.

Observație

Procesele de difuzie sunt *diferite* de procesele de propagare a undelor. Putem vorbi de *viteza de difuzie termică*, la fel cum vorbim de viteza de propagare a undelor, **dar fenomenele de difuzie nu sunt procese ondulatorii, și fluxurile termice nu au proprietățile undelor**. Spre exemplu, transferurile de căldură nu interferă, în sensul producerii de „maxime” și „minime” de temperatură. Difuzia termică transportă energie dezordonată (căldură), în timp ce undele transportă energie ordonată.

Pentru probleme unidimensionale, ecuația difuziei termice se scrie:

$$\Phi_Q = -\kappa S \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa S \frac{\partial T}{\partial x},$$

unde unitățile de măsură sunt: $[Q]_{SI} = J$, $[\Phi_Q]_{SI} = W$.

Ecuția cu derivate parțiale este ușor modificată față de cele anterioare, deoarece, pentru a modifica temperatura cu dT , este necesară căldura $dQ = \rho_m V C_m dT$, de unde

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\kappa}{\rho_m C_m}}_{D_T \text{ difuzivitate termică}} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Noua constantă de proporționalitate D_T , denumită *difuzivitate termică*, depinde atât de coeficientul de conductibilitate termică κ , cât și de densitatea de masă ρ_m și de căldura

specifică masică C_m . Unitățile de măsură sunt $[C_m]_{SI} = J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, $[D_T]_{SI} = m^2/s$. Ecuația este cunoscută și sub denumirea de *ecuația căldurii*.

Aplicație: rezistența termică și circuitele termice.

Analog legii lui Ohm din electricitate, se poate găsi o expresie echivalentă pentru “circuitele” termice. Pentru un mediu filiform, de lungime l și secțiune S , caracterizat de conductibilitatea



termică κ , ecuația generală a difuziei termice $\Phi_Q = -\kappa S \frac{\partial T}{\partial x}$ se poate rescrie, sub formă

aproximativă, $\Phi_Q \cong \kappa S \frac{\Delta T}{l}$, unde $\Delta T = T(x_1) - T(x_2)$ este diferența de temperatură dintre capetele

firului, iar Φ_Q este fluxul termic, cu dimensiune de putere (unitatea de măsură este Watt). Relația se rescrie sub forma

$$\Phi_Q = \frac{\Delta T}{R_{th}},$$

unde mărimea $R_{th} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{S}$ este *rezistența termică*, $[R_{th}]_{SI} = K/W$. Prin analogie cu legea lui Ohm

de la circuitele electrice, $I_q = \frac{U}{R_{el}}$, rolul intensității curentului electric (fluxul de sarcină

electrică) este luat de puterea calorică (fluxul de căldură) $[\Phi_Q] = W$, iar tensiunea electrică, sau variația de potențial $U = \Delta \psi$, este înlocuită de variația de temperatură ΔT .

În circuitele integrate din interiorul calculatoarelor, conexiunile dintre plăcuțele de siliciu și terminalele exterioare, care fac legăturile cu placa de bază, sunt confecționate din fire de aur, cu diametrul de $20 \mu m$ și cu lungimea de ordinul $l = 2 mm$.

Pentru dimensiunile de mai sus, și ținând cont că $\kappa_{Au} = 318 W m^{-1} K^{-1}$, se obține

$$R_{th} = \frac{1}{318 W m^{-1} K^{-1}} \times \frac{2 \cdot 10^{-3} m}{\pi \cdot 10^{-10} m^2} \cong 2,00 \cdot 10^4 K \cdot W^{-1}.$$

Dacă temperatura în interiorul circuitului integrat este de $T_1 = 80^\circ C$, iar temperatura terminalului extern este $T_2 = 30^\circ C$, căldura evacuată în unitatea de timp, prin firul de aur, este

$$\Phi_Q = \frac{50 K}{2,00 \cdot 10^4 K \cdot W^{-1}} = 2,5 \cdot 10^{-3} W = 2,5 mW.$$

Prin toate cele 100 de terminale nu s-ar putea evacua decât cel mult 250 mW, cu mult sub necesitățile de evacuare termică impuse de funcționarea corectă a circuitelor integrate pe plăcuța de siliciu⁶, care poate ajunge la zeci de Watt, fiind necesare *radiatoare termice*. Tehnologiile

⁶ În tehnologia actuală de 45 nm, microprocesoarele conțin circa 1,5 miliarde tranzistoare.

circuitelor integrate tind să minimizeze tensiunile și curenții de lucru, reducând pierderile de energie prin efect termic (Joule).

Observație

În tehnică, în afara rezistenței termice, se mai folosește așa numitul „factorU”= $\frac{l}{\kappa}$, măsurat în m^2K/W . Acesta este întâlnit în specificațiile tehnice ale geamurilor și ramelor de tip termopan.

Aplicație: pierderile de căldură din apartamente.

Cărămizile ceramice actuale au un coeficient de conductibilitate termică $\kappa=0,2...0,6Wm^{-1}K^{-1}$, mai mic decât al betonului (care este de aproximativ $1,0Wm^{-1}K^{-1}$). Pentru un perete exterior, cu suprafața de $16m^2$ și grosimea $l=0,5m$, considerând $\kappa=0,5Wm^{-1}K^{-1}$, rezistența termică este

$$R_{th} = \frac{1}{0,5} \cdot \frac{0,5}{16} = 6,25 \cdot 10^{-2} K/W. \text{ Dacă temperatura din interior este } T_{int}=22^\circ C, \text{ iar temperatura în}$$

exterior este $T_{ext}=0^\circ C$, atunci puterea pierdută prin perete este $\Phi_Q = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{22}{6,25 \cdot 10^{-2}} = 352W$.

Pierderile printr-un geam termopan cu suprafața de $4m^2$, caracterizat de $factorU=1,4m^2K/W$, de

$$\text{unde } R_{th\text{ geam}} = \frac{factorU}{S} = \frac{1,4}{4} = 0,35 K/W, \text{ sunt } \Phi_{Q\text{ geam}} = \frac{\Delta T}{R_{th\text{ geam}}} = \frac{22}{0,35} \cong 63W.$$

Prin urmare, printr-un perete prevăzut cu un geam pierderile sunt de aproximativ 400W; se poate estima că, pentru un apartament, pierderile prin difuzie sunt de ordinul a 1kW, ceea ce înseamnă o energie pierdută, sub formă de căldură, de $24kWh \cong 20,7Mcal$ zilnic, sau $0,62Gcal$ lunar. Costul actual al gigacaloriei este de circa 168lei/Gcal, asadar energia pierdută ne costă aproximativ 104lei în fiecare lună.

Aplicație: o soluție nestaționară a ecuației căldurii.

Sa presupunem că avem un mediu unidimensional, de lungime L și difuzivitate D_T , care la capătul $x=0$ este excitat de o sursă termică periodică, cu pulsatia ω și cu amplitudinea ΔT , astfel că

$T(t,0)=T_0+(\Delta T) \cdot \sin(\omega t)$, iar la celalalt capăt temperatura este constantă $T(t,L)=T_0$.



Ecuația căldurii $\frac{\partial T}{\partial t} - D_T \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ admite o soluție amortizată, de forma:

$$T(t, x) = T_0 + (\Delta T) \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - kx).$$

Prin analogie cu fenomenele undulatorii (dar *diferit* de acestea), variația de temperatură difuzează cu viteza $c_{\text{difuzie}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{2\omega D_T}$. Mărimea $(\Delta T) \cdot e^{-\alpha x}$ este amplitudinea oscilației, amortizată cu factorul $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2D_T}}$. Inversul factorului de amortizare se numește *adâncime de pătrundere* $\delta = \frac{1}{\alpha}$, și are semnificația distanței la care amplitudinea scade de „e” ori.

Îngroparea conductelor de apă trebuie să se facă la o adâncime suficient de mare, astfel ca acestea să nu înghețe. Temperatura medie multianuală este $T_0 = 12^\circ\text{C}$, iar amplitudinea termică, la suprafața solului, este $\Delta T = T_{\text{max, vara}} - T_{\text{min, iarna}}$ adică $\Delta T = 44 - (-20) = 64\text{K}$. Amplitudinea, la adâncimea dorită, trebuie să fie suficient de atenuată încât temperatura să nu coboare sub temperatura de îngheț, adică, la limită, $(64\text{K})e^{-x/\delta} = 12\text{K}$, de unde $x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{64}{12}$.

Dacă difuzivitatea solului este $D_T = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$, iar perioada de un an înseamnă o pulsație $\omega_{\text{iarna-vara}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{rad/s}$, se obține $\alpha = 0,6 \text{m}^{-1}$, sau o adâncime de pătrundere de 1,7m. Corespunzător, rezultă o adâncime a gropilor $x = 2,8 \text{m}$. Viteza de difuzie este extrem de mică, de circa 1,2mm/oră! Cu cât este mai mare pulsația, cu atât este mai mare viteza de difuzie, dar și atenuarea. Spre exemplu, variațiile diurne difuzează mult mai repede (circa 2,4cm/oră), dar adâncimea lor de pătrundere este mult mai redusă, de aproximativ 8,7cm.

Teme

Verificați faptul că soluția indicată $T(t, x) = T_0 + (\Delta T) \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - kx)$ satisface ecuația căldurii $\frac{\partial T}{\partial t} - D_T \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, și regăsiți expresiile pentru viteza de difuzie și adâncimea de pătrundere.

Alte procese de difuzie (extensii de studiu)

Desi exced cerințele acestui curs de fizică, amintim aici și alte fenomene de transport, cu aplicații pe piețele financiare, sau în științele sociale.

Difuzia informației

Informația se măsoară prin *entropia informațională*⁷, care constituie o mediere a informației pe simbol, măsurată prin *bit*.

Ipoteza *pieței eficiente*⁸, conform căreia informația este disponibilă, instantaneu și în mod egal tuturor operatorilor din piață, este criticabilă. Aceasta ar presupune o viteză de circulație infinită, ceea ce este inacceptabil practic.

În realitate, orice informație difuzează cu viteza finită, prin comunicare mesajelor între operatorii economici, ceea ce conduce la decizii raționale, cu scopul maximizării profiturilor (spre exemplu, arbitraje). Sau, informația despre o bancă aflată în dificultate

⁷ http://en.wikipedia.org/wiki/Information_theory

⁸ http://en.wikipedia.org/wiki/Efficient_markets

este tipică pentru ilustrarea răspândirii mesajului, de la agent la agent. Acest proces de transport se poate modela cu o ecuație de tip difuzie pentru funcția necunoscută $N(t,x,y)$ care reprezintă procentul de „cunoscători” ai mesajului la momentul t , în coordonate spațiale (x,y) :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) = 0.$$

În majoritatea cazurilor, ecuațiile de difuzie sunt stocastice, adică funcția necunoscută este o *valoare medie* a unei variabile aleatorii.

Cea mai cunoscută teorie care stă la baza stabilirii prețurilor⁹ este teoria *drumului aleatoriu* (“random walk”¹⁰).

Difuzia inovațiilor

http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_of_innovations

Fenomene de drift (convecție)

Driftul de sarcină electrică

În cazul prezenței unor particule purtătoare de sarcină electrică, existența unui gradient de potențial electric, sau *tensiune* electrică, conduce la apariția unui flux de purtători de sarcină. Acest flux se poate produce și în lipsa agitației termice.

Densitatea de flux de sarcină J_q este direct proporțională cu gradientul potențialului electric:

$$J_q = -\sigma_{el} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}.$$

J_q este densitatea superficială de curent electric, $[J_q]_{SI} = A/m^2$, \mathcal{V} este potențialul electric, $[\mathcal{V}]_{SI} = V$ (Volt), iar σ_{el} este *coeficientul de conductivitate electrică*, $[\sigma_{el}]_{SI} = \Omega^{-1}m^{-1}$, unde simbolul Ω (Ohm) este pentru unitatea de măsură a rezistenței electrice. Pentru probleme unidimensionale, ecuația curentului de drift se poate scrie:

$$\Phi_q = -\sigma_{el} S \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}.$$

Dacă q este sarcina electrică, $[q]_{SI} = C$ (Coulomb), atunci sarcina transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață, orientată perpendicular pe direcția de curgere, este densitatea de flux de sarcină J_q , sau densitatea superficială de curent electric:

$$J_q = \frac{1}{S} \cdot \underbrace{\Phi_q}_{\text{fluxu de sarcină = intensitatea curentului electric}} = \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial t}.$$

densitate de flux = densitate superficială de curent electric

⁹ http://en.wikipedia.org/wiki/Financial_market_efficiency#Random_Walk_theory

¹⁰ http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk

Gradientul potențialului electric definește mărimea vectorială *intensitatea câmpului electric*

\vec{E} , orientată în sensul scăderii potențialului electric; în cazul unidimensional

$$E = -\frac{d\mathcal{V}}{dx}, \quad [E]_{SI} = \text{V/m}.$$

Observație

De cele mai multe ori driftul și difuzia de sarcină coexistă. Este situația tipică de la joncțiunile semiconductoare, unde diferența de concentrație a purtătorilor conduce la difuzia acestora și la un dezechilibru de potențial electric, care generează, la rândul său, un curent de drift care echilibrează curentul datorat difuziei. Se formează, astfel, bariera de potențial electric, caracteristică joncțiunile semiconductoare.

Aplicație: legea lui Ohm.

Pentru un mediu conductor cilindric, de secțiune S și lungime $l = x_2 - x_1$, între capetele căruia există o diferență de potențial $\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_2) - \mathcal{V}(x_1)$, ecuația de transport se scrie, succesiv

$$\frac{1}{S} \Phi_q = -\sigma_{el} \frac{\mathcal{V}(x_2) - \mathcal{V}(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\Phi_q = \sigma_{el} S \frac{\Delta\mathcal{V}}{l},$$

care este, de fapt, **legea lui Ohm**

$$\Phi_q = I_q = \frac{U}{R_{el}},$$

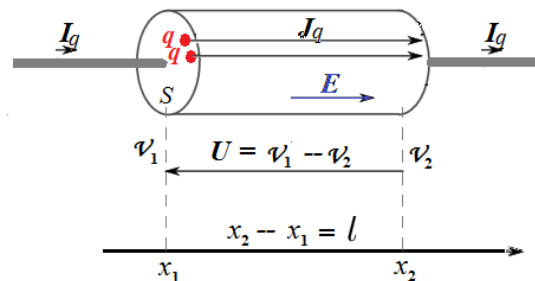
unde $U = \mathcal{V}(x_1) - \mathcal{V}(x_2)$ este tensiunea electrică,

iar $R_{el} = \frac{1}{\sigma_{el}} \cdot \frac{l}{S}$ este *rezistența electrică*. În

concluzie, legea lui Ohm, la scară macroscopică, se explică, microscopic, prin convecția, sau driftul purtătorilor de sarcină electrică. În metale, purtătorii de sarcină electrică sunt electronii¹¹, fiecare electron purtând o sarcină elementară negativă $e_{el} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

În circuitele integrate din interiorul calculatoarelor, conexiunile dintre plăcuțele de siliciu și terminalele exterioare, care fac legăturile cu placa de bază, sunt confecționate din fire de aur, cu diametrul de $20 \mu\text{m}$ și cu lungimea de ordinul $l = 2 \text{mm}$. Rezistența electrică a conexiunii de aur este (se consideră $\sigma_{el, Au} = 4,5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$)

$$R_{el} = \frac{1}{4,5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}} \times \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{m}}{\pi \cdot 10^{-10} \text{m}^2} \cong 0,142 \Omega = 142 \text{m}\Omega.$$



¹¹ În plasmă (gaze ionizate), purtătorii sunt de două tipuri: electroni și ioni. În semiconductoare, purtătorii de sarcină sunt tot de două tipuri: electroni și goluri.

Un astfel de fir suportă o densitate de curent electric de $J_q=1\text{mA}/\mu\text{m}^2$; în consecință, intensitatea maximă a curentului electric suportat de fir este:

$$I = SJ \Rightarrow I = \pi \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \times 10^9 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cong 0,314 \text{A} = 314 \text{mA}.$$

Căderea de tensiune pe fir este extrem de mică, de ordinul milivolului:

$$U = IR_{el} \Rightarrow U = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{A} \times 1,42 \cdot 10^{-2} \Omega \cong 4,46 \cdot 10^{-4} \text{V} \cong 0,5 \text{mV}.$$

Căldura degajată de fir prin efect Joule, în unitatea de timp (puterea disipată sub formă de căldură)

$$P_{\text{Joule}} = IU \Rightarrow P_{\text{Joule}} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{A} \times 4,46 \cdot 10^{-4} \text{V} \cong 1,40 \cdot 10^{-5} \text{J} = 14,0 \mu\text{W}.$$

Acest flux de căldură (0,014mW) este semnificativ mai mic decât cel de 2,5mW care poate fi evacuat de firul conductor. Altfel spus, firul de aur nu se va încălzi din cauza trecerii curentului electric. Dimpotrivă, firul de aur contribuie la evacuarea căldurii din pastila de siliciu.

Metalele, care sunt foarte bune conductoare electrice, sunt și bune conducătoare de căldură. Motivul este că aceiași *electroni liberi*, care participă la conducția electrică, participă și la conducția termică.

Cazul diamantului este unul special. El este foarte bun *izolator* electric, dar conduce extrem de bine căldura. În cazul lui, conducția termică nu se face prin electronii liberi – care, practic, sunt inexistenți –, ci prin alte mecanisme, care exced scopul capitolului de față. Oricum, una dintre metodele cele mai rapide de a distinge diamantele de alte pietre semiprețioase este proprietatea de a fi bun conducător termic.

Caracteristicile electrice și termice ale unor materiale cunoscute, la temperatura camerei.

Material	$\sigma_{el} (\times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1})$	$\kappa (\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1})$
Aur (Au)	4,5	318
Argint (Ag)	6,3	429
Cupru (Cu)	6,0	401
Aluminiu (Al)	3,8	237
Diamant (C)	$\sim 10^{-16}$	1000-3000

Teme

1. Vântul atmosferic este un fenomen de drift, sau de difuzie? Care ar fi mărimile caracteristice?
2. Pierderile de căldură din apartamente se datorează în principal difuziei, sau convecției?